

Apostila de Vibrações

Professor: Carlos Alberto Bavastri

Sumário

1. Modelo de Excitação e Resposta.....	4
2. Funções Determinísticas e Aleatórias	5
2.1. Funções periódicas.....	8
2.1.1. Soma de funções periódicas.....	8
2.2. Funções Harmônicas	10
2.2.1. Propriedades	12
2.3. Representação Complexa.....	12
2.4. Extensão para o domínio da frequência	14
2.4.1. Módulo de $F(\Omega)$	14
2.4.2. Fase de $F(\Omega)$	15
2.5. Espectro.....	16
2.6. Potência e Energia de um sinal	18
2.7. Série de Fourier	20
2.7.1. Espectro de Fourier	22
2.8. Teorema de Parseval.....	26
3. Transformada de Fourier	30
3.1. Relação entre os coeficiente da Série de Fourier e a TF	32
3.2. Teorema de Parseval.....	33
3.3. Propriedade da Transformada de Fourier.....	35
4. Vibrações em Engenharia - Sistemas de 1 Grau de Liberdade.....	39
4.1. Introdução.....	39
4.2. Molas em Série e em Paralelo.....	40
4.2.1. Paralelo.....	40
4.2.2. Série.....	40
4.3. Sistema de um grau de liberdade – Modelo matemático.....	41
4.4. Instabilidade – Vibrações Livres	45
5. Neutralizadores Dinâmicos – Sistemas de dois Graus de Liberdade	51
5.1. Conceitos de FRF para sistemas de um grau de liberdade	51
5.2. Sistema de dois Graus de Liberdade	56
5.3. Sintonização do Neutralizador M_k	59
5.3.1. Parâmetros ótimos do neutralizador (sintonização):.....	59
5.4. Neutralizadores Dinâmicos com Amortecimento	60
5.5. Escolha dos Parâmetros ótimos do neutralizador – Sintonização	62

5.5.1.	Teoria dos Pontos Fixos.....	62
5.5.2.	Sintonização ótima ($\xi_{\text{ótimo}} - \alpha_{\text{ótimo}}$).....	62
5.5.3.	Projeto ótimo de um sistema de controle de vibração passiva (MCK) aplicado a um sistema de um grau de liberdade (MK):.....	63

1. Modelo de Excitação e Resposta

Um sistema pode ser submetido a diferentes tipos de excitações. Na figura 1 são classificados sinais de excitação e resposta:



Figura 1 - Modelos de excitação e resposta

2. Funções Determinísticas e Aleatórias

Um fenômeno ou função que o representa se diz **determinístico** quando as suas características são perfeitamente previsíveis.

Exemplo: Seja o modelo matemático de um sinal dado por:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

Se os parâmetros A , ω e φ forem conhecidos pode-se calcular o valor de $f(t)$ para qualquer valor de “ t ”. Portanto, se $f(t)$ fosse uma excitação que está sendo aplicada a uma estrutura cujas características dinâmicas são perfeitamente definidas, a resposta será previsível.

Por outro lado, se uma estrutura não é perfeitamente conhecida do ponto de vista dinâmico, diz-se que a mesma é **aleatória, imprevisível** ou **não determinística**. Ou seja, qualquer que seja o tipo de excitação a resposta será aleatória (figura 2).

Neste curso, as estruturas ou sistemas mecânicos em estudo serão considerados determinísticos.

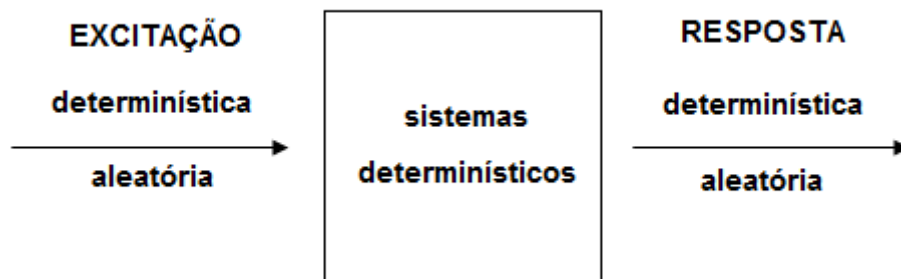


Figura 2 - Sistema e sinais

Considere um disco montado sobre um eixo rígido e apoiado sobre dois mancais rígidos, ver figura 3. Considere como sempre ocorre na realidade, que existe uma excentricidade “ e ” entre o centro de massa e o centro geométrico do disco (figura 4).

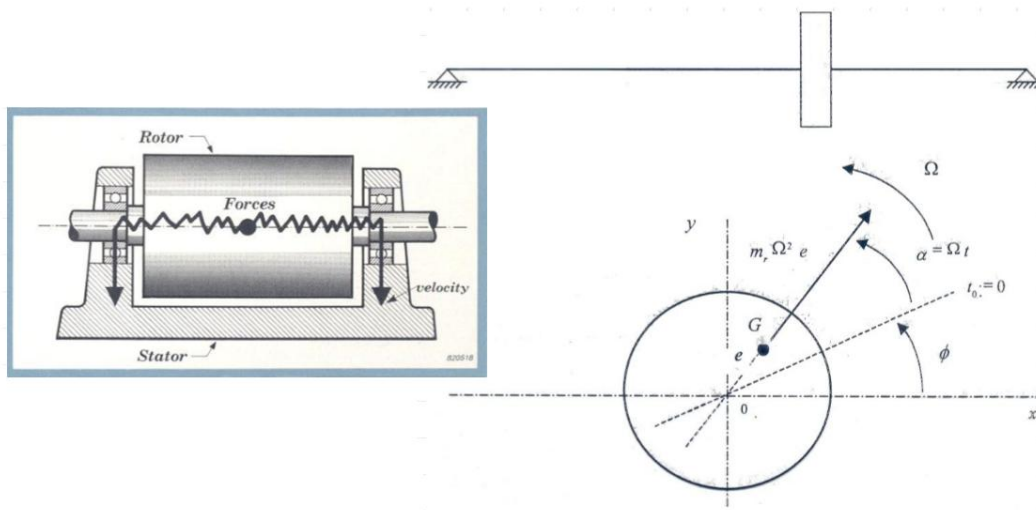


Figura 3 – Rotor representado como disco montado sobre eixo

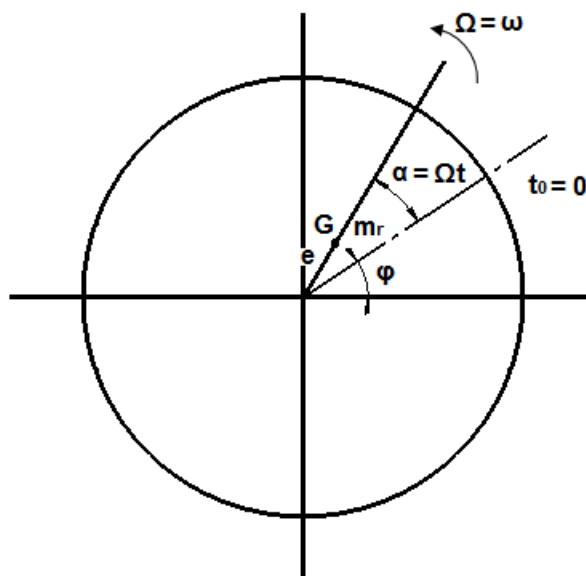


Figura 4 - Modelo Gráfico

a) Forças ou excitações determinísticas

HIPÓTESE: Não existe atrito nos mancais.

- Em repouso o ponto G se encontrará sempre na posição vertical inferior devido ao desbalanceamento;
- Conhecendo em todo instante a aceleração e a velocidade de rotação, é possível prever o tempo exato “ t_0 ” para que o rotor chegue à velocidade constante “ Ω ”;
- A força centrífuga devido à excentricidade será:

$$f_x(t) = m_r \Omega^2 e \cos(\Omega t + \varphi) \quad (2.1)$$

$$f_y(t) = m_r \Omega^2 e \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.2)$$

b) Forças ou excitações aleatórias:

HIPÓTESE: Existe atrito nos mancais.

- Ao se deter o rotor, o disco não parará ou se deterá na mesma posição. Desta forma a defasagem φ será imprevisível, uma variável aleatória para um dado tempo "t".
- Uma vez que o rotor é girado com certa aceleração e velocidade conhecida, não é possível prever qual será o valor de força em determinado instante "t".
- Para cada valor de "t", $f_x(t)$ e $f_y(t)$ serão variáveis aleatórias.

Quando uma variável aleatória é função de um ou mais parâmetros (*exemplo o tempo*) recebe o nome de **processo estocástico**. Na figura 5, este fenômeno é representado.

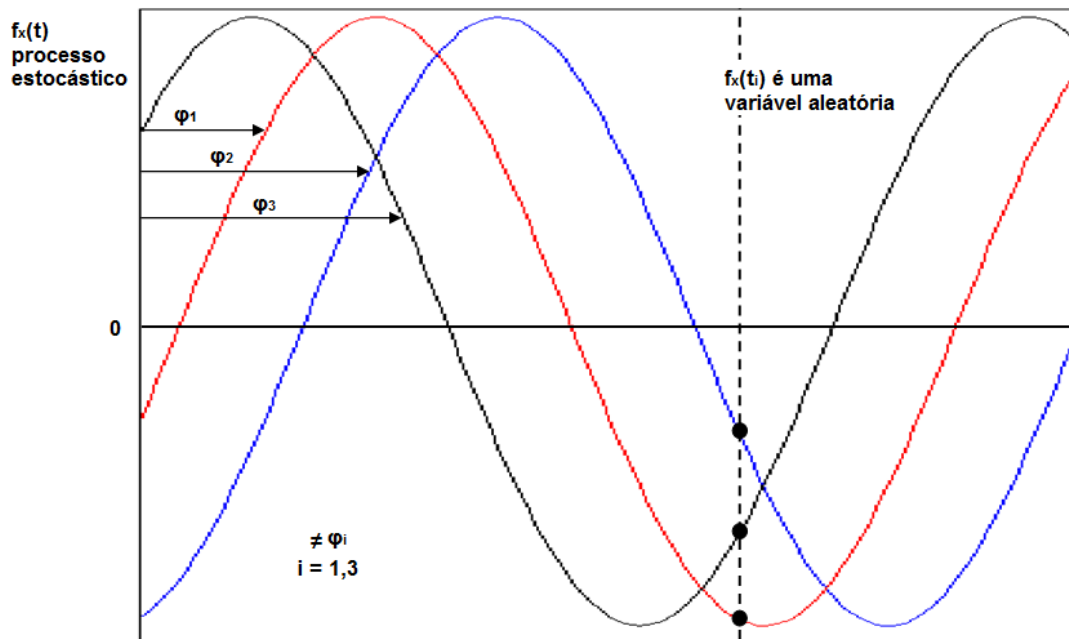


Figura 5 - Processo Estocástico

- Para cada ensaio é possível determinar o valor de $f_x(t)$ e $f_y(t)$ e então achar φ ;
- Todas as possíveis realizações de $f_x(t)$ e $f_y(t)$ formam uma população de funções amostras.

Exemplos:

- Ensaio de tração de materiais;
- Tensões na raiz da asa de um avião devido a turbulências;
- Esforços nas chaminés ou torres e cabos de transmissão de energia elétrica nas linhas aéreas devido a desprendimentos de vórtices de von Kármán produzidos pelo vento e o perfil da estrutura.

2.1. Funções periódicas

Uma função $f: R^1 \rightarrow R^1$ é periódica se e somente se:

$$f(t + T) = f(t) \text{ com } t \in R^1. \quad (2.3)$$

Se T existe não será única, de fato:

$$f(t + nT) = f(t + T) = f(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Ao menor valor de T dá-se o nome de **período** e sua unidade é o segundo [s], ver figura 6.

Define-se frequência do sinal periódico à relação:

$$f \equiv \frac{\text{número de repetições}}{\text{tempo transcorrido}} = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \quad (2.5)$$

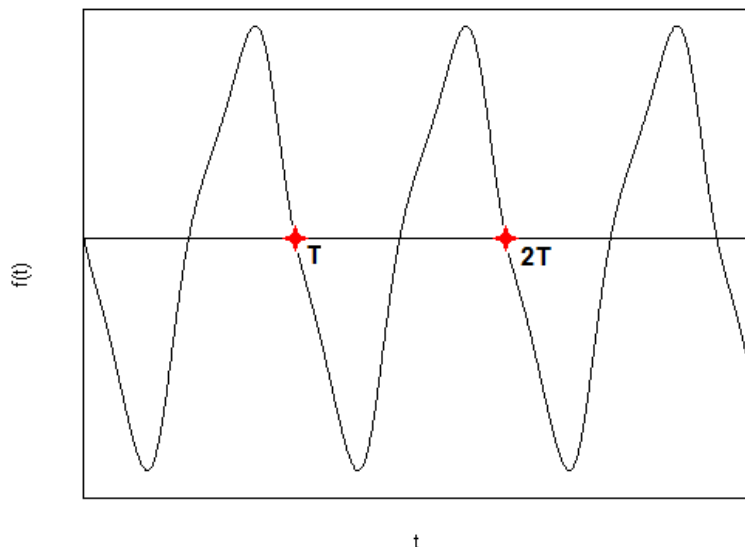


Figura 6 - Sinal Periódico

Muitos equipamentos funcionam em fonte repetitiva, provocando excitações e respostas periódicas, como por exemplo, máquinas rotativas, máquinas alternativas, entre outras.

2.1.1. Soma de funções periódicas

A soma de duas funções periódicas dá como resultado uma função periódica se cumpre a seguinte relação:

$$T_s = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (2.6)$$

Onde:

T_s - período da soma ou sinal resultante
 n_1 e n_2 - números inteiros.

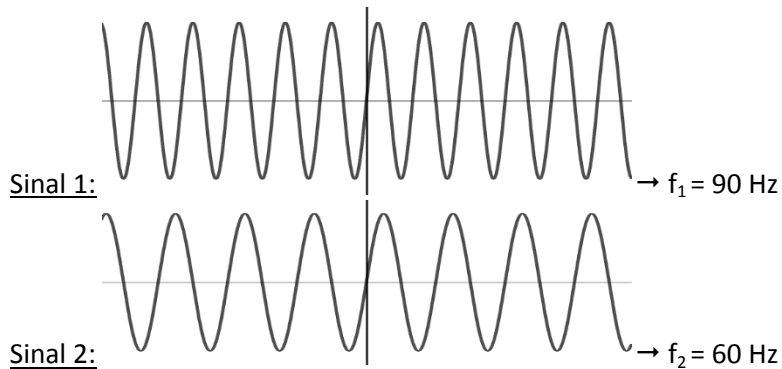
Também, a soma deve respeitar a seguinte relação:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad (2.7)$$

Sendo a frequência resultante desta soma dada por:

$$f_s = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2}. \quad (2.8)$$

Exercício: Qual é a frequência resultante da soma das seguintes funções periódicas?



Solução:

$$f_s = \frac{90}{n_1} = \frac{60}{n_2} \rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

$$f_s = \frac{90}{3} = \frac{60}{2} = 30 \text{ Hz}$$

2.2. Funções Harmônicas

É um dos modelos de excitação e resposta mais importante relacionado com os sistemas físicos encontrados na prática. O modelo matemático destas funções pode tomar uma das seguintes formas:

$$f(t) = A(\Omega) \cos \Omega t + B(\Omega) \sin \Omega t \quad (2.9)$$

$$f(t) = P(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)) \quad (2.10)$$

$$f(t) = P(\Omega) \sin(\Omega t + \psi(\Omega)) \quad (2.11)$$

Onde $P(\Omega)$, $A(\Omega)$, $B(\Omega)$, $\varphi(\Omega)$ e $\psi(\Omega)$ são constantes em relação a t ; $\Omega > 0$.

Todas as equações (2.9), (2.10) e (2.11) podem representar a mesma função harmônica $f(t)$.

Genericamente, o sinal $f(t)$ é mostrado na figura 7 e pode representar tanto um sinal senoidal como cosenoidal defasado, Ψ ou φ , respectivamente, e P é a amplitude do sinal.

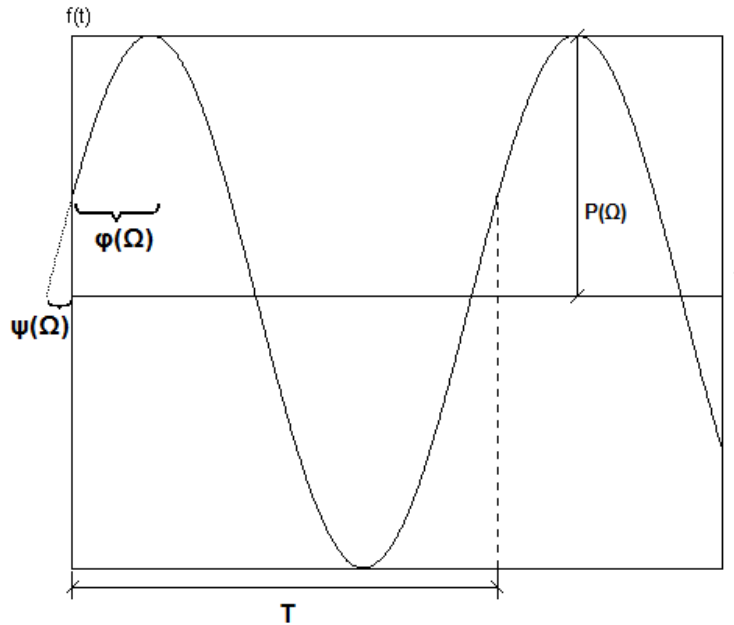


Figura 7 - Função Harmônica

As constantes acima podem ser relacionadas matematicamente. Para tal, deve-se expandir o cosseno e o seno das equações (2.10) e (2.11). Assim, partindo-se da equação (2.10):

$$f(t) = P(\Omega)[\cos \Omega t \cos \varphi(\Omega) - \sin \Omega t \sin \varphi(\Omega)] \quad (2.12)$$

$$f(t) = P(\Omega) \cos \Omega t \cos \varphi(\Omega) - P(\Omega) \sin \Omega t \sin \varphi(\Omega) \quad (2.13)$$

$$f(t) = A(\Omega) \cos \Omega t + B(\Omega) \sin \Omega t \quad (2.14)$$

e por simples comparação entre as equações (2.13) e (2.9):

$$\boxed{A(\Omega) = P(\Omega) \cos \varphi(\Omega)} \quad (2.15)$$

$$\boxed{B(\Omega) = -P(\Omega) \sin \varphi(\Omega)} \quad (2.16)$$

Elevando ao quadrado as equações (2.15) e (2.16) e somando membro a membro, é possível achar a relação que existe entre P, A e B:

$$A^2(\Omega) + B^2(\Omega) = P^2(\Omega)[\cos^2 \varphi(\Omega) + \sin^2 \varphi(\Omega)] = P^2(\Omega) \quad (2.17)$$

$$\boxed{P(\Omega) = \sqrt{A^2(\Omega) + B^2(\Omega)}} \quad (2.18)$$

Partindo da equação (2.11) e realizando os mesmos passos algébricos simples, tem-se:

$$\boxed{A(\Omega) = P(\Omega) \sin \psi(\Omega)} \quad (2.19)$$

$$\boxed{B(\Omega) = P(\Omega) \cos \psi(\Omega)} \quad (2.20)$$

Das equações (2.15), (2.16), (2.19) e (2.20) chegamos às seguintes relações:

$$A(\Omega) = P(\Omega) \cos \varphi(\Omega) = \frac{-B(\Omega)}{\sin \varphi(\Omega)} \cos \varphi(\Omega) \quad (2.21)$$

$$A(\Omega) = P(\Omega) \sin \psi(\Omega) = \frac{B(\Omega)}{\cos \psi(\Omega)} \sin \psi(\Omega) . \quad (2.22)$$

Por fim, a relação entre as fases é dada por:

$$\boxed{-1 = \tan \psi(\Omega) \tan \varphi(\Omega)} . \quad (2.23)$$

2.2.1. Propriedades

Uma função harmônica é periódica e o seu período é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} [s] \quad (2.24)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} [Hz] \quad (2.25)$$

$$\Omega = 2\pi f [rad/s] . \quad (2.26)$$

2.3. Representação Complexa

As funções harmônicas podem ser representadas na forma complexa:

$$\boxed{f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t} + F^*(\Omega)e^{-i\Omega t}} \quad (2.27)$$

Onde $F(\Omega)$ é a amplitude complexa de $f(t)$, $F^*(\Omega)$ é o complexo conjugado de $F(\Omega)$. Utilizando o Teorema de Euler, dado por:

$$e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t \quad (2.28)$$

$$e^{-i\Omega t} = \cos \Omega t - i \sin \Omega t . \quad (2.29)$$

Mostra-se que:

$$\cos \Omega t = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \quad (2.30)$$

$$\sin \Omega t = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} . \quad (2.31)$$

Partindo da equação (2.9) e utilizando as relações (2.28) e (2.29) pode-se relacionar a equação (2.27) com (2.9). Assim, a relação entre A(Ω) e B(Ω) com F(Ω) pode ser obtida.

$$f(t) = A(\Omega) \left[\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right] + B(\Omega) \left[\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right] \quad (2.32)$$

$$f(t) = \left[\frac{A(\Omega) - iB(\Omega)}{2} \right] e^{i\Omega t} + \left[\frac{A(\Omega) + iB(\Omega)}{2} \right] e^{-i\Omega t} \quad (2.33)$$

$$f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t} + F^*(\Omega)e^{-i\Omega t} \quad (2.34)$$

Comparando (2.33) com (2.27) a amplitude complexa é definida por:

$$\boxed{F(\Omega) = \frac{A(\Omega) - iB(\Omega)}{2}} \quad (2.35)$$

$$\boxed{F^*(\Omega) = \frac{A(\Omega) + iB(\Omega)}{2}} \quad (2.36)$$

Lembrando que F(Ω) é conhecida como **amplitude complexa de f(t)**. Pela equação (2.37) podemos afirmar que o módulo da amplitude complexa de f(t) é a metade do valor do pico e é um *número real*. Isto tem sentido físico matemático e será discutido mais adiante.

$$|F(\Omega)| = \frac{\sqrt{A^2(\Omega) + B^2(\Omega)}}{2} = \frac{P(\Omega)}{2} \quad (2.37)$$

Analisando agora o argumento de F(Ω), função complexa, $\varphi_f(\Omega)$, chega-se à conclusão que este é igual à defasagem do sinal. Para isto parte-se da seguinte relação:

$$F(\Omega) = |F(\Omega)|e^{i\varphi_F(\Omega)} \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é possível, pois F(Ω) é complexo. Sendo assim, F(Ω) pode ser representado através do seu módulo e fase, ou, ainda, da seguinte forma:

$$F(\Omega) = |F(\Omega)|[\cos \varphi_F(\Omega) + i \sin \varphi_F(\Omega)] \quad (2.39)$$

$$= |F(\Omega)| \cos \varphi_F(\Omega) + i|F(\Omega)| \sin \varphi_F(\Omega) . \quad (2.40)$$

Introduzindo a equação (2.38) na definição de f(t) por exponenciais complexas é possível chegar à seguinte relação:

$$f(t) = |F(\Omega)| \left(e^{i(\Omega t + \varphi_f(\Omega))} + e^{-i(\Omega t + \varphi_f(\Omega))} \right) \quad (2.41)$$

$$= 2|F(\Omega)| \cos(\Omega t + \varphi_f(\Omega)) \quad (2.42)$$

$$= P(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi_f(\Omega)). \quad (2.43)$$

Comparando as equações (2.43) e (2.38) observa-se que:

$$\boxed{\varphi_f(\Omega) = \varphi(\Omega)}. \quad (2.44)$$

Podemos então concluir que:

“A função $F(\Omega)$ possui informação do *valor pico*, da *fase* e da *frequência* do sinal harmônico $f(t)$. Isto é, $F(\Omega)$ tem todas as informações do sinal, descrevendo-o completamente. $F(\Omega)$ é a representação de $f(t)$ no *domínio da frequência*.”

2.4. Extensão para o domínio da frequência

Fisicamente, a frequência Ω é uma grandeza positiva ($\Omega > 0$). Porém, é possível introduzir matematicamente o conceito de variável $\Omega \leq 0$. Ao fazer isso, pode ser apresentada uma *notação* muito mais poderosa e flexível para sinais, como pode ser visto a continuação.

Considere-se que:

- $A(\Omega)$ é uma função par, isto é $A(-\Omega) = A(\Omega)$;
- $B(\Omega)$ é uma função ímpar, isto é $B(-\Omega) = -B(\Omega)$;
- Assume-se que $B(0) \approx 0$.

Assim, a amplitude complexa $F(-\Omega)$ será:

$$F(-\Omega) = \frac{1}{2} [A(-\Omega) - iB(-\Omega)] = \frac{1}{2} [A(\Omega) + iB(\Omega)] \quad (2.45)$$

$$F(-\Omega) = F^*(\Omega) \quad (2.46)$$

Portanto, $F(\Omega)$ é uma *função Hermitiana* em relação à frequência. Isto é, seu módulo é par e sua fase é ímpar.

$$F(0) = \frac{A(0)}{2} \text{ e } B(0) = 0 \quad (2.47)$$

2.4.1. Módulo de $F(\Omega)$ é par

É fácil mostrar que o módulo de $F(\Omega)$, para $\Omega > 0$, e o módulo de $F^*(\Omega)$, para $\Omega \leq 0$, são iguais. Assim como $|F(\Omega)| = |F(-\Omega)| = |F^*(\Omega)|$ então o gráfico do $|F(\Omega)|$, no domínio da frequência, é **par**.

2.4.2. Fase de $F(\Omega)$ é ímpar

Recordas que $B(\Omega)$ é uma função par já que $P(\Omega) = \sqrt{A^2(\Omega) + B^2(\Omega)}$ então $P(-\Omega) = P(\Omega)$.

Também é certo que

$$B(\Omega) = -P(\Omega) \sin \varphi(\Omega) \quad (2.48)$$

e que

$$B(-\Omega) = -P(-\Omega) \sin \varphi(-\Omega). \quad (2.49)$$

Como $B(\Omega)$ é ímpar e $P(\Omega)$ é par na frequência, então:

$$B(\Omega) = P(\Omega) \sin \varphi(-\Omega) \quad (2.50)$$

Considerando as equações (2.48) e (2.50), conclui-se que:

$$\boxed{\varphi(-\Omega) = -\varphi(\Omega)}, \quad (2.51)$$

O que leva a assegurar que a fase de $F(\Omega)$ deve ser uma função ímpar.

Representando a amplitude complexa $F(\Omega)$ através de seu módulo e fase:

$$F(\Omega) = |F(\Omega)|e^{i\varphi_f(\Omega)} \quad (2.52)$$

Conclui-se que $|F(\Omega)|$ é par e a sua fase $\varphi(\Omega)$ é ímpar. Portanto, $F(\Omega)$ é Hermitiana.

Em forma geral, uma função harmônica pode ser representada por:

$$f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t} + F(-\Omega)e^{-i\Omega t}; \forall \Omega \quad (2.53)$$

ou

$$f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t} + F(-\Omega)e^{-i\Omega t} + F(0); \Omega \neq 0 \quad (2.54)$$

Definindo:

$$\Omega_j \triangleq \Omega$$

$$\Omega_{-j} \triangleq -\Omega$$

$$\Omega_0 \triangleq 0$$

a função harmônica pode ser descrita através de:

$$f(t) = \sum_{j=-1}^1 F(\Omega_j) e^{i\Omega_j t}, \text{ sendo } F(0) = \frac{A(0)}{2}. \quad (2.55)$$

No caso em que o sinal, seja de excitação ou resposta, possua vários harmônicos, a sua representação será:

$$f(t) = \sum_{j=-n}^n F(\Omega_j) e^{i\Omega_j t}$$

(2.56)

Exercício: Seja o sinal harmônico $f(t)$:

$$f(t) = 5 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Encontre as funções equivalentes a $f(t)$ nas formas (2.9), (2.11) e (2.34).

Solução: De acordo com as equações (2.15) e (2.16), temos:

$$A(\Omega) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (2.57)$$

$$B(\Omega) = -5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (2.58)$$

Logo a função na forma (2.9) é:

$$f(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos(2t) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{sen}(2t)$$

Para encontrar a função na forma (2.11) basta somar $\frac{\pi}{2}$ ao ângulo de fase da função inicial.

$$f(t) = 5 \text{sen}\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Das equações (2.35) e (2.36) temos que:

$$F = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$$

$$F^* = \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{4} i$$

2.5. Espectro

Define-se espectro de um sinal ao módulo deste no domínio da frequência:

$$E(\Omega) = |F(\Omega)|$$

(2.59)

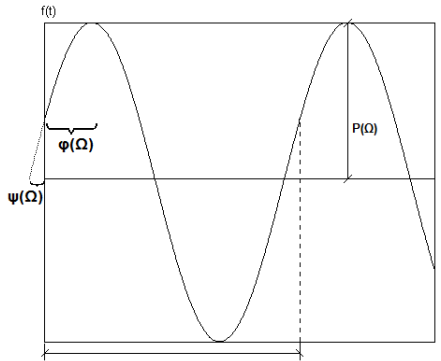
O espectro de um sinal é par em frequência, como foi visto.

Exercício 1: Seja o sinal harmônico $f(t)$:

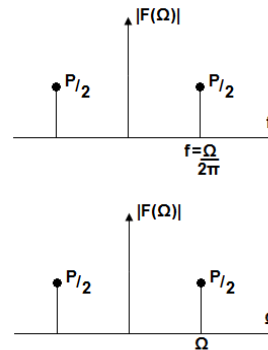
$$f(t) = P(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi(\Omega))$$

Representar graficamente no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Solução:



$$f = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}; P(\Omega) = P$$



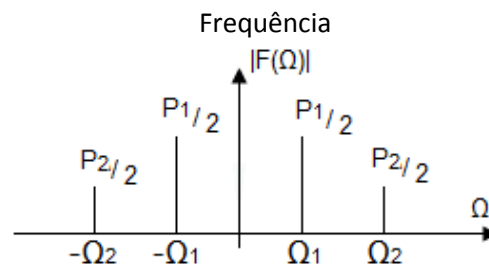
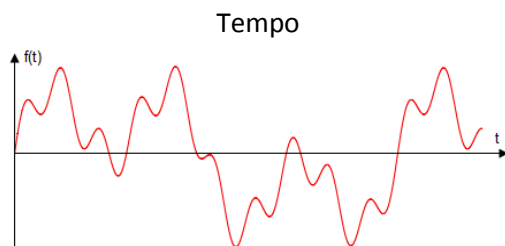
Exercício 2: Soma de dois sinais harmônicos, $f_1(t) + f_2(t)$

Seja: $f_1(t) = P_1(\Omega) \cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$ e $f_2(t) = P_2(\Omega) \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$ com $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$f(t) = P_1(\Omega) \cos \Omega_1 t + P_2(\Omega) \cos \Omega_2 t$$

$$\Omega_1 = 2\pi f_1 \text{ e } \Omega_2 = 2\pi f_2$$

Solução:



Na frequência:

$$f(t) = \sum_{-2}^2 F(\Omega_j) e^{i\Omega_j t}; \quad F(0) = \frac{A(0)}{2} = 0$$

2.6. Potência e Energia de um sinal

Observando vários exemplos físicos, notam-se como os sinais representam uma grande variedade de fenômenos.

Em muitos casos estes sinais estão diretamente relacionados com quantidades físicas como energia e potência do sistema.

Exemplo: Seja $v(t)$ e $i(t)$ a diferença de potencial e a corrente de um circuito elétrico que possui uma resistência de 1Ω .

A potência dissipada instantânea será:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$$

A energia total sobre o intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é definida como:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt$$

e a potência média nesse intervalo será:

$$P = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)dt$$

se $R = 1 \rightarrow E = \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt$ com $T = t_2 - t_1$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt$$

O que mostra a relação intrínseca entre a grandeza $v(t)$ com a energia e a potência do sistema.

Devido a este fato e outros similares foi generalizada a terminologia **energia e potência de um sinal contínuo** $x(t)$.

Assim a energia de um sinal qualquer no intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

e a energia em todo intervalo de tempo $(-\infty, +\infty)$.

$$E_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.60)$$

A potência do sinal é definida como:

$$P = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.61)$$

Exemplo: Casos comuns

- $E_\infty < \infty \rightarrow P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$

Sinais Transitórios

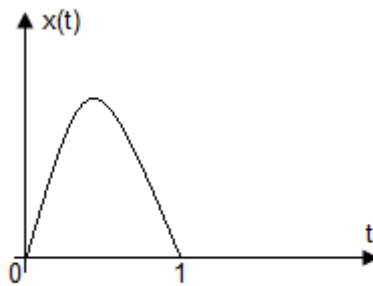


Gráfico 1 – Energia finita – Potência nula

- $E_\infty = \infty \rightarrow P_\infty > 0$

Sinais do tipo

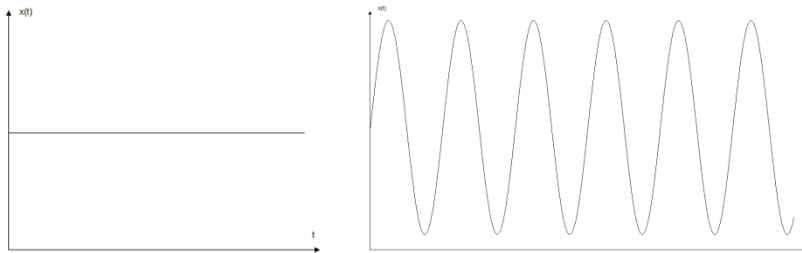


Gráfico 2 - Energia infinita - Potência finita

- $P_\infty = \infty \rightarrow E_\infty = \infty$

Sinais do tipo

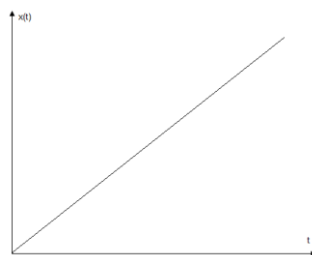


Gráfico 3 - Potência infinita - Energia infinita

Exercício: Calcular a energia infinita E_∞ e a potência P_∞ de um sinal periódico harmônico.

$$x(t) = \sin \Omega t; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

2.7. Série de Fourier

Seja uma função periódica com período T , $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, o Teorema de Fourier afirma que essa função periódica pode ser representada através de uma série de funções harmônicas:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(\Omega_j) e^{i\Omega_j t} \quad (2.62)$$

Onde $\Omega_j = j\Omega_1$ com $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e

$$F(\Omega_j) = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-i\Omega_j t} dt \quad (2.63)$$

A equação (2.61) pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados da equação (2.60) por $e^{-i\Omega_n t}$ e integrando-se em um período de tempo T .

Assim:

$$\int f(t) e^{-i\Omega_n t} dt = \int \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(\Omega_j) e^{i(\Omega_j - \Omega_n) t} dt$$

$$\int f(t) e^{-i\Omega_n t} dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(\Omega_j) \int e^{i(j-n)\Omega_1 t} dt$$

Como:

$$\int e^{i(j-n)\Omega_1 t} dt = T \text{ para } j = n$$
$$\int e^{i(j-n)\Omega_1 t} dt = 0 \text{ para } j \neq n$$

Então:

$$\int f(t) e^{-i\Omega_n t} dt = F(\Omega_n) T$$

ou

$$F(\Omega_n) = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-i\Omega_n t} dt \quad (2.64)$$

A equação (2.62) permite calcular a amplitude complexa associada ao n-ésimo harmônico.

Se $\Omega_0 = 0$, temos:

$$F(0) = \frac{1}{T} \int f(t) dt \quad (2.65)$$

Que é conhecido como valor médio de $f(t)$.

Quando uma função periódica é representada por uma Série de Fourier, pode-se observar um comportamento anômalo. O *Gráfico 6* mostra uma onda quadrangular e sua representação por Série de Fourier usando números diferentes de termos. À medida que o número de termos (n) aumenta, pode-se perceber que a aproximação melhora em todos os lugares, exceto na vizinhança da descontinuidade. Neste caso, o desvio em relação à verdadeira forma da onda estreita-se cada vez mais, porém não diminui em relação à amplitude. Esse fenômeno é conhecido como **Fenômeno de Gibbs**.

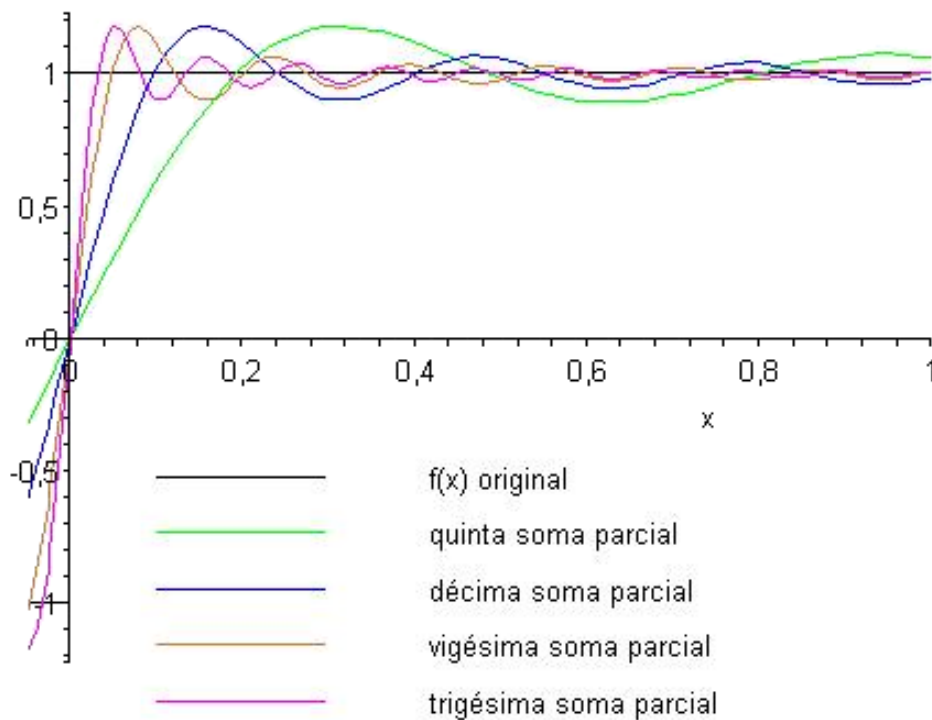


Gráfico 4 - Fenômeno de Gibbs

NOTA: A série de Fourier representa a potência do sinal periódico e nos diz em que frequência o sinal carrega energia e em quais frequências o sinal não carrega energia. Obviamente, estas frequências são múltiplos inteiros da frequência fundamental, Ω_1 .

2.7.1. Espectro de Fourier

Define-se espectro de Fourier, assim como em exponenciais complexas, por:

$$E(\Omega) = |F(\Omega_j)|, j = 0,1,2, \dots \quad (2.66)$$

Como $F(\Omega)$ é Hermitiana $\rightarrow E(\Omega)$ é simétrico (par). O espectro de Fourier (da Série de Fourier) é discreto.

No gráfico abaixo se mostra um espectro típico da série de Fourier.

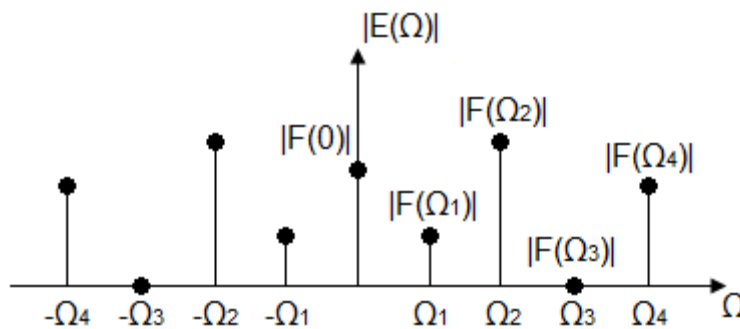


Gráfico 5 - Espectro de Fourier

A maioria das funções periódicas de interesse em engenharia pode ser representada por Série de Fourier.

NOTA: Em geral, toda função que cumpre com as leis de Dirichlet possuem representação por Série de Fourier.

- **Condição 1:** Em qualquer período $x(t)$ deve ser absolutamente integrável.

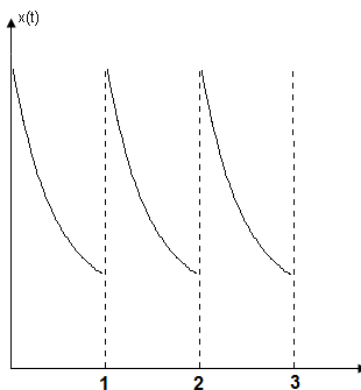


Gráfico 6 - Função não integrável

$$\int |x(t)| dt < \infty$$

- **Condição 2:** Em qualquer período não pode existir um número infinito de máximos e mínimos.

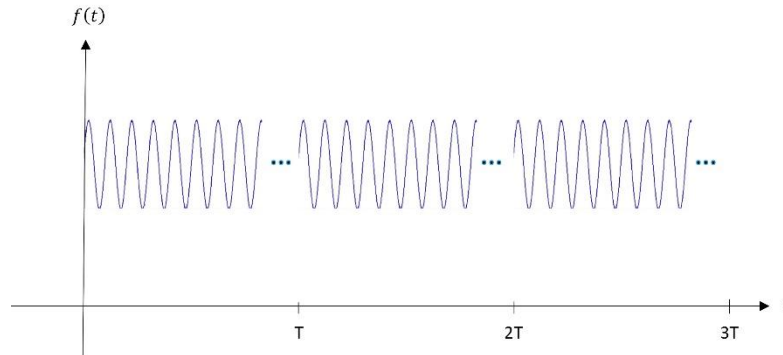


Gráfico 7 - Número infinito de máximos e mínimos

- **Condição 3:** O número de descontinuidades não pode ser infinito em qualquer período

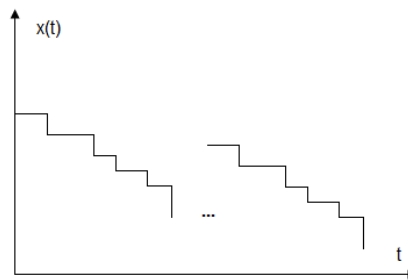


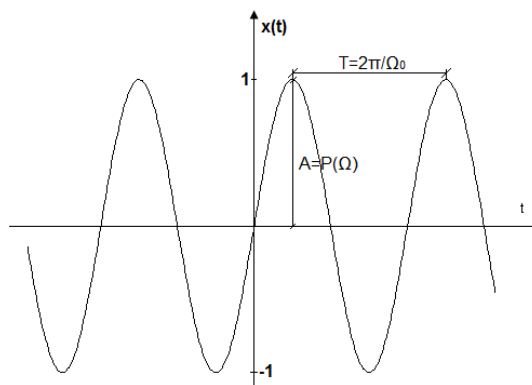
Gráfico 8 - Número infinito de descontinuidades

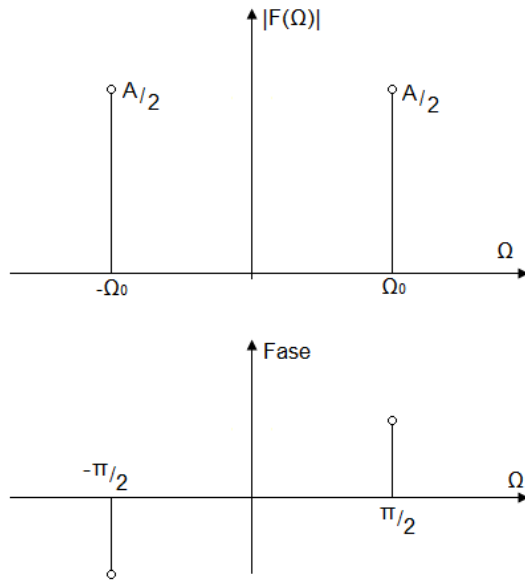
Exemplo:

a) $x(t) = \sin \Omega_0 t$; seja Ω_0 : frequência fundamental.

Sabe-se que $\sin \Omega_0 t = \frac{1}{2i} e^{i\Omega_0 t} - \frac{1}{2i} e^{-i\Omega_0 t}$

$$F(\Omega_1) = \frac{1}{2i} \quad F(-\Omega_1) = F^*(\Omega_1) = -\frac{1}{2i} \quad F(0) = 0$$





Exemplo: Seja $f(t)$ um sinal dado pela figura abaixo, de período T :

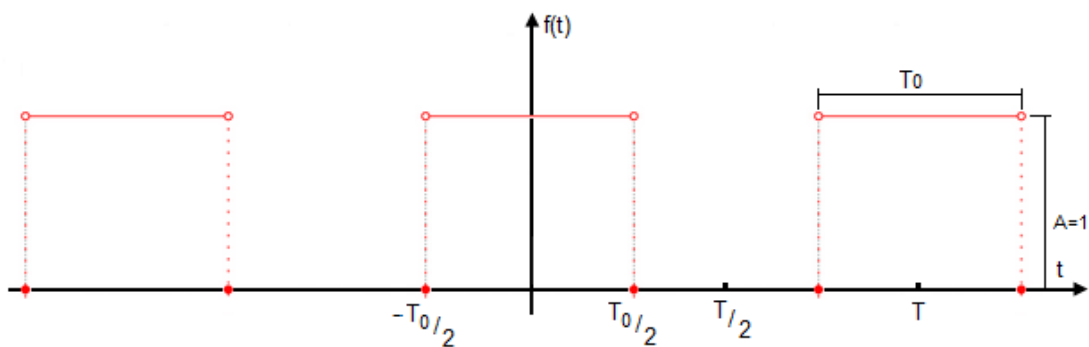
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < T_0/2 \\ 0 & \text{se } T_0/2 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Seja $T = mT_0$. Como $f(t)$ é periódica, pode ser representado por Série de Fourier:

$$f(t) \cong \sum_{-r}^r F(\Omega_r) e^{i\Omega_r t}$$

"=" quando $r = \infty$;

"~" quando $r < \infty$;



Sendo

$$F(\Omega_r) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\Omega_r t} dt = \frac{A}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-i\Omega_r t} dt = \frac{A}{T} \frac{e^{-i\Omega_r t}}{-i\Omega_r} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-i\Omega_r \frac{T_0}{2}} - e^{i\Omega_r \frac{T_0}{2}}}{-i\Omega_r} \right]$$

$$F(\Omega_r) = \frac{2A \sin \Omega_r T_0/2}{T \Omega_r} = \frac{2A}{T} \frac{\sin \Omega_r T_0/2}{\Omega_r T_0/2}$$

$$F(\Omega_r) = \frac{A \sin \Omega_r T_0/2}{m \Omega_r T_0/2}$$

Seja $\Omega_r = \frac{2\pi}{T}$, então:

$$F(\Omega_r) = \frac{A \sin r \pi/m}{m r \pi/m}, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

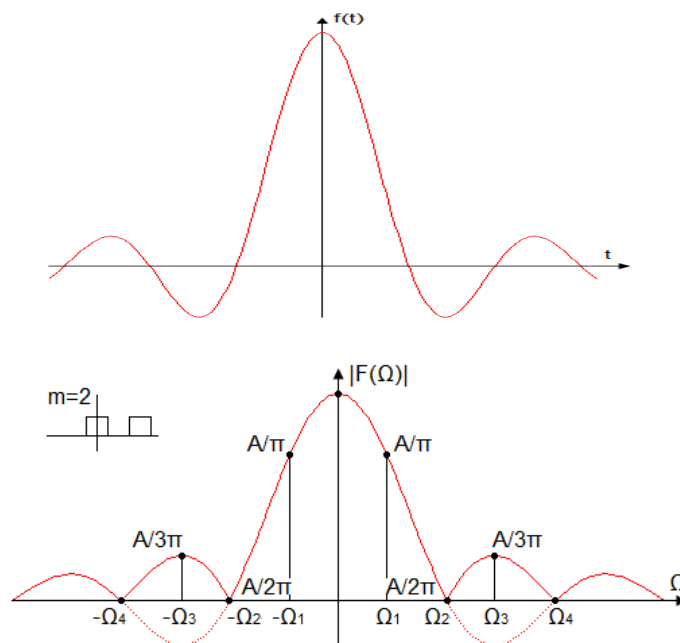
Como $f(t)$ é par, então $F(\Omega_r)$ é real.

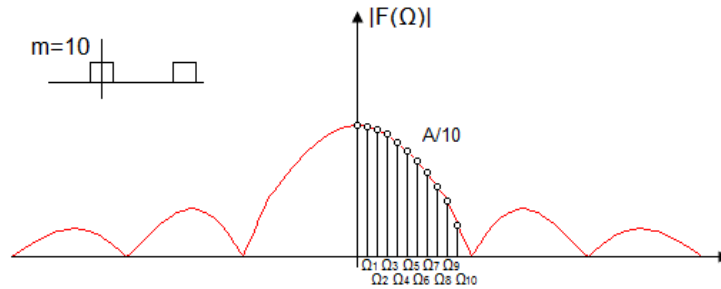
$$F(0) = \frac{A \sin 0}{m \cdot 0}$$

Aplicando L'Hopital para resolver a indeterminação:

$$F(0) = \lim_{r \rightarrow 0} A/m \frac{\cos r \pi/m}{r \pi/m} r \pi/m = \frac{A}{m}$$

A função $\frac{\sin x}{x}$ tem a seguinte forma:





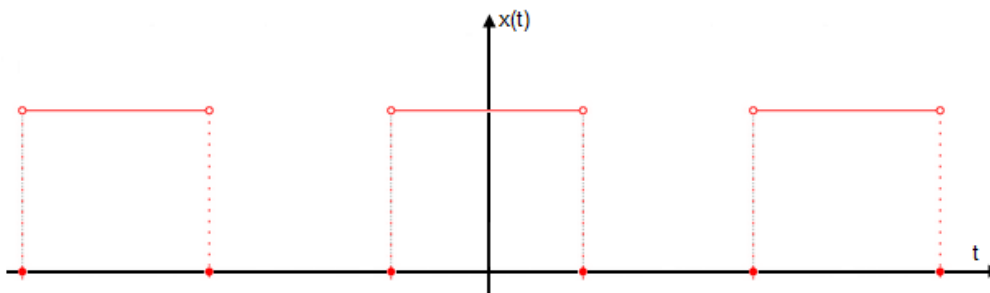
NOTA: Quanto maior é o “m”, maior é “T” a $T_0 = cte$, o número de linhas espectrais é maior.

$$T \uparrow \quad \Omega_1 \downarrow$$

Por outro lado, a altura das linhas se redizem a medida que $m \uparrow$, a medida que T aumenta, já que o espectro é função de $1/m$.

Exercício: Série de Fourier

Achar os coeficientes da Série de Fourier da seguinte função periódica:



$$x(t) = \begin{cases} 1; & |t| < T_1 \\ 0; & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$A = 1$$

A frequência do sinal periódico é $\Omega = 2\pi/T$. O período está relacionado com T_1 pela equação $T = mT_1$.

Considerar $T_1 = 0,1$ segundos e $m = 2, 10$ e 20 .

- Graficar o espectro de Fourier para os diferentes valores de “m”;
- Graficar o sinal obtido através da Série de Fourier no domínio do tempo. Considerar os três casos ($m \neq$);
- Explicar o fenômeno de Gibbs;
- Graficar $F(\Omega)$ em função de Ω para diferentes valores de “m”.

2.8. Teorema de Parseval

O valor médio quadrático de uma função periódica $f(t)$ com período T , é igual a soma dos valores médios quadráticos dos componentes harmônicos.

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int f^2(t) dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(\Omega_j)|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{P^2(\Omega_j)}{2} \quad (2. \text{Erro! Indicador não definido.})$$

Demonstração:

$$f^2(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega_j) F(\Omega_k) e^{i(\Omega_j + \Omega_k)t}$$

Isolando os termos de $j = -k$ ($\Omega_j = -\Omega_k$):

$$f^2(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(\Omega_j)|^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega_j) F(\Omega_k) e^{i(\Omega_j + \Omega_k)t}$$

Integrando ambos os lados da equação anterior em um período, e lembrando que:

$$\int e^{i(\Omega_j + \Omega_k)t} dt = 0 \text{ para } j \neq -k \text{ em um período}$$

e

$$\int |F(\Omega_j)|^2 dt = T |F(\Omega_j)|^2$$

$$\int f^2(t) dt = T \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(\Omega_j)|^2 \text{ c. q. d.}$$

Se $f(t)$ é uma tensão aplicada a uma resistência de 1Ω , o valor médio quadrático representa a potência dissipada.

Da equação anterior, é possível determinar a potência de um sinal no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A função $|F(\Omega_j)|^2$, com $F(\Omega)$ amplitude complexa da série de Fourier (nula em $\Omega \neq j\Omega_1$), se denomina "**Densidade Espectral de Potência**".

"A Série de Fourier preserva a potência de um sinal periódico.
Como foi visto, a potência do sinal periódico de $-\infty, +\infty$ é finita."

NOTA 1: É importante ressaltar que a medida que o período de um sinal periódico aumenta, o espectro de Fourier diminui em amplitude, as linhas espectrais aumentam em densidade (se

juntam porque quando T aumenta Ω_1 diminui e Ω_1 é a distância entre duas linhas espectrais). A forma do espectro (envolvente) permanece inalterável.

NOTA 2: Qual é a vantagem de decompor um sinal periódico em Série de Fourier? Para responder esta pergunta deveríamos primeiro estudar sistemas lineares e respostas de sistemas lineares. Em geral, como será visto adiante, diz-se que um sistema é linear se e somente se:

$$L(e_1(t) + e_2(t)) = L(e_1(t)) + L(e_2(t)) = r_1(t) + r_2(t)$$

Onde L representa simbolicamente um operador diferencial que representa o sistema:

$$L(e(t)) = r(t) \text{ onde } \begin{cases} e(t) = \text{excitação} \\ r(t) = \text{resposta} \end{cases}$$

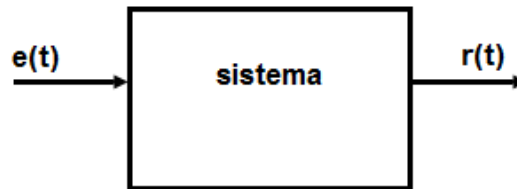
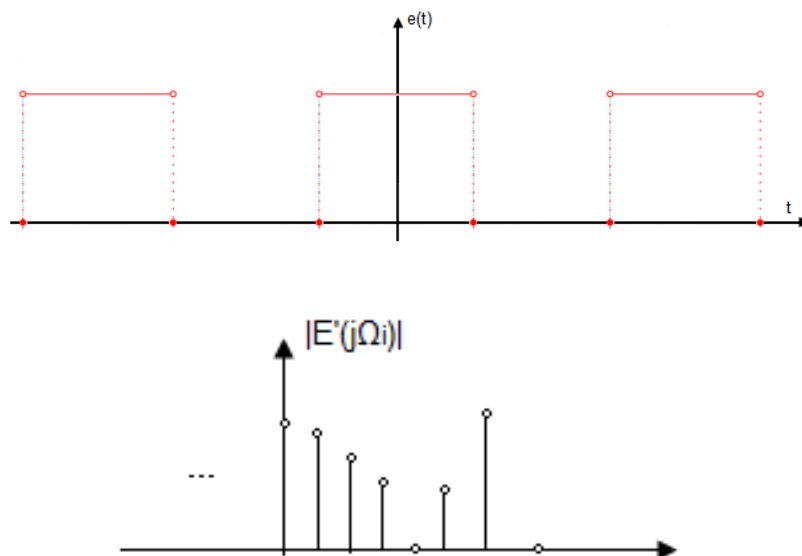


Imagem 5 - Representação do sistema

Se $e(t)$ é um sinal periódico, independente da forma que este sinal, pode ser representado por uma série de funções harmônicas $[e_1'(t) + e_2'(t) + e_3'(t) + \dots]$.



A solução para com harmônico $e_1'(t)$ é relativamente simples, como será mostrado a seguir.

Seja um sistema elétrico ou mecânico cujo modelo físico é representado por um sistema simples de um grau de liberdade.

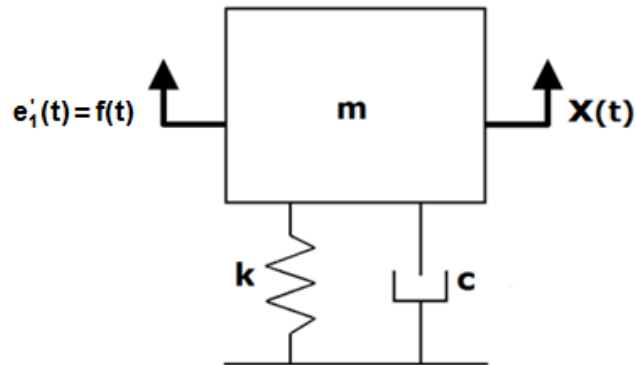


Imagem 6 - Sistema com um grau de liberdade

Este modelo poderia representar um sistema físico real como um circuito elétrico RLC ou a suspensão de um carro.

Aceitando, por enquanto, que a equação que governa este movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) = e_1'(t)$$

Como $f(t)$ é harmônico $f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t}$

$$\begin{aligned} x(t) &= X(\Omega)e^{i\Omega t} \\ \dot{x}(t) &= i\Omega X(\Omega)e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}(t) &= -\Omega^2 X(\Omega)e^{i\Omega t} \end{aligned}$$

$$[-\Omega^2 m + i\Omega c + k]X(\Omega)e^{i\Omega t} = F(\Omega)e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}} \quad (2.67)$$

Conhecido $X(\Omega)$ para $e_1'(t)$, calcula-se $x(t)$

$$x(t) = X(\Omega)e^{i\Omega t} \quad (2.68)$$

Fazendo esta análise para os diferentes $e_1'(t)$ e supondo os resultados, poderia se achar a resposta de um sistema a qualquer excitação periódica.

3. Transformada de Fourier

Se a função não é periódica será que é possível encontrar uma representação no domínio dessa função? Será que existe o espectro dessa função?

Quando estudamos a função periódica do tipo portão com Série de Fourier, observamos que:

- Esta função periódica se transforma em uma função portão não periódica (transitória) quanto $T \rightarrow \infty$.
- À medida que T aumenta, as linhas espectrais da Série de Fourier se aproximam (o número das linhas espectrais no domínio da frequência aumenta), mas a envolvente do espectro permanece invariável. Isso acontece porque $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Se T aumenta, Ω_1 diminui, e com ela $\Omega_2 = 2\Omega_1$, $\Omega_3 = 3\Omega_1$, ... (A distância entre duas linhas espectrais é Ω_1).
- Por outro lado, à medida que T aumenta, o espectro diminui e, no limite, se $T \rightarrow \infty$ este espectro desapareceria, o que não seria conveniente.

Mostra-se que tomando o produto

$$F(\Omega_j)T = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\Omega_j t} dt \quad (3.1)$$

se existir a integral acima, o resultado será distinto de zero quando $T \rightarrow \infty$ (evolvente).

Podemos demonstrar esse fenômeno da seguinte forma:

Se $T \rightarrow \infty$, $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ tende para zero. Logo $j\Omega_1 \rightarrow \Omega$ (onde Ω é uma variável contínua), $j=1, 2, 3, \dots, \infty$.

Assim quando aplicamos o limite quando $T \rightarrow \infty$, temos:

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow \infty} F(j\Omega_1)T = F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\Omega t} dt} \quad (3.2)$$

Se esta integral existe, a expressão acima recebe o nome de **Transformada de Fourier (TF)**.

A Transformada de Fourier dará o espectro do sinal $|F(\Omega)|$ para um sinal que não é periódico. Para um sinal periódico, como veremos, a TF não existe e a integral acima não converge para um valor finito. Estes sinais tem energia infinita e como veremos a TF preserva a energia, ao contrário da série de Fourier que preserva a potência.

A Transformada de Fourier existe quando o sinal é absolutamente convergente, ou seja:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty} \quad (3.3)$$

Qualquer sinal periódico, $E_{\infty} = \infty$, não será absolutamente convergente.

A Transformada de Fourier ao contrário da Série de Fourier, é uma função contínua na frequência.

Será que a partir do sinal no domínio da frequência é possível recuperar o sinal no domínio do tempo?

Se partirmos da definição da Série de Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)e^{i\Omega_1 j t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)e^{ij\Omega_1 t} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)T e^{ij\Omega_1 t} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)T e^{ij\Omega_1 t} \Omega_1
 \end{aligned}$$

já que $T = \frac{2\pi}{\Omega_1}$.

Como o espaçamento entre as linhas espectrais é $\Omega_1 \rightarrow \Omega_1 = \Delta \Omega$.

Logo,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)T e^{ij\Omega_1 t} \Delta \Omega$$

tomando o

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} F(j\Omega_1)T &\rightarrow F(\Omega) \\
 j\Omega_1 &\rightarrow \Omega \\
 \Delta \Omega &\rightarrow d\Omega \\
 \Sigma &\rightarrow \int
 \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (3.4)$$

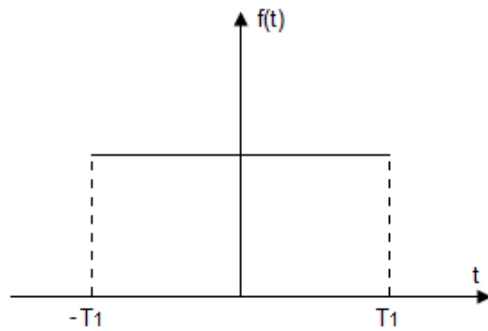
Se esta integral existir, a equação acima recebe o nome de **Transformada Inversa de Fourier**.

Assim, o par de Fourier é dado por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega \quad (3.5)$$

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\Omega t} dt$$

Exercício: Calcular a Transformada de Fourier da seguinte função:



Considerar os três casos:

- Para $A = 1$, $T_1 = 1$ s;
 - Para $A = 10$, $T_1 = 0,1$ s;
 - Para $A = 100$, $T_1 = 0,01$ s.
- a) Graficar o espectro em ambos os casos;
 b) Explicar o resultado.

3.1. Relação entre os coeficientes da Série de Fourier e a TF

Dada a função $x(t)$ abaixo:

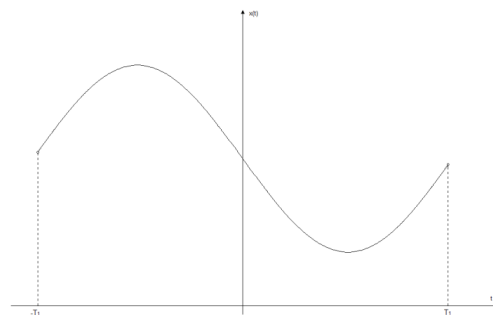


Gráfico 9 - Função $x(t)$

e a função periódica $\tilde{x}(t)$ construída a partir de $x(t)$ com período T .

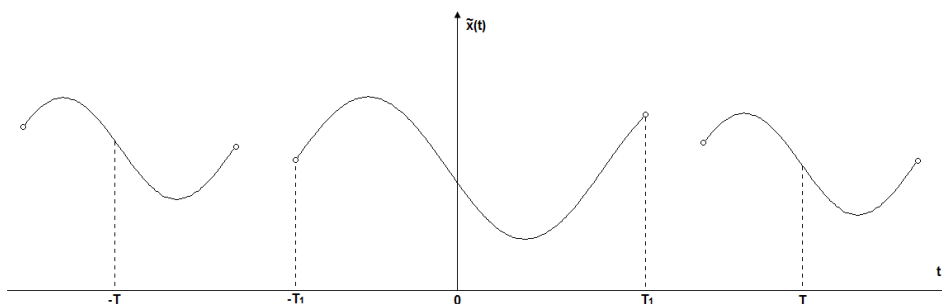


Gráfico 10 - Função $\tilde{x}(t)$

Sendo que entre $-T/2$ e $T/2$, dentro do período de $\tilde{x}(t)$ a função $\tilde{x}(t) = x(t)$.

Como $\tilde{x}(t)$ é periódica, pode ser representada por Série de Fourier.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\Omega_k) e^{ik\Omega_1 t} \text{ com } \Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

e

$$x(\Omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Coefficiente de Série de Fourier (amplitude complexa).

Como $\tilde{x}(t) = x(t)$ dentro do período $-T/2$ a $T/2$

$$X(\Omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt \quad (3.6)$$

e como $x(t)$ é nulo fora do intervalo $(-T_1, T_1)$ a equação (3.6) pode ser escrita como

$$X(\Omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt \quad (3.7)$$

A Transformada de $x(t)$ será por definição:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (3.8)$$

Quando $\Omega = k\Omega_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\boxed{X(\Omega) = \frac{1}{T} X(k\Omega_1)} \quad (3.9)$$

3.2. Teorema de Parseval

Se a $F(f(t)) = F(\Omega)$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 d\Omega \quad (3.10)$$

Demonstração: Considerando o caso mais geral $f(t)$ complexo e $f^*(t)$ complexo conjugado.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \right] dt \end{aligned}$$

Agrupando de forma conveniente as integrais:

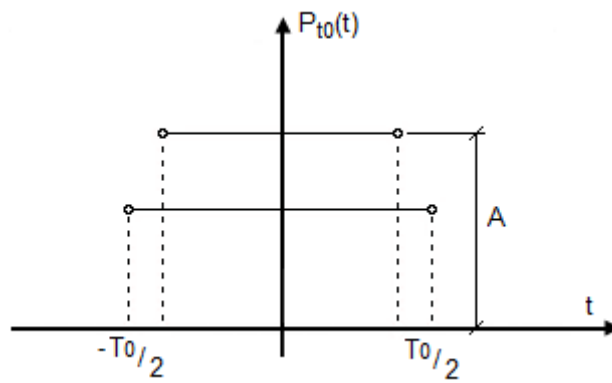
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\Omega) F(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 d\Omega$$

- O termo esquerdo da equação (3.10) é a energia total do sinal;
- A **Relação de Parseval** nos diz que: “a energia total do sinal pode ser determinada calculando a energia por unidade de tempo, no domínio do tempo ou calcular através da energia por unidade da frequência $|F(\Omega)|^2/2\pi$ e integrando sobre todas as frequências”.

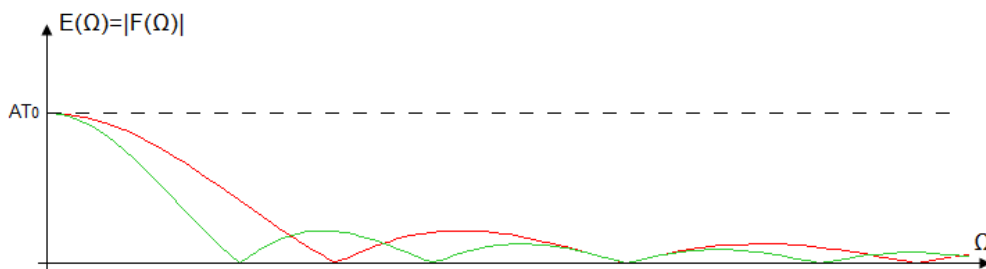
* $|F(\Omega)|^2$ é denominada **densidade espectral de energia $f(t)$**

Exemplo: Dada a função portão abaixo e definindo o impulso do sinal como

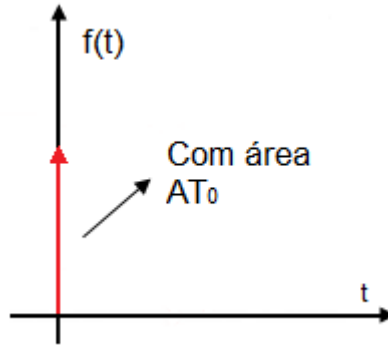


A Transformada de Fourier é dada por:

$$F(\Omega) = \Delta T_0 \frac{\sin(\Omega T_0/2)}{\Omega T_0/2} \quad (3.11)$$



Função Impulso: $\lim_{T_0 \rightarrow 0} \Delta T$ e $\Delta \rightarrow \infty$



- A função impulso tem um conteúdo harmônico uniforme em toda a faixa de frequência $(-\infty, \infty)$;
- Uma excitação ideal desta natureza provocaria ou injetaria sobre uma estrutura uma energia tal que excitaria todas as frequências com a mesma amplitude. Este fato é fundamental nos testes de impacto.

3.3. Propriedade da Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier é linear:
Se $F_1(\Omega) = F(f_1(t))$ e $F_2(\Omega) = F(f_2(t))$ e a_1 e a_2 são constantes reais, temos:

$$\begin{aligned} F(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-i\Omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\Omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\Omega t} dt \\ &= a_1 F(f_1(t)) + a_2 F(f_2(t)) \\ &= a_1 F_1(\Omega) + a_2 F_2(\Omega) \end{aligned}$$

- Propriedade de escala no tempo
Se $F(\Omega) = F(f(t))$, então

$$F(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

* Ampliando a escala do tempo se reduz a escala de frequência. E, reduzindo a escala do tempo amplia-se a escala da frequência.

Consequência: $F(f(-t)) = F(-\Omega)$

- Propriedade de escala na frequência
Se $F(\Omega) = F(f(t))$, então

$$F^{-1}(F(a\Omega)) = \frac{1}{|a|} f(t/a)$$

- Teorema do deslocamento na frequência

$$\boxed{F(f(t)e^{i\Omega_0 t}) = F(\Omega - \Omega_0)} \quad (3.12)$$

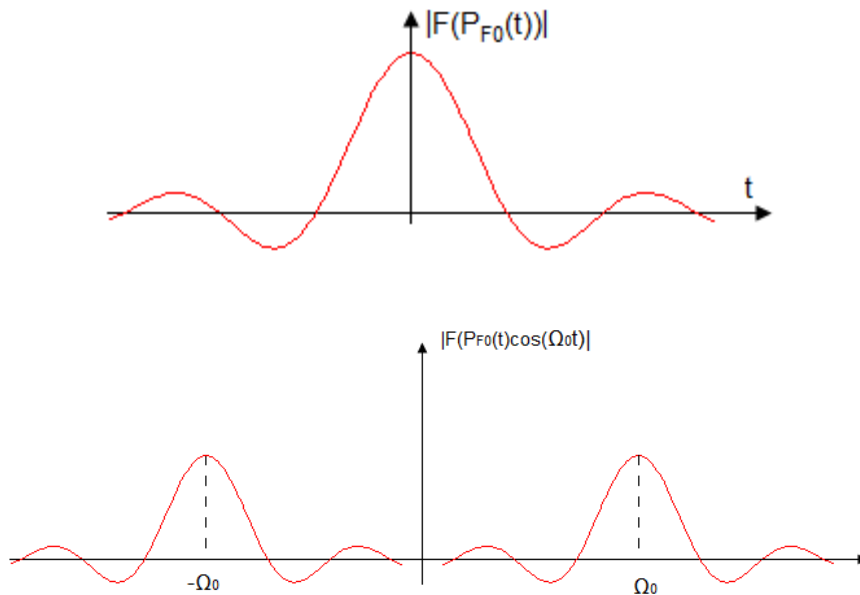
Consequência:

$$F(f(t) \cos \Omega_0 t) = \frac{1}{2}F(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2}F(\Omega + \Omega_0)$$

NOTA: Este teorema explica o conceito de amplitude modulada.

Imaginemos a função portão cujo espectro é conhecido multiplicando a função portão pelo $\cos \Omega_0 t$, o resultado é o espectro dessa função portão deslocado Ω_0 na frequência do sinal modulador $\cos \Omega_0 t$.

$$F(p_{T_0}(t) \cos \Omega_0 t) = \frac{\Delta T_0 \sin[(\Omega - \Omega_0) T_0/2]}{2 (\Omega - \Omega_0) T_0/2} + \frac{\Delta T_0 \sin[(\Omega + \Omega_0) T_0/2]}{2 (\Omega + \Omega_0) T_0/2}$$



- Dois conceitos diferentes
 - 1) Amplitude modulada: o sinal $\cos \Omega_0 t$ é o sinal modulador e $f(t)$ seria o sinal modulado;
 - 2) $\cos \Omega_0 t$ é um sinal truncado por um janela do tipo retangular. Isto é real e acontece na prática. O sinal cosseno truncado pelo sinal portão resulta em um espectro cuja energia sofre um vazamento para as frequência vizinhas. A medida que o tempo de medição aumenta, este vazamento diminui e o sinal harmônico se assemelha mais ao sinal harmônico sem truncamento, definido de $-\infty$ a $+\infty$.
- Transformada da derivada:

$$\mathcal{F}(\dot{f}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-i\Omega t} dt$$

Integrando por partes $u(t) = e^{-i\Omega t}$ e $dv(t) = \dot{f}(t)dt$

$$\mathcal{F}(\dot{f}(t)) = e^{-i\Omega t} f(t)|_{-\infty}^{\infty} + i\Omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\Omega t} dt$$

se $f(t)$ é Fourier transformada ele é absolutamente convergente em ∞ ou $-\infty$ ($f(t) \rightarrow 0$).

$$\mathcal{F}(\dot{f}(t)) = i\Omega F(\Omega)$$

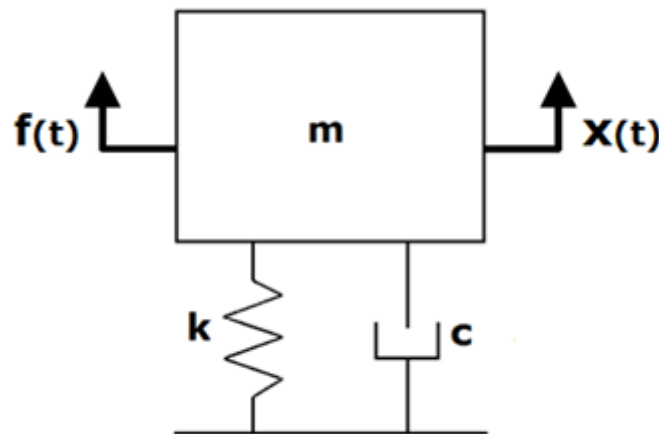
$$\mathcal{F}(\ddot{f}(t)) = -\Omega^2 F(\Omega)$$

Então:

$$\boxed{\mathcal{F}(f^n(t)) = (i\Omega)^n F(\Omega)} \quad (3.13)$$

Exemplo de aplicação:

Dado o sistema de 1 grau de liberdade abaixo:



Supondo que a equação do movimento seja:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Aplicando a TF, temos:

$$[-\Omega^2 m + i\Omega c + k]X(\Omega) = F(\Omega)$$

Independentemente de $x(t)$, é possível achar, dentro de um intervalo de tempo finito, $X(\Omega)$ e $F(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{[-\Omega^2 m + i\Omega c + k]}$$

a resposta do sistema no domínio da frequência.

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier encontra-se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$

4. Vibrações em Engenharia - Sistemas de 1 Grau de Liberdade

4.1. Introdução

Todo sistema físico real pode ser sempre modelado por um sistema de parâmetros concentrados de 1 grau de liberdade.

Exemplos:

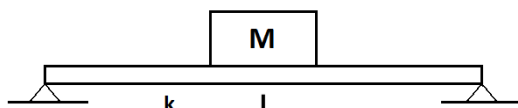


Imagem 7 - Viga bi-apoiada

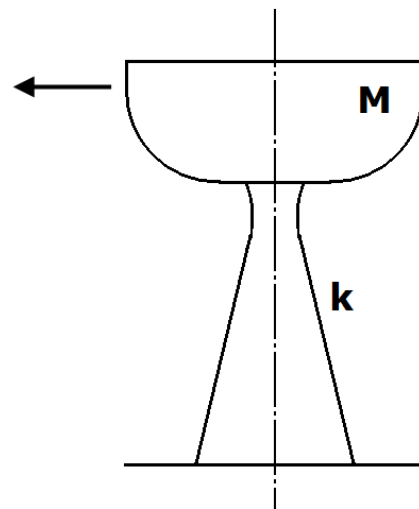


Imagem 8 - Caixa d'água

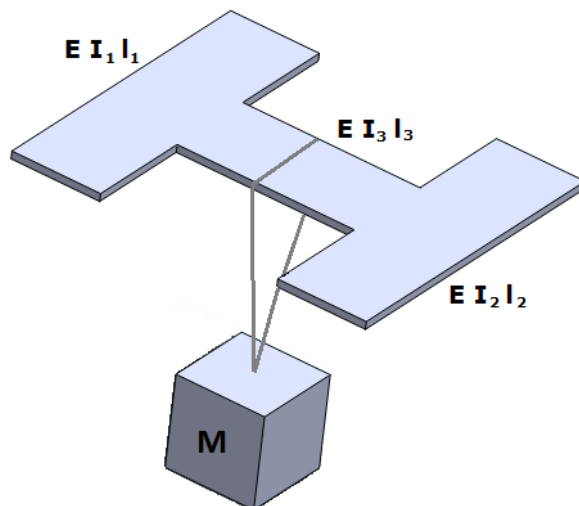


Imagem 9 - Massa suspensa

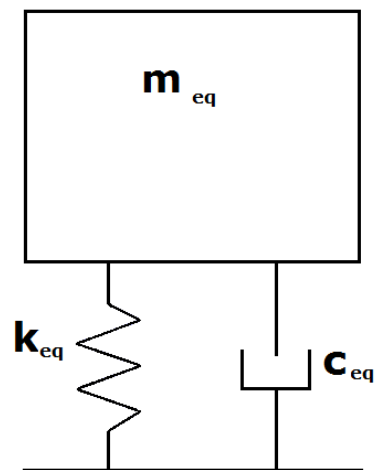


Imagem 10 - Sistema de um grau de liberdade equivalente

4.2. Molas em Série e em Paralelo

4.2.1. Paralelo

Molas em paralelo apresentam igual deslocamento, ou seja:

$$F_t = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n} \quad (4.1)$$

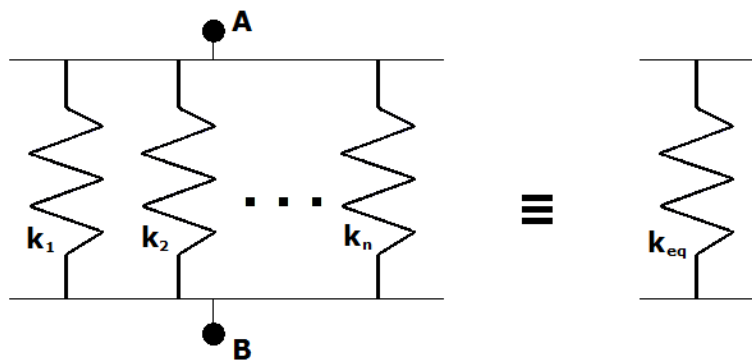


Imagem 11 - Molas em Paralelo

4.2.2. Série

Molas em série apresentam o deslocamento total igual à soma dos deslocamentos individuais:

$$F_T = F_1 = F_2 = \dots = F_n$$

$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

(4. Erro! Indicador não definido.)

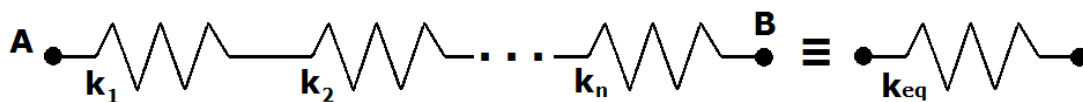
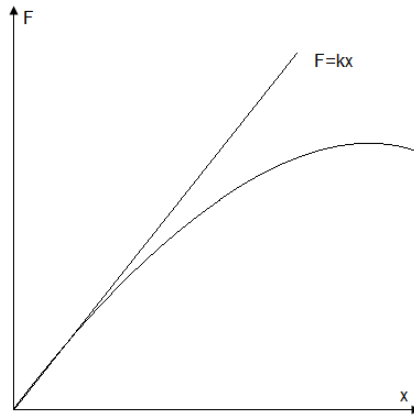


Imagem 12 - Molas em Série

Linearização:



4.3. Sistema de um grau de liberdade – Modelo matemático

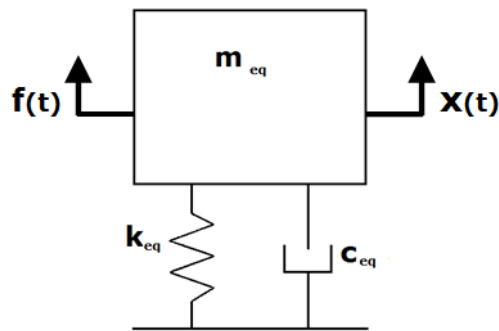


Imagem 13 - Sistema de um grau de liberdade

$$x(t = 0) = x_0$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$$

Diagrama de corpo livre:

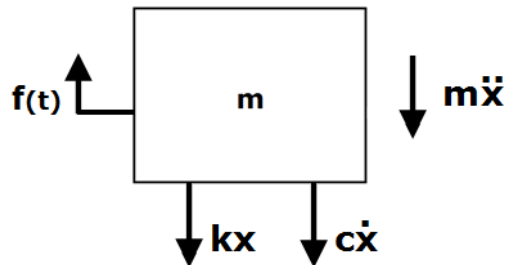


Imagem 14 - Diagrama de corpo livre

Da 2ª Lei de Newton ($\sum F = m\ddot{x}$), temos:

$$f(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

ou

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)} \quad (4.2)$$

Sujeito às condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

A solução de (4.3) será:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad (4.3)$$

Onde

$x_h(t)$ é a solução homogênea $f(t) = 0$

$x_p(t)$ é a solução permanente, devido exclusivamente a $f(t)$

a) Solução homogênea

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.4)$$

Com $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$

Supondo a solução

$$x_h(t) = e^{st}$$

e substituindo em (4.5)

$$(s^2m + cs + k)e^{st} = 0 \quad (4.5)$$

Dividindo membro a membro por $m = e^{st}$, a equação (4.6) toma a forma:

$$s^2 + 2\xi\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0 \quad (4.6)$$

Onde

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi &= \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\Omega_n} \\ \frac{c}{m} &= 2\xi\Omega_n \end{aligned}$$

A equação (4.7) é conhecida como equação característica e as raízes da mesma permitem achar a solução $x_h(t)$ (solução da homogênea).

Aplicando Bhaskara:

$$\boxed{s_{1,2} = -\Omega_n\xi \pm \Omega_n\sqrt{(\xi^2 - 1)}} \quad (4.7)$$

Assim, a resposta do sistema, resposta a $f(t) = 0$ com condições iniciais diferentes de zero, será:

$$x(t) = C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t} \quad (4.8)$$

Onde

c_1 e c_2 são constantes reais ou complexas que devem ser definidas com as condições iniciais do problema

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) &= s_1 C_1 + s_2 C_2 = v_0 \\ C_1 &= \frac{x_0 s_2 - v_0}{s_2 - s_1} \\ C_2 &= \frac{v_0 - x_0 s_1}{s_2 - s_1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dando assim, uma solução única.

Considerem-se quatro classes de solução

I) $\xi = 0$

Nesse caso, vibração não amortecida, o sistema vibra na frequência natural.

$$\ddot{x}(t) + \Omega_n^2 x(t) = 0$$

Com $x(0)=x_0$ e $\dot{x}(0)=v_0$

$$s_1 = i\Omega_n \quad s_2 = -i\Omega_n$$

Se m e k são > 0

$$x(t) = C_1 e^{i\Omega_n t} + C_2 e^{-i\Omega_n t}$$

Pelo Teorema de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos \Omega_n t + (C_1 - C_2) i \sin \Omega_n t$$

Mostra-se que $c_1 = c_2^*$

$$x(t) = x_0 \cos \Omega_n t + \frac{v_0}{\Omega_n} \sin \Omega_n t$$

Representa uma oscilação harmônica com velocidade angular ou frequência angular

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

II) $0 < \zeta^2 < 4mk$ ou $\xi < 1$

Sistema subamortecido:

$$\xi^2 - 1 < 0$$

$$s_1 = -\xi\Omega_n + i\Omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$s_2 = -\xi\Omega_n - i\Omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

A solução $x(t)$, sendo $\Omega_d = \Omega_n(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$, será:

$$x(t) = e^{-\xi\Omega_n t} [C_1 e^{i\Omega_d t} + C_2 e^{-i\Omega_d t}]$$

Considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$:

$$C_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \xi\Omega_n x_0}{2\Omega_d i}$$

$$C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \xi\Omega_n x_0}{2\Omega_d i}$$

Devido ao termo $e^{-\xi\Omega_n t} = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$, se m e s são maiores que 0, a solução será harmonicamente decrescente, com frequência Ω_d .

III) $c^2 > 4mk$ ou $\xi > 1$

Sistema superamortecido:

$$s_{1,2} = -\xi\Omega_n \pm \Omega_d i$$

$$C_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \xi\Omega_n x_0}{2\Omega_d i}$$

$$C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \xi\Omega_n x_0}{2\Omega_d i}$$

As constantes C_1 e C_2 serão reais, pois Ω_d é complexo com parte real e imaginária, neste caso.

A solução $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$ é uma função abruptamente decrescente com o tempo, caracterizando um **amortecimento supercrítico!**

IV) $c^2 = 4mk$ ou $\xi = 1$

Amortecimento crítico:

$$s_1 = s_2 = -\Omega_n$$

A solução de uma equação diferencial é dada pela forma:

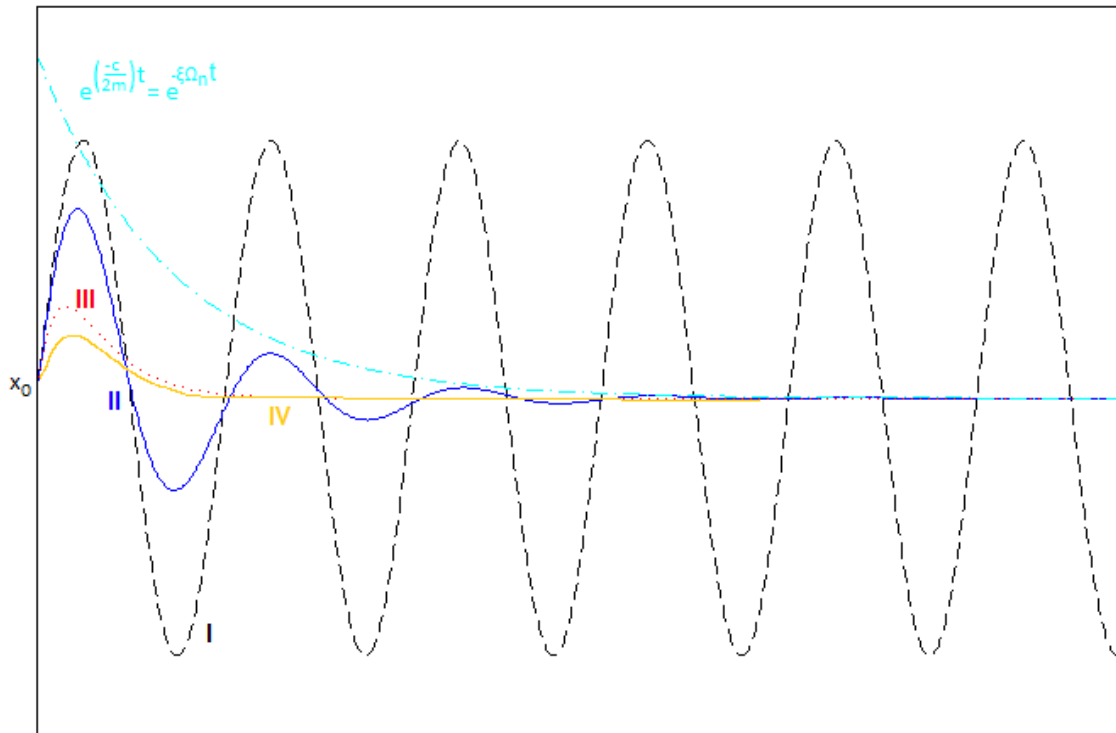
$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Mas, como $s_1 = s_2$ é necessário encontrar uma solução que seja linearmente independente de $g_1(t) = e^{s_1 t}$, a qual será dada por $g_2(t) = t e^{s_1 t}$. Assim, a solução geral será:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + t C_2 e^{s_2 t}$$

Onde $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_0 + \xi\Omega_n x_0$

Este movimento é também não periódico, decrescendo com o tempo.

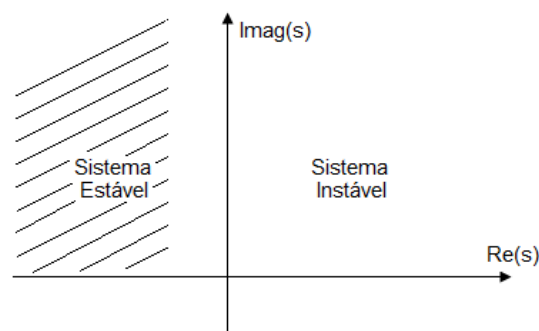


4.4. Instabilidade – Vibrações Livres

A instabilidade de um sistema é determinada a partir da parte real da raiz $s_{1,2}$.

Como pode ser observado na figura anterior, uma parte real negativa desta raiz levará a uma resposta “livre” monotonicamente decrescente.

Isto é, deslocando o sistema de sua posição de equilíbrio, deixando-o vibrar livremente, o sistema voltará a sua posição de equilíbrio. O **sistema é, portanto, estável se a parte real de s é negativa.**

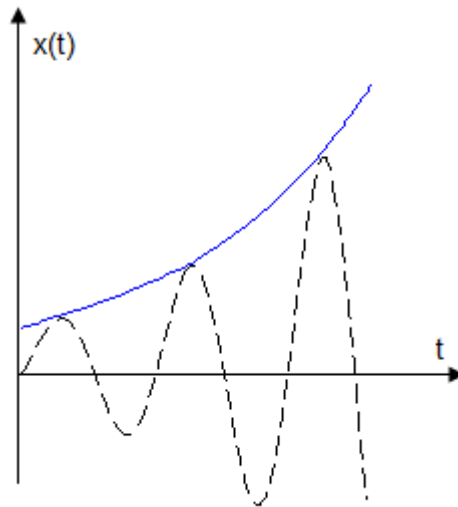


Caso em que o sistema seja instável, parte real de s é positiva. Qualquer perturbação que tire o sistema de sua posição de equilíbrio, o sistema não mais voltará monotonicamente a sua posição de equilíbrio.

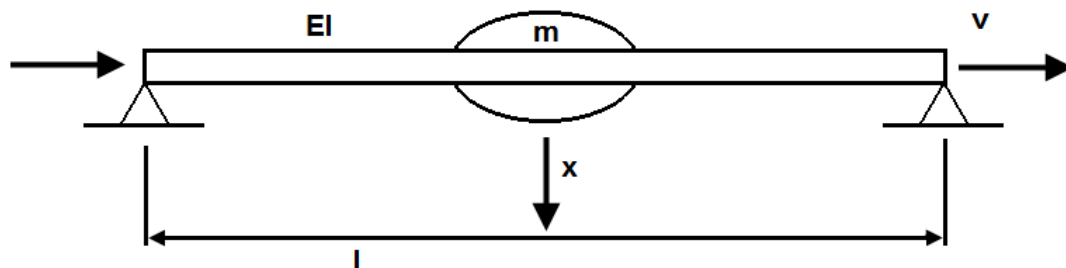
Neste caso, a envolvente $e^{\text{real}(s)t}$ fará com que a resposta do sistema, em vibração livre, aumente monotonicamente até o infinito.

A instabilidade de um sistema deve ser estudada sempre através da resposta livre, através da equação característica.

Resposta livre de um sistema instável

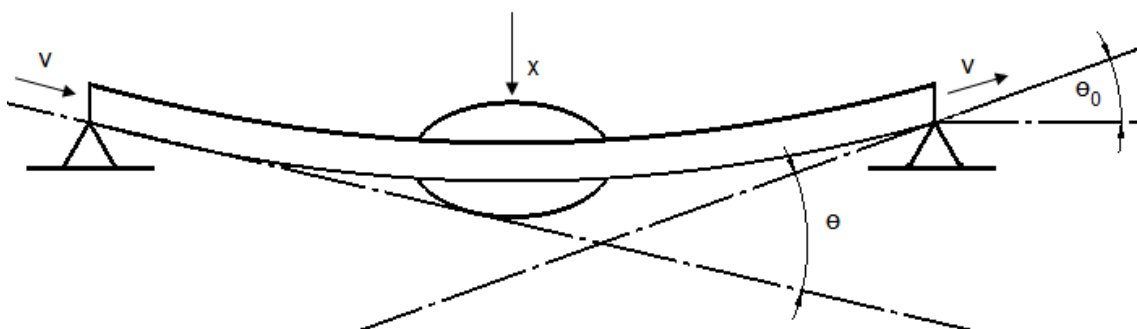


Exemplo: Seja um tubo de aço de comprimento l e rigidez flexional EI simplesmente apoiada como o mostrado na figura abaixo. Considere-se que a massa da viga é desprezível comparada com m .



Pelo interior do tubo de aço circula um fluido a uma velocidade V . Calcular a velocidade V para a qual o sistema dinâmico se torna instável.

Solução:

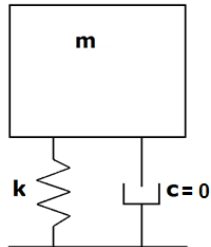


Pelo peso próprio o tubo sofre uma deflexão, sendo

$$\theta = 2\theta_0 = \frac{6s}{l}$$

* θ para qualquer valor de x

Sistema equivalente:



A mola do sistema equivalente de um grau de liberdade será dada por:

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

A força devido à ação do fluido:

$$F = 2A\rho V^2 \sin \theta_0$$

onde:

A : área da seção transversal

ρ : densidade do fluido

V : velocidade

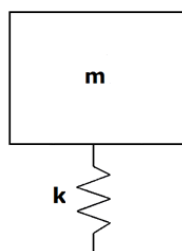
Para θ muito pequeno: $\sin \theta \approx \theta$. E, $\theta_0 = \frac{\theta}{2}$ temos:

$$F = A\rho V^2 \theta$$

Logo,

$$F = \frac{6A\rho V^2}{l} x$$

Considerando a teoria de um grau de liberdade:



$$m\ddot{x} + \left(k_{eq} - \frac{6A\rho V^2}{l} \right) x = 0$$

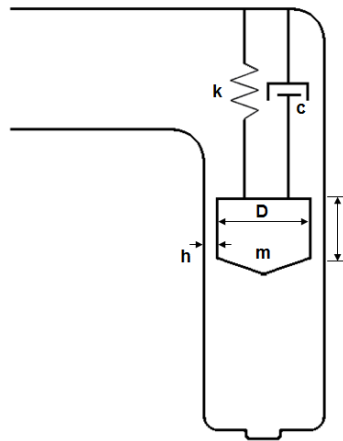
Se $\frac{6A\rho V^2}{l} > k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$, k_{eq} será negativo. Então

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{st} \\ s^2 m + k_{eq} &= 0 \\ s^2 m - k_{eq} &= 0 \\ s^2 m &= k_{eq} \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

Exemplo: Estabilidade em válvulas

Assume-se que exista um fluxo constante Q de um fluido com viscosidade η e densidade ρ .



A queda de pressão é dada pela seguinte equação:

$$\Delta p = \frac{12l\eta}{h^3} \left(\frac{h}{2} \dot{x} + \frac{Q}{\pi D} \right)$$

Assim a equação do movimento será, usando $\frac{\pi D^2}{4}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{3\pi D^2 L \eta}{2h^2} \dot{x} + \frac{3DL\eta Q}{h^3}$$

$$m\ddot{x} + \left(c - \frac{3\pi D^2 L \eta}{2h^2} \right) \dot{x} + kx = \frac{3DL\eta Q}{h^3}$$

Para uma operação estável do sistema, o coeficiente de \dot{x} deve ser positivo. Logo:

$$c \geq \frac{3\pi D^2 L \eta}{2h^2}$$

- Resposta permanente ($x_p(t)$):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Pela Transformada de Fourier:

$$[-m\Omega^2 + i\Omega c + k]X(\Omega) = F(\Omega)$$

$$X(\Omega) = H(\Omega)F(\Omega)$$

Logo,

$$H(\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}$$

$$x_p(t) = X(\Omega)e^{i\Omega t} + X^*(\Omega)e^{-i\Omega t}$$

A solução do sistema será:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Para amortecimento subcrítico $\xi < 1$, temos que a resposta do sistema será:

$$x(t) = e^{-\xi\Omega_n t} [C_1 e^{i\Omega_d t} + C_2 e^{-i\Omega_d t}] + X(\Omega)e^{i\Omega t} + X^*(\Omega)e^{-i\Omega t}$$

Sendo C_1 e C_2 , para um caso geral, iguais a:

$$C_1 = \frac{s_2 x_0 - v_0 + X(\Omega)(-s_2 + i\Omega) - X^*(\Omega)(s_2 + i\Omega)}{s_2 - s_1}$$

$$C_2 = \frac{v_0 - s_1 x_0 + X(\Omega)(s_1 - i\Omega) + X^*(\Omega)(s_1 + i\Omega)}{s_2 - s_1}$$

$$s_{1,2} = -\xi\Omega_n \pm i\Omega_d$$

Quando $\Omega \approx \Omega_n$ acontece o fenômeno conhecido como **ressonância** e a amplificação do sistema será:

$$H(\Omega) = \frac{1}{(2\xi k)i}$$

Se $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e $f(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$. Então:

$$C_1 = \frac{1}{4k\xi} \left(B + \frac{(A - \xi B)i}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

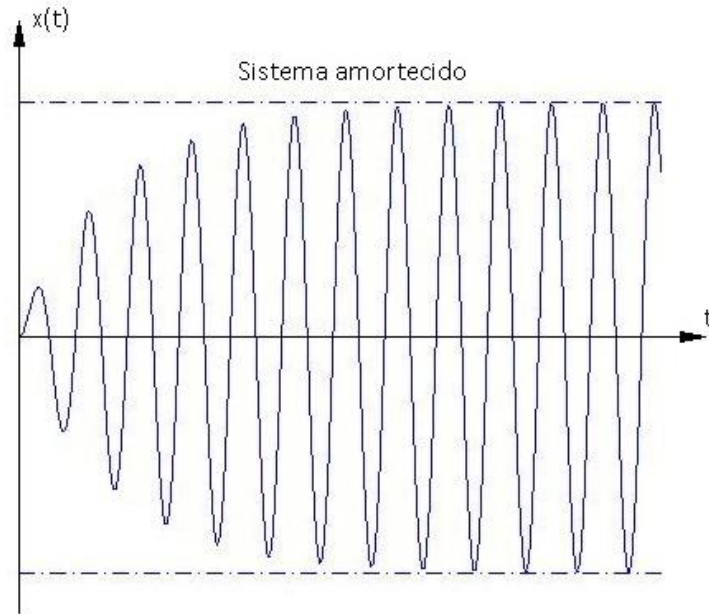
$$C_2 = \frac{1}{4k\xi} \left(B - \frac{(A - \xi B)i}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$X(\Omega) = H(\Omega)F(\Omega) = -\frac{1}{4k\xi}(B + Ai)$$

Aplicando esta expressão na equação de resposta e expandindo as exponenciais com o teorema de Euler:

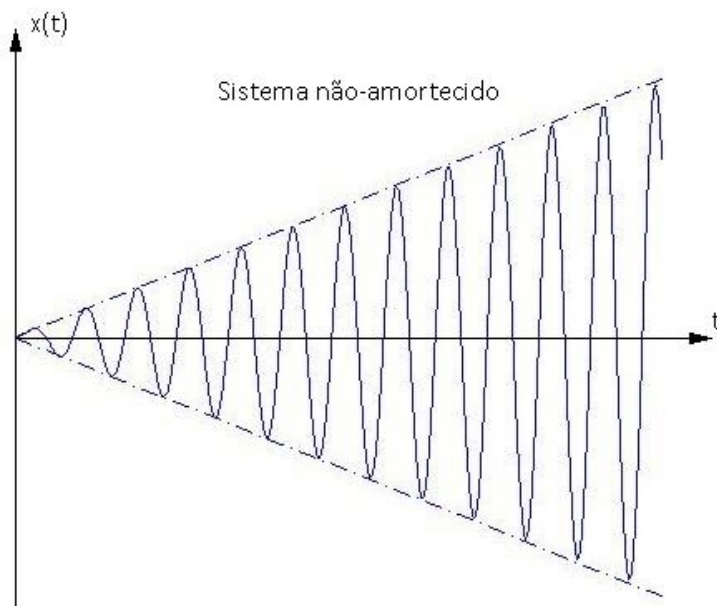
$$x(t) = \frac{1}{2k\xi} \left[e^{-\xi\Omega_n t} \left(B \cos \Omega_d t + \frac{(A-\xi B)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \Omega_d t \right) - B \cos \Omega_n t + A \sin \Omega_n t \right] \quad (4.10)$$

Se $\Omega \cong \Omega_n$



Se $\xi = 0$ a equação (4.11) se torna indeterminada. Assim, aplicando o Teorema de L'Hopital:

$$x(t) = \frac{1}{2k} [B \sin \Omega_n t - \Omega_n t (B \cos \Omega_n t - A \sin \Omega_n t)]$$



5. Neutralizadores Dinâmicos – Sistemas de dois Graus de Liberdade

5.1. Conceitos de FRF para sistemas de um grau de liberdade

Considere o sistema:

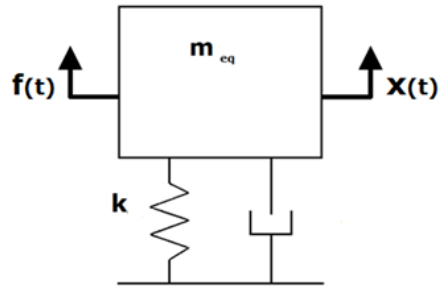


Imagem 15 - Sistema de um grau de liberdade

Com $x(t) = X(\Omega)e^{i\omega t}$ e $f(t) = F(\Omega)e^{i\omega t}$ (funções harmônicas).

Como foi visto o sistema dinâmico acima pode ser representado pela seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Supondo condições iniciais nulas.

Supondo excitação harmônica de frequência variável, a equação diferencial transforma-se em:

$$[-\omega^2 m + i\omega c + k]X(\Omega) = F(\omega)$$

Assim, define-se **receptância** como:

$$\alpha(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega c + k}$$

Mobilidade = velocidade/força:

$$Y(\omega) = \frac{i\omega X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{-m\omega^2 + i\omega c + k}$$

Se $x(t) = X(\omega)e^{i\omega t}$

$$\dot{x}(t) = i\omega X(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X(\omega)e^{i\omega t}$$

Inertância = aceleração/força:

$$S(\omega) = \frac{-\omega^2 X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 m + i\omega c + k}$$

(*) Todas são funções complexas que dependem da frequência.

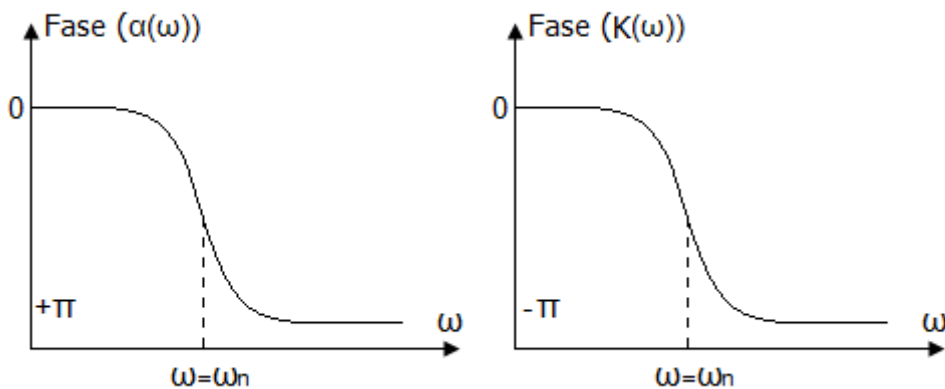
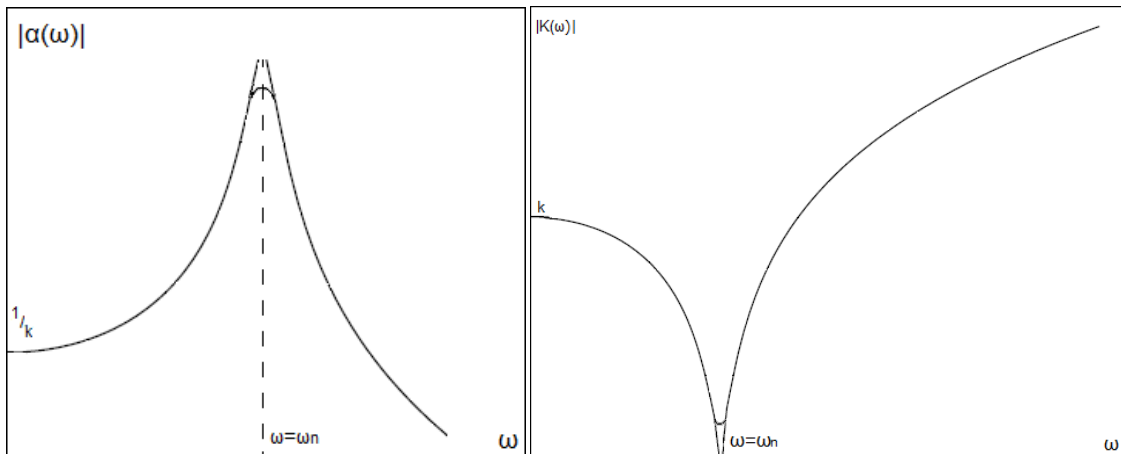
Por outro lado, para sistemas de um grau de liberdade, as inversas dessas funções são denominadas: **rigidez dinâmica**, **impedância mecânica** e **massa dinâmica**, respectivamente.

$$K(\omega) \triangleq \frac{F(\omega)}{X(\omega)} = k - \omega^2 m + i\omega c$$

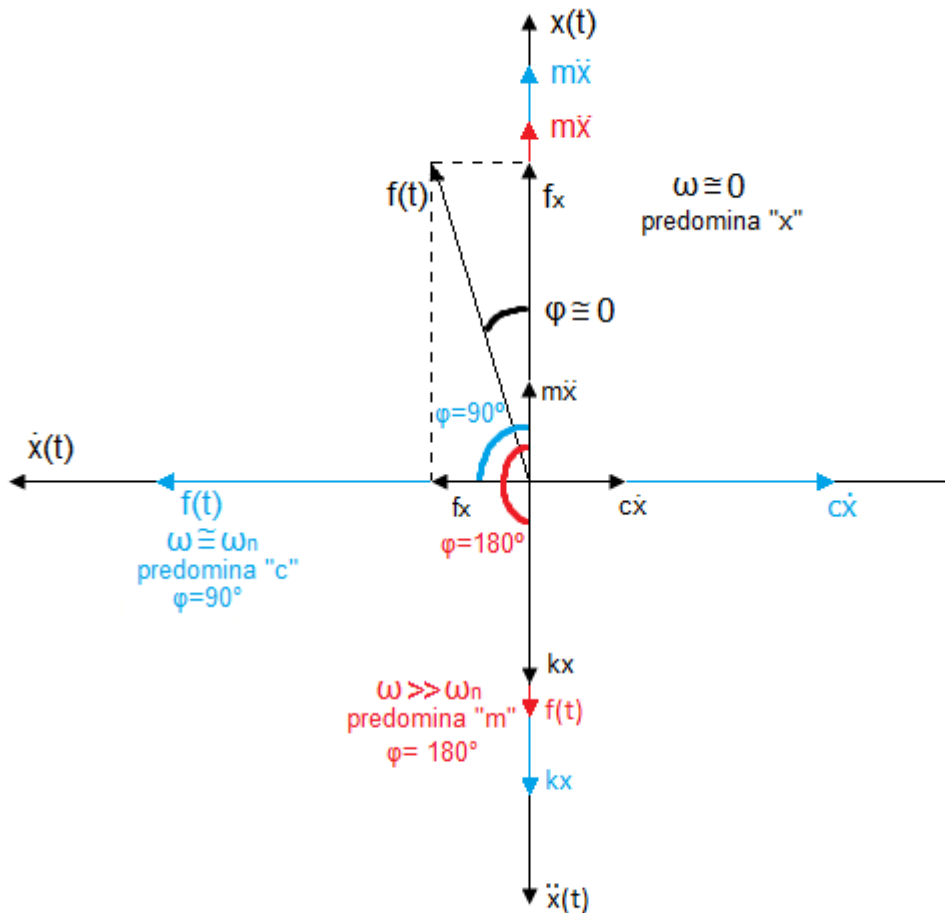
$$Z(\omega) \triangleq \frac{F(\omega)}{i\omega X(\omega)} = \frac{k - \omega^2 m + i\omega c}{i\omega}$$

$$M(\omega) \triangleq \frac{F(\omega)}{-\omega^2 X(\omega)} = \frac{k - \omega^2 m + i\omega c}{-\omega^2}$$

Graficamente, considerando que estas funções são complexas, resulta:



Conceitualmente, o diagrama de Wrotid:



se $\omega \cong \omega_n$, então $m\ddot{x} + kx = 0$ ou para movimento harmônico:

$$-\omega^2 m + k = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

NOTA: De forma geral, a impedância (rigidez ou massa) dinâmica, na ressonância, possui valores muito baixos. No caso de ter um sistema sem amortecimento, a impedância será nula. Qualquer excitação cuja frequência coincida com a frequência natural, se o sistema possui amortecimento muito baixo, a resposta dele será elevada, por mais que a amplitude destas excitações seja pequena.

Por outro lado, a impedância na base de um sistema de um grau de liberdade será:

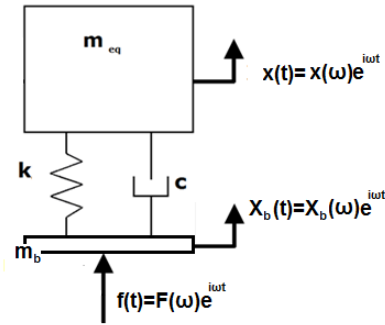


Imagem 16 - Sistema de um grau de liberdade excitado pela base

Considerando $m_b \approx 0$, utilizamos o diagrama de corpo livre:

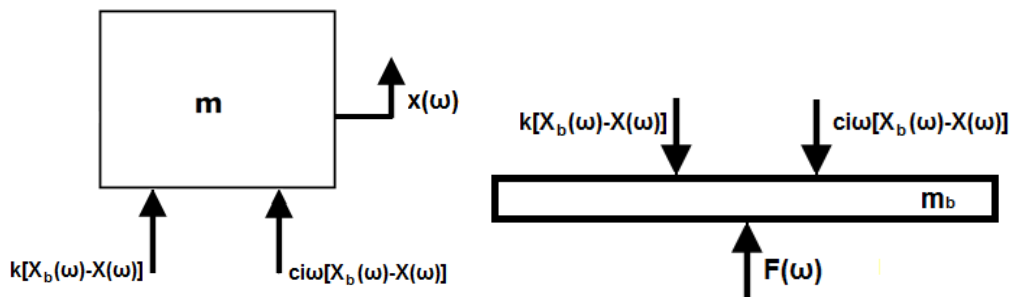


Imagem 17 - Diagrama de corpo livre

Da 2ª Lei de Newton:

$$\sum F_x = ma = m\ddot{x}(t)$$

De 2

$$F(\omega) - (k + i\omega c)[x_b(\omega) - x(\omega)] = -\omega^2 m_b x_b(\omega)$$

De 1

$$(k + i\omega c)[x_b(\omega) - x(\omega)] = -\omega^2 m_b x_b(\omega)$$

$$x(\omega) = \frac{(k + i\omega c)x_b(\omega)}{-\omega^2 m_b + i\omega c + k}$$

$$K(\omega) = \frac{F(\omega)}{X_b(\omega)} = (k + i\omega c) \left[1 - \frac{(k + i\omega c)}{-\omega^2 m_b + i\omega c + k} \right]$$

$$K(\omega) = (k + i\omega c) \left[\frac{-\omega^2 m_b + i\omega c + k - (k + i\omega c)}{-\omega^2 m_b + i\omega c + k} \right]$$

$$K(\omega) = \frac{-\omega^2 m_b (k + i\omega c)}{-\omega^2 m_b + i\omega c + k}$$

Seja $K(\omega)$ a rigidez dinâmica na base

Se

$$x_b(t) = X_b(\omega)e^{i\omega t}$$

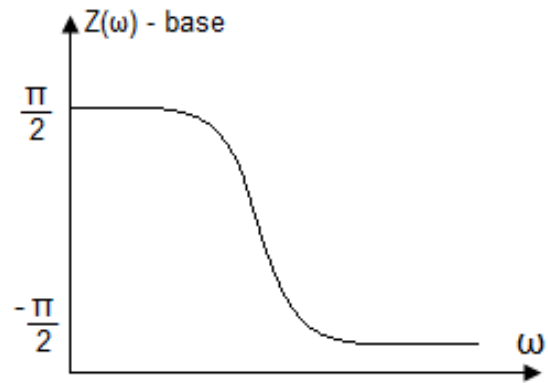
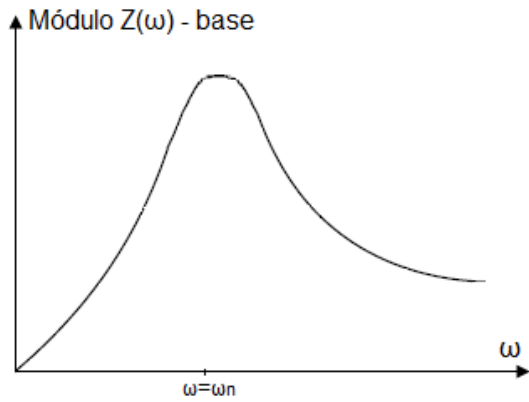
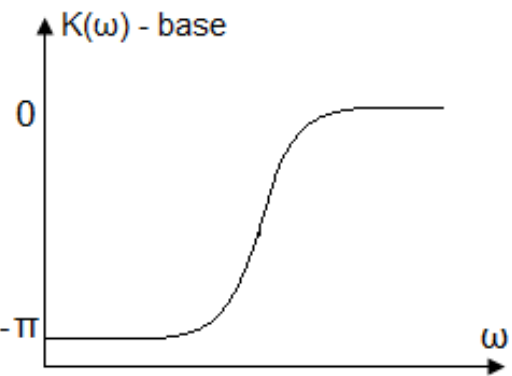
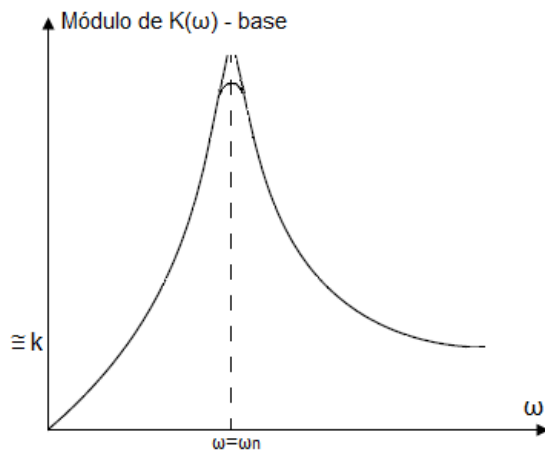
$$\dot{x}_b(t) = i\omega X_b(\omega)e^{i\omega t}$$

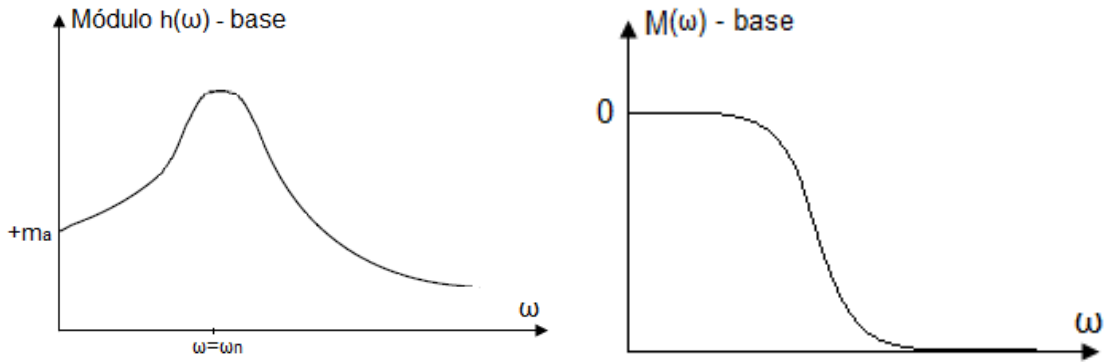
$$\ddot{x}_b(t) = -\omega^2 X_b(\omega)e^{i\omega t}$$

Então, na base a impedância e a massa dinâmica é dada por:

$$Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega X_b(\omega)} = \frac{K(\omega)}{i\omega} = \frac{-iK(\omega)}{\omega}$$

$$M(\omega) = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 X_b(\omega)} = \frac{K(\omega)}{-\omega^2} = \frac{-K(\omega)}{\omega^2}$$





Quando a frequência de excitação coincide com a frequência ω_n (denominada frequência de antirressonância), a impedância do sistema na base é elevada.

No caso de não existir amortecimento a impedância dinâmica na base seria infinito para $\omega = \omega_n$.

Para provocar um deslocamento na base, nas condições de $\omega = \omega_n$, seria necessário aplicar uma força infinita.

Para a redução destes efeitos são utilizados os neutralizadores dinâmicos de vibrações, também chamadas de absorvedores de vibração. Estes dispositivos simples quando acoplados a sistemas mecânicos, reduzem a sua vibração ou o seu ruído irradiado.

5.2. Sistema de dois Graus de Liberdade

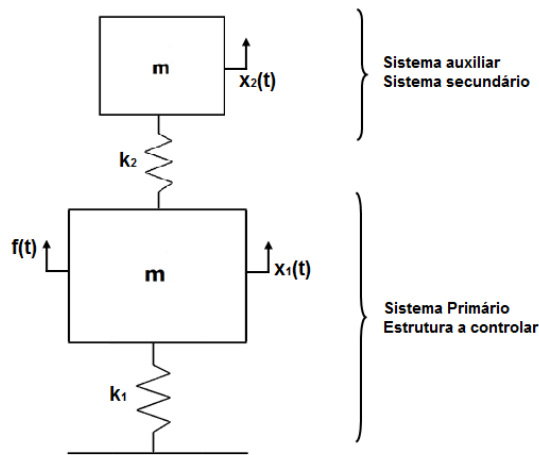


Imagem 18 - Sistema de dois graus de liberdade

Diagrama de corpo livre – 2ª Lei de Newton

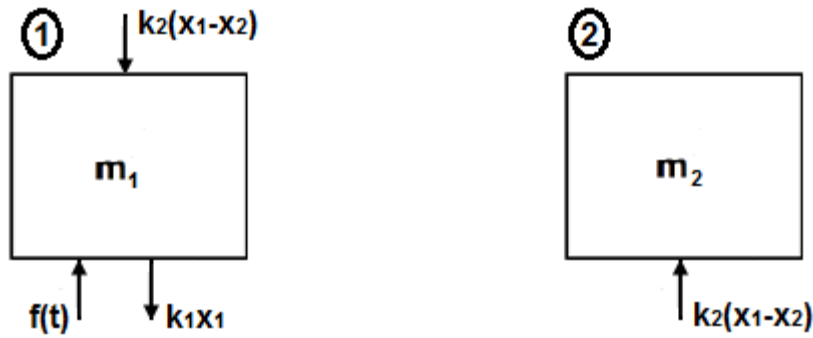


Imagem 19 - Diagrama de corpo livre

$$\sum F_1 = m_1 \ddot{x}_1(t) \quad \sum F_2 = m_2 \ddot{x}_2(t)$$

$$f(t) - k_1 x_1(t) - k_2(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1(t) \quad (5.1)$$

$$k_2(x_1 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2(t) \quad (5.2)$$

Supondo excitação harmônica: representando a mesma em exponenciais complexas.

$$f(t) = F(\omega)e^{i\omega t}$$

$$x_1(t) = X_1(\omega)e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = X_2(\omega)e^{i\omega t}$$

Substituindo em (5.1) e (5.2):

$$-m_1 \omega^2 X_1(\omega) + (k_1 + k_2)X_1(\omega) - K_2 X_2(\omega) = F(\omega)$$

$$-\omega^2 m_2 X_2(\omega) + K_2 X_2(\omega) - K_2 X_1(\omega) = 0$$

A resposta do sistema primário será:

$$X_2 = \frac{K_2 X_1(\omega)}{-\omega^2 m_2 + k_2}$$

$$K_1(\omega) = \left[\frac{(-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2}{-\omega^2 m_2 + k_2} \right] X_1(\omega) = F(\omega)$$

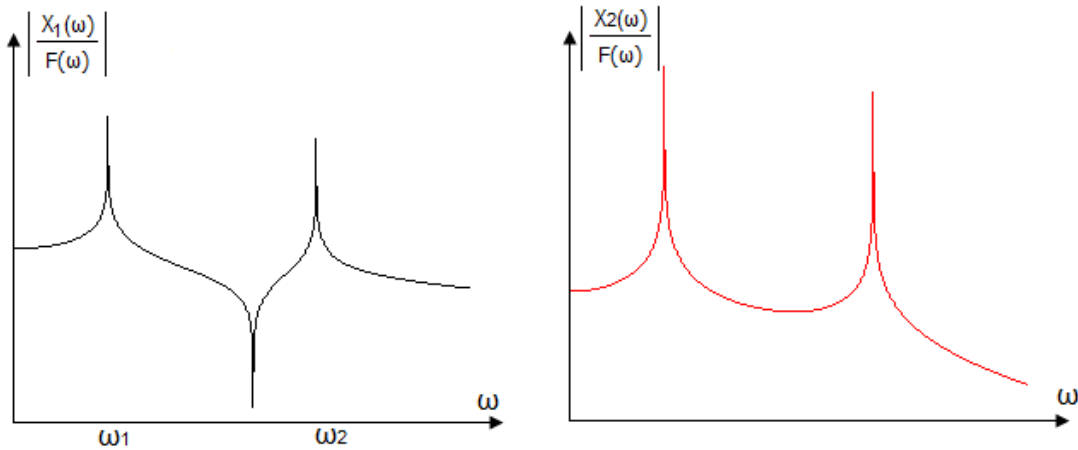
$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F(\omega)}{[(-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2]} \quad (5.3)$$

$$X_2(\omega) = \frac{k_2(-\omega^2 m_2 + k_2)F(\omega)}{(-\omega^2 m_2 + k_2)[(-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2]}$$

$$X_2(\omega) = \frac{k_2 F(\omega)}{[(-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2]} \quad (5.4)$$

A equação (5.3) dá a resposta do sistema primário em função da frequência, quando nele atua uma força harmônica com uma frequência ω .

Para um dado valor de m_1, k_1, m_2, k_2 , a resposta em frequência $X_1(\omega)/F(\omega)$ e $X_2(\omega)/F(\omega)$ genérica será:



As frequências naturais ω_1 e ω_2 são as frequências para as quais o sistema apresenta ampliações se for excitado nelas. Estas frequências, denominadas frequências naturais, são achadas de tal forma que $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega) \rightarrow \infty$.

Assim, tomando o denominador das equações (5.3) e (5.4) e igualando-os a zero tem-se a equações características:

Equação característica do sistema 2 G.L.

$$(-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2))(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0 \quad (5.5)$$

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^3 (m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)) + k_2 (k_1 + k_2) - k_2^2 = 0$$

Dividindo-se tudo por $m_1 m_2$ e definindo a relação de massas $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, tem-se para

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ e } \omega_{n_2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{m_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{m_2 k_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2 k_2}{m_1 m_2} \right] + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_2^2}{m_1 m_2} - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 [\omega_{n_2}^2 + \omega_{n_1}^2 + \mu \omega_{n_2}^2] + \omega_{n_2}^2 \omega_{n_1}^2 = 0$$

Definindo $s = \omega^2$, temos:

$$\boxed{s^2 - s[\omega_{n_2}^2(1 + \mu) + \omega_{n_1}^2] + \omega_{n_2}^2\omega_{n_1}^2 = 0} \quad (5.6)$$

Sendo $s_{1,2}$ o resultado de (5.6), elas serão as frequências naturais do sistema de dois graus de liberdade sem amortecimento.

$$\boxed{s_1 = \omega_1^2} \text{ e } \boxed{s_2 = \omega_2^2}$$

ω_1 e ω_2 : frequências naturais do sistema de dois graus de liberdade.

5.3. Sintonização do Neutralizador M_k

Dado o sistema de um grau de liberdade M_k ,

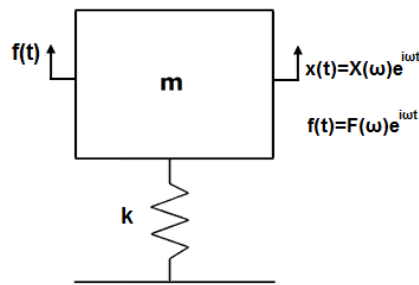


Imagem 20 - Sistema de um grau de liberdade "mk"

cuja frequência natural é $\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$; suponha que ω , a frequência de excitação, coincide com ω_n . Como já estudado, neste caso, o sistema entrará em ressonância, amplificando a saída (deslocamento) a valores extremamente altos, prejudicando a integridade da estrutura.

Quando existe um problema deste tipo, sendo inviável a solução de mudar a massa ou a rigidez da mola, deve-se reduzir a resposta com a ajuda de neutralizadores dinâmicos de vibrações.

Adicionando então um sistema de um grau de liberdade cuja frequência $\omega_{n_2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_{n_1} = \omega$, como foi visto em (5.3.), reduzirá a zero aquela vibração amplificada pela ressonância.

Na figura abaixo se mostra este efeito, assim como também a resposta do sistema adicional auxiliar.

5.3.1. Parâmetros ótimos do neutralizador (sintonização):

- Massa do sistema auxiliar:

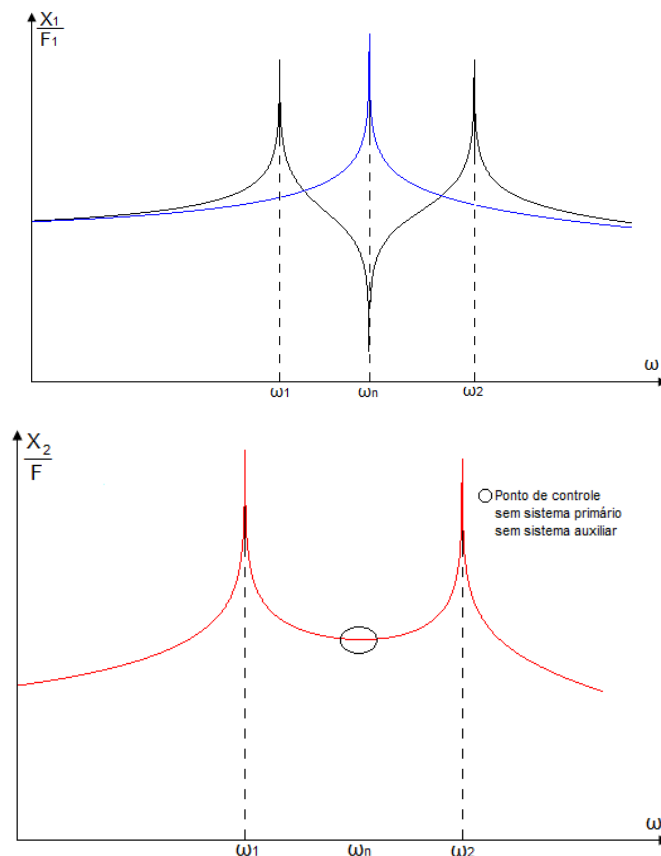
$$m_2 = 0,1 \text{ a } 0,25 m_1$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = 0,1 \text{ a } 0,25$$

NOTA: quanto maior é a massa de sintonização, m_2 , maior será a resolução ou a força de controle. Para não cair no erro conceitual de querer controlar o prédio adicionando outro acima daquele se adota $\mu = 0,1$ a $0,25$.

- Frequência de sintonização:

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_{n1} = \omega$$



5.4. Neutralizadores Dinâmicos com Amortecimento

O neutralizador dinâmico sem amortecimento atua sobre o sistema primário aplicando forças de reação, forças estas que estão defasadas (180°) da vibração original do sistema primário. Anulando completamente a vibração do sistema primário, o neutralizador, por outro lado, devido aos altos níveis de vibração provocados por este fato, sofre fadiga. Desta forma a sua vida útil se vê reduzida a poucos ciclos de funcionamento. Uma vez o

sistema secundário fora de funcionamento, o nível de vibração do sistema primário aumentará novamente.

Assim, a introdução do amortecimento no neutralizador dinâmico elimina o efeito indesejado, melhorando o sistema de controle passivo de vibrações.

Considerando o sistema de dois graus de liberdade abaixo:

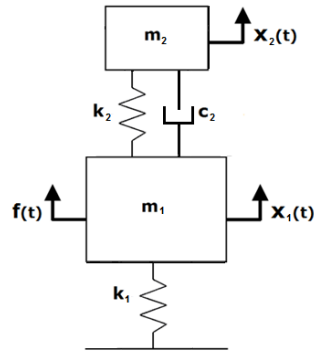


Imagem 21 - Sistema de dois graus de liberdade

O sistema de dois graus de liberdade dado por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + c_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) &= f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Supondo excitação harmônica, a resposta será harmônica e de igual frequência:

$$\begin{aligned} f(t) &= F(\omega)e^{i\omega t} \\ x_1(t) &= X_1(\omega)e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= X_2(\omega)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Assim, a equação do sistema será:

$$\begin{aligned} [-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 + i\omega c_2]X_1(\omega) - [k_2 + i\omega c_2]X_2(\omega) &= F(\omega) \\ -[k_2 + i\omega c_2]X_1(\omega) + [-\omega^2 m_2 + k_2 + i\omega c_2]X_2(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Do sistema de equações algébricas é possível obter a resposta do sistema em exponenciais complexas, tanto para a massa m_1 como para a massa m_2 .

Assim,

$$X_1(\omega) = \frac{[-\omega^2 m_2 + k_2 + i\omega c_2]F(\omega)}{(-\omega^2 m_2 + k_2)(-\omega^2 m_1 + k_1) - \omega^2 m_2 k_2 + i\omega c_2(-\omega^2 m_1 + k_1 - \omega^2 m_2)}$$

e

$$X_2(\omega) = \frac{(k_2 + i\omega c_2)X_1(\omega)}{[-\omega^2 m_2 + k_2 + i\omega c_2]}$$

Definindo,

$$\text{Fator de amortecimento: } \xi = \frac{c_2}{2m_2\omega_a}$$

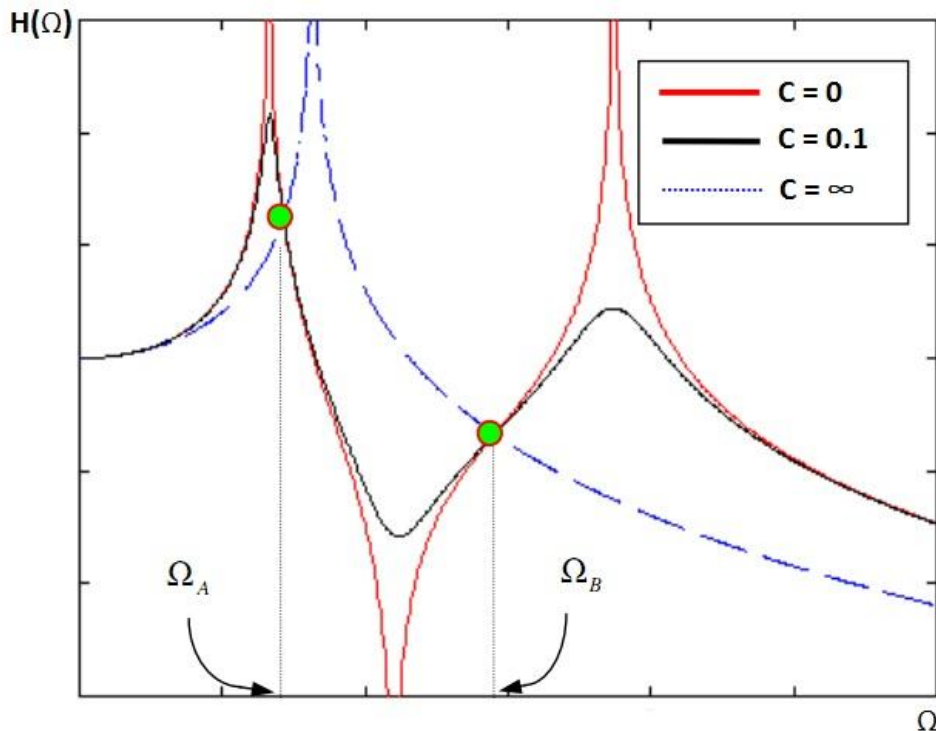
$$\text{Sintonização: } \alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}$$

5.5. Escolha dos Parâmetros ótimos do neutralizador - Sintonização

5.5.1. Teoria dos Pontos Fixos

Mostra-se que se o “amortecimento do sistema primário é nulo” ou desprezível, a resposta do sistema primário ($X_1(\omega)$), para diferente amortecimento do sistema auxiliar, passa sempre por dois “pontos fixos”.

Graficamente:



Esta teoria diz que a mínima resposta do sistema primário é conseguida através da escolha adequada do sistema auxiliar quando os picos passam por aqueles pontos fixos.

Para isto, encontra-se o valor da sintonização (α) de forma que os pontos fixos se situem a mesma altura e, posteriormente, encontra-se o amortecimento do sistema auxiliar de forma que os picos do sistema primário passem por estes pontos ou mais perto possível deles.

5.5.2. Sintonização ótima ($\xi_{\text{ótimo}} - \alpha_{\text{ótimo}}$)

- $\alpha_{\text{ótimo}}$:

- Iguale-se, por exemplo, $|H(\omega)_{\xi=\infty}| = |H(\omega)_{\xi=0}|$
- Encontra-se ω_p e ω_q associados com os pontos fixos
- Para estas frequências encontra-se a relação $\alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}$ tal que os pontos fixos encontram-se à mesma altura $\rightarrow \alpha_{\text{ótimo}}$

$$|H_{\xi=0}(\omega_p)| = |H_{\xi=0}(\omega_q)|$$

$$\alpha_{\text{ótimo}} = \frac{1}{1 + \mu}$$

Sendo $\mu = \frac{m_2}{m_1}$

- $\xi_{\text{ótimo}}$:
 - Uma vez definido $\alpha_{\text{ótimo}}$, o que representa que P e Q estejam a mesma altura, escolhe-se um amortecimento ótimo de forma que os picos da resposta $|H(\omega)|$ passem por estes pontos.
 - Para isto encontra-se os valores máximos de $|H(\omega)| = \frac{d|H(\omega)|}{d\omega} = 0$ com $\omega_1 \approx \omega_p$ e $\omega_2 \approx \omega_q$.
 - Escolhendo adequadamente $\xi_{\text{ótimo}1}$ de forma que $\omega_1 = \omega_p$ e $\xi_{\text{ótimo}2}$ tal que $\omega_2 = \omega_q$ e tomando um promedio de $\xi_{\text{ótimo}}$ entre 1 e 2, encontra-se o parâmetro dinâmico.

$$\xi_{\text{ótimo}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}$$

5.5.3. Projeto ótimo de um sistema de controle de vibração passiva (MCK) aplicado a um sistema de um grau de liberdade (MK):

Dado um sistema de um grau de liberdade, considerando que o amortecimento é zero ou desprezível:

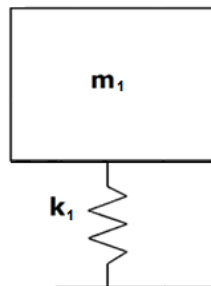


Imagem 22- Sistema 1G.L. sem amortecimento

$$\text{Com } \omega_{n_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

Projetar um neutralizador dinâmica ótima para reduzir ao máximo possível à resposta do sistema primário. Este dispositivo de controle foi escolhido uma vez que a excitação (banda larga) possui um conteúdo de frequência tal que excita a frequência natural do sistema primário (ressonância).

Assim, adota-se para os parâmetros do sistema secundário:

$$m_2 = \mu m_1 = 0,1 \text{ a } 0,25 m_1$$

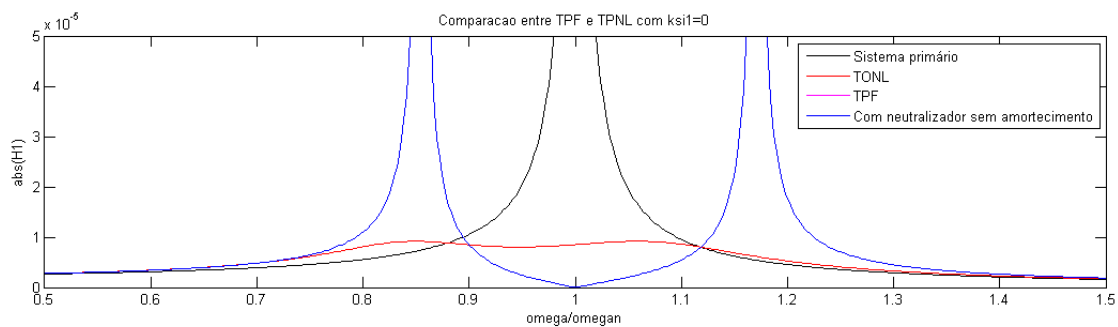
$$\alpha_{\acute{o}timo} = \frac{\omega_{n_2}}{\omega_{n_1}} = \frac{\sqrt{k_2/m_2}}{\sqrt{k_1/m_1}} = \frac{1}{1 + \mu}$$

Com k_2 definido

Resta adotar o amortecimento:

$$\xi_{\acute{o}timo} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}$$

$$\xi_{\acute{o}timo} = \frac{c_2}{c_{c_2}} = \frac{c_2}{2m_2\omega_{n_2}} \Rightarrow c_2$$



Exercício: Supondo o sistema de um grau de liberdade cujos parâmetros são

$$k_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ [N/m]}$$

$$m_1 = 10 \text{ [kg]}$$

$$\xi_1 = 1 \cdot 10^{-4}$$

- Graficar a receptância (em módulo) em função da frequência ;
- Calcular a frequência natural não amortecida ω_{n1}
- Projetar um neutralizador (modelo matemático) ótimo.
- Graficar a resposta, no domínio da frequência (modulo da receptância) do:
 - Sistema primário
 - Sistema composto com neutralizador ótimo (X_1 e X_2)