

LEIS BÁSICAS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Lei de Fourier: $q = -k A \frac{\partial T}{\partial x}$

Lei de Newton do resfriamento: $q = h A (T_s - T_\infty)$

Lei de Stefan-Boltzmann:

$$q = \sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4); \quad \sigma = 5,6697 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$$

SOLUÇÕES BÁSICAS DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE CALOR 1D EM REGIME PERMANENTE:

Parede plana, sem geração: $T(x) = C_1 x + C_2$

Parede plana, com geração: $T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$

Parede cilíndrica, sem geração: $T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$

Parede cilíndrica, com geração: $T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$

Parede esférica, sem geração: $T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$

Parede esférica, com geração: $T(r) = -\frac{\dot{q}}{6k} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$

ANALOGIA ENTRE CIRCUITOS ELÉTRICOS E TÉRMICOS

Taxa de transferência de calor: $q = \frac{\Delta T}{R_t}$

Parede plana (condução): $R_t = \frac{L}{k A}$

Parede cilíndrica (condução): $R_t = \frac{\ln(r_e / r_i)}{2 \pi k L}$

Parede esférica (condução): $R_t = \frac{1}{4 \pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

Convecção: $R_t = \frac{1}{h A}$

CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Fatores de forma: $q = k S \Delta T$

sendo S o fator de forma – ver Tabela 4.1.

CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE

Número de Biot: $Bi = \frac{h L_c}{k}$, sendo $L_c = \frac{V}{A_s}$.

Número de Fourier: $Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$

Método da Capacitância Global:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[\left(-\frac{h A_s}{\rho c_p V} \right) t \right]; \quad Bi < 0,1$$

$$Q = (\rho c_p V) \theta_i \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_t} \right) \right]; \quad \tau_t = \left(\frac{1}{h A_s} \right) (\rho c_p V)$$

Radiação ($T_{viz} \neq 0$):

$$t = \frac{\rho c_p V}{4 \varepsilon A_{sr} \sigma T_{viz}^3} \left\{ \ln \left| \frac{T_{viz} + T}{T_{viz} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{viz} + T_i}{T_{viz} - T_i} \right| + 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{viz}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{viz}} \right) \right] \right\}$$

Radiação ($T_{viz} = 0$):

$$t = \frac{\rho c_p V}{3 \varepsilon A_{s,r} \sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right)$$

Parede plana (soluções aproximadas):

$$\zeta_n \tan(\zeta_n) = Bi$$

(as quatro primeiras raízes dessa equação são fornecidas na Tabela B3)

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*) \text{ ou } \theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

onde $\theta_0^* \equiv \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ representa a temperatura adimensional no ponto central.

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

Transferência total de energia: $Q_0 = \rho c_p V (T_i - T_\infty)$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_0^*$$

Cilindro infinito (soluções aproximadas):

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = Bi$$

(As grandezas J_1 e J_0 são funções de Bessel de primeira espécie, com valores fornecidos na Tabela B4).

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*) \text{ ou } \theta^* = \theta_0^* J_0(\zeta_1 r^*)$$

$$\text{Transferência total de energia: } \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$

Esfera (soluções aproximadas):

$$1 - \zeta_n \cot(\zeta_n) = Bi$$

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*) \text{ ou } \theta^* = \theta_0^* \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$$

$$\text{Transferência total de energia: } \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]$$

Sólido semi-infinito:

Temperatura constante na superfície: $T(0, t) = T_{\text{sup}}$

$$\frac{T(x, t) - T_{\text{sup}}}{T_i - T_{\text{sup}}} = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right); \quad q_s''(t) = \frac{k(T_{\text{sup}} - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Fluxo Térmico constante na superfície: $q_s'' = q_0''$

$$T(x, t) - T_i = \frac{2q_0''(\alpha t / \pi)^{1/2}}{k} \exp \left(\frac{-x^2}{4\alpha t} \right) - \frac{q_0'' x}{k} \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

$$\text{Convecção na superfície: } -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \left[\exp \left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \right) \right] \left[\text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right]$$

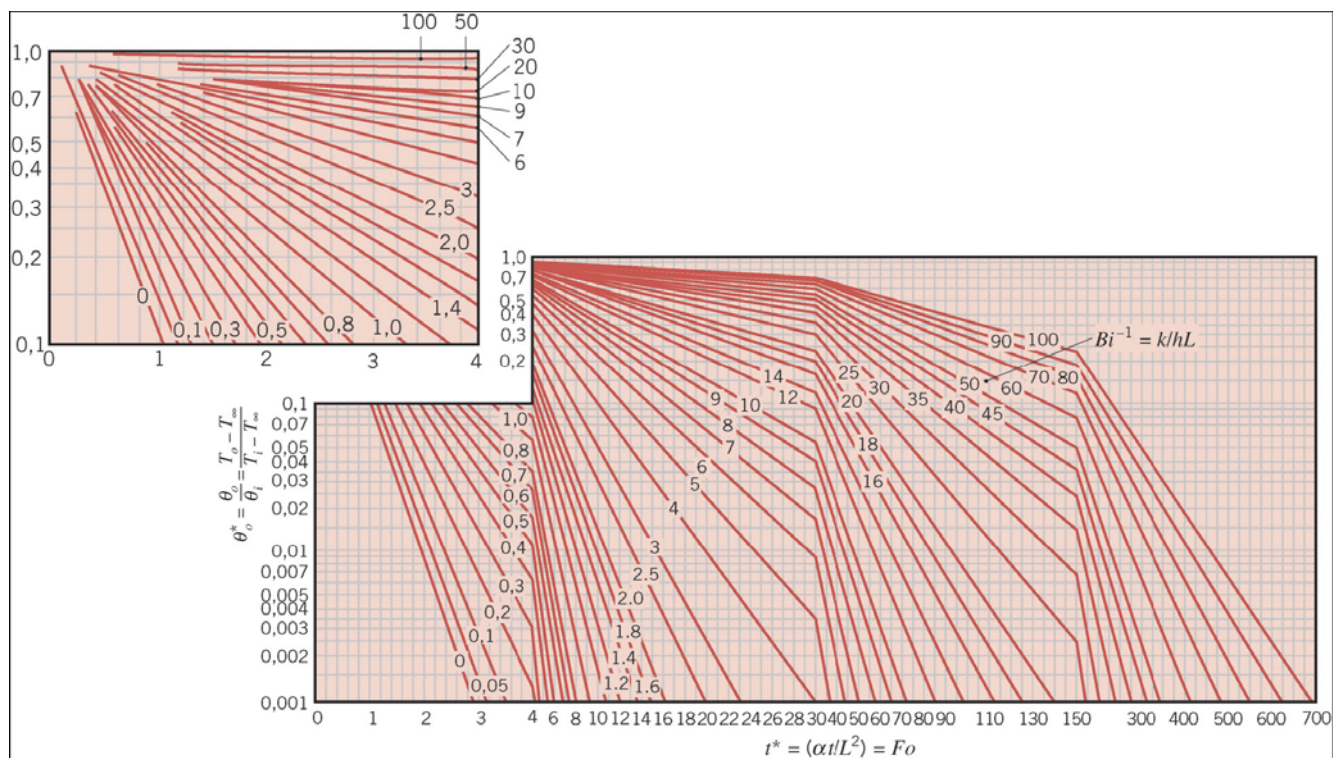


FIGURA 5S.1 Temperatura no plano central como função do tempo em uma parede plana de espessura $2L$.

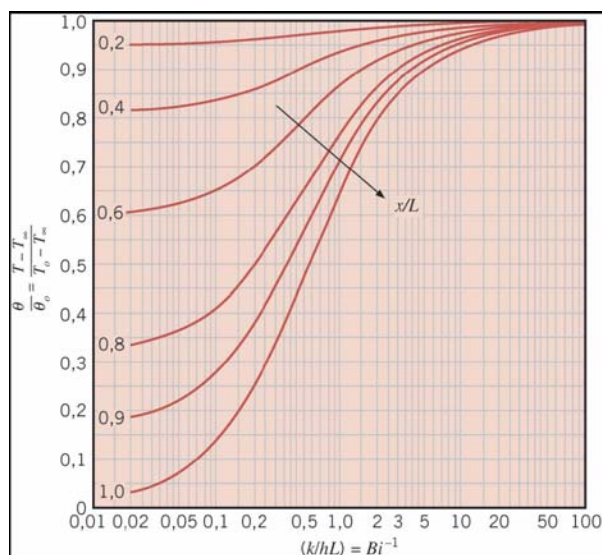


FIGURA 5S.2 Distribuição de temperaturas em parede plana de espessura $2L$.

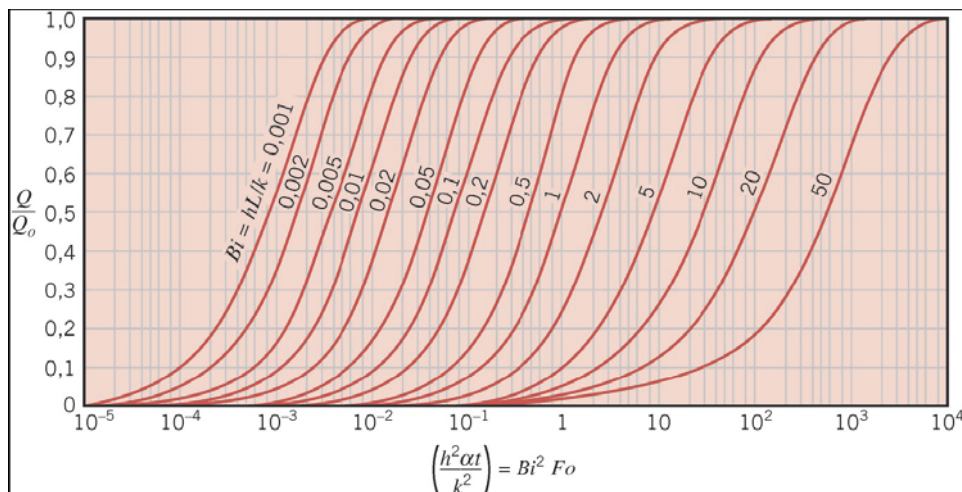


FIGURA 5S.3 Variação da energia interna como função do tempo em uma parede plana de espessura $2L$.

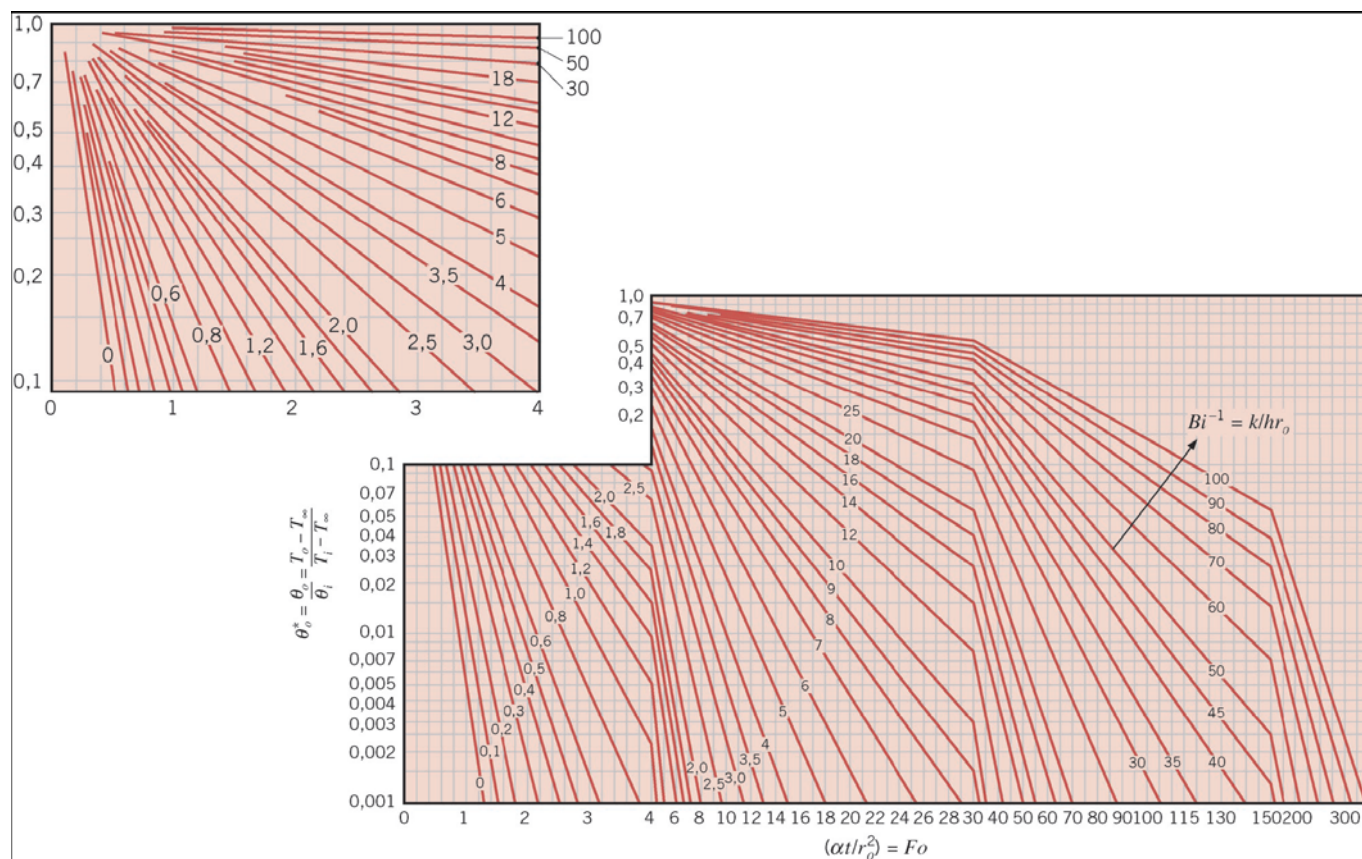


FIGURA 5S.4 Temperatura no eixo central como função do tempo em um cilindro infinito de raio r_o .

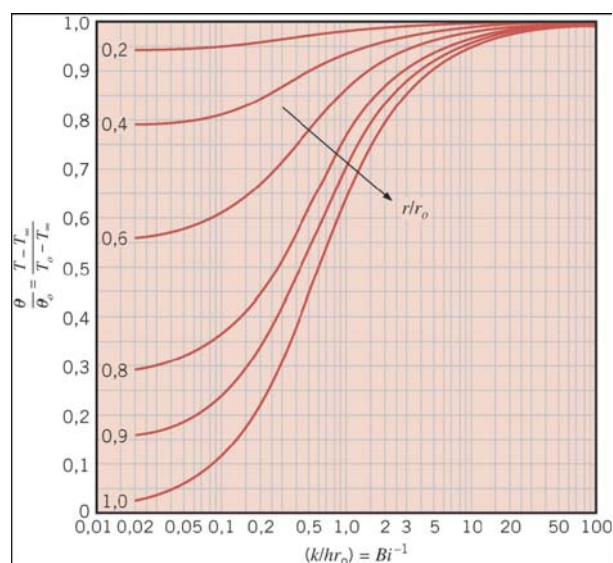


FIGURA 5S.5 Distribuição de temperaturas em um cilindro infinito de raio r_o .

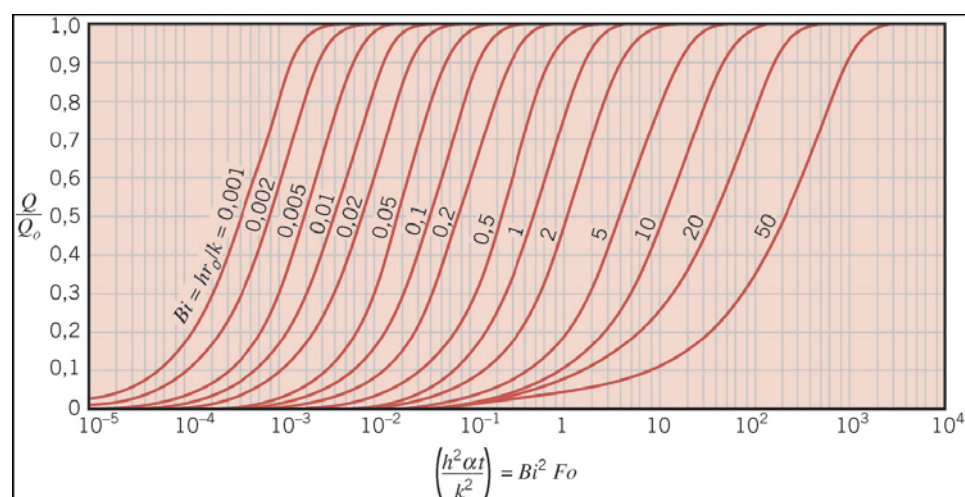


FIGURA 5S.6 Variação da energia interna como função do tempo em um cilindro infinito de raio r_o .

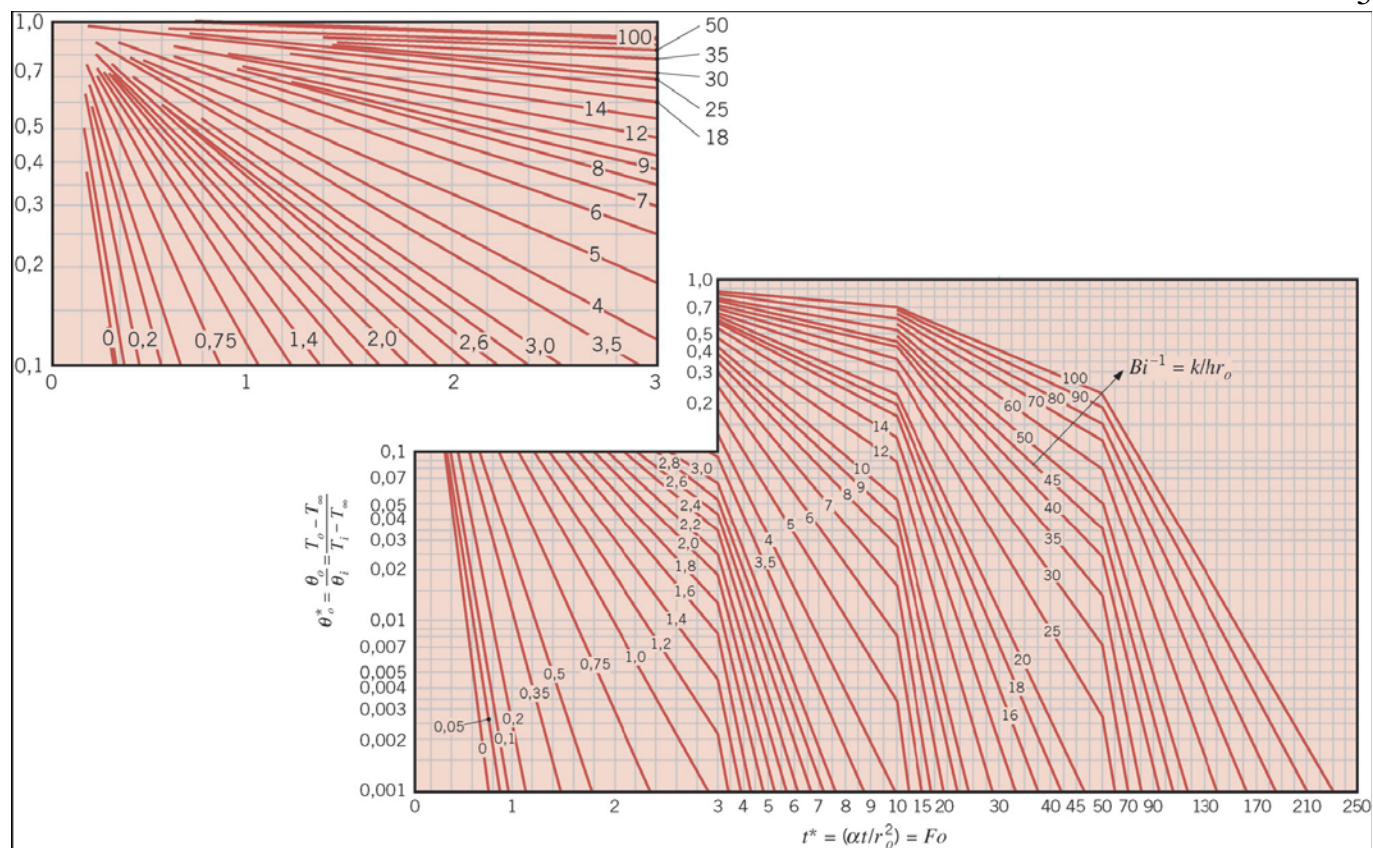


FIGURA 5S.7 Temperatura no centro como função do tempo em uma esfera de raio r_0 .

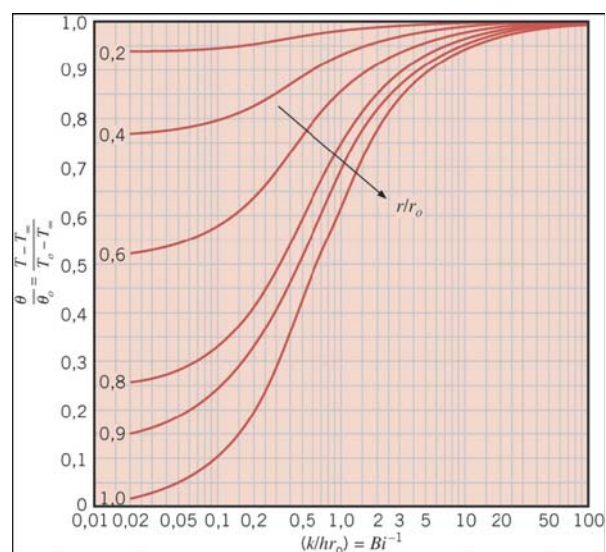


FIGURA 5S.8 Distribuição de temperaturas em uma esfera de raio r_0 .

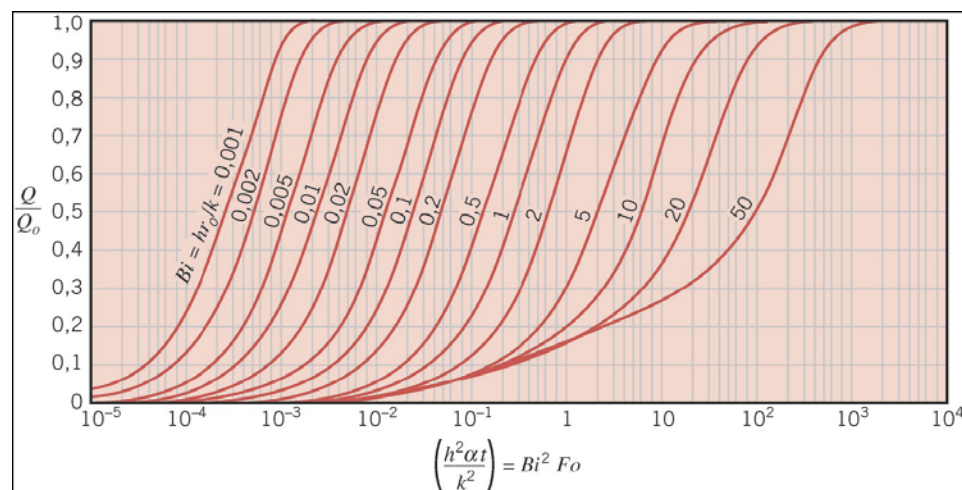


FIGURA 5S.9 Variação da energia interna como função do tempo em uma esfera de raio r_0 .

TABELA 4.1 Fatores de forma para sistemas bidimensionais selecionados [$q = Sk(T_1 - T_2)$]

SISTEMA	ESQUEMA	RESTRIÇÕES	FATOR DE FORMA
Caso 1. Esfera isoterma enterrada em um meio semi-infinito		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Caso 2. Cilindro horizontal de comprimento L isotérmico enterrado em um meio semi-infinito		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Caso 3. Cilindro vertical em um meio semi-infinito		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
Caso 4. Condução entre dois cilindros de comprimento L em um meio infinito		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Caso 5. Cilindro circular horizontal de comprimento L centralizado entre planos paralelos de comprimentos iguais e largura infinita		$z \gg D/2$ $L \gg z$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$
Caso 6. Cilindro circular de comprimento L centralizado em um sólido quadrado de mesmo comprimento		$w > D$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\ln(1,08 w/D)}$
Caso 7. Cilindro circular excêntrico de comprimento L em um cilindro de mesmo comprimento		$D > d$ $L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
Caso 8. Condução através das extremidades adjacentes de paredes		$D > L/5$	0,54D
Caso 9. Condução através do encontro de três paredes com uma diferença de temperatura ΔT_{1-2} através das paredes		$L \ll \text{comprimento e largura da parede}$	0,15L
Caso 10. Disco de diâmetros D e T_1 sobre um meio semi-infinito de condutividades térmicas k e T_2		Nenhuma	2D
Caso 11. Canal quadrado de comprimento L		$\frac{W}{w} < 1,4$ $\frac{W}{w} > 1,4$	$\frac{2\pi L}{0,785 \ln(W/w)}$ $\frac{2\pi L}{0,930 \ln(W/w) - 0,050}$

PAREDE PLANA			CILINDRO INFINITO		ESFERA	
Bi^a	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,03	0,1732	1,0049	0,2439	1,0075	0,2989	1,0090
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,05	0,2217	1,0082	0,3142	1,0124	0,3852	1,0149
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,07	0,2615	1,0114	0,3708	1,0173	0,4550	1,0209
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,09	0,2956	1,0145	0,4195	1,0222	0,5150	1,0268
0,10	0,3111	1,0160	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,15	0,3779	1,0237	0,5376	1,0365	0,6608	1,0445
0,20	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,25	0,4801	1,0382	0,6856	1,0598	0,8448	1,0737
0,30	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0932	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0185	1,1346	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0919	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1725	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2,0	1,0769	1,1795	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7201
5,0	1,3138	1,2402	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8674
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	1,7654	1,8921
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2881	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990
∞	1,5707	1,2733	2,4050	1,6018	3,1415	2,0000

^a $Bi = hL/k$ para parede plana e hr_o/k para cilindro infinito e esfera. Veja Fig. 5.6.

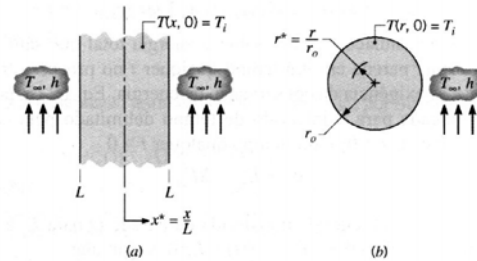


Fig. 5.6 Sistemas unidimensionais com temperatura inicial uniforme sujeita a condições súbitas de convecção. (a) Parede plana. (b) Cilindro infinito ou esfera.

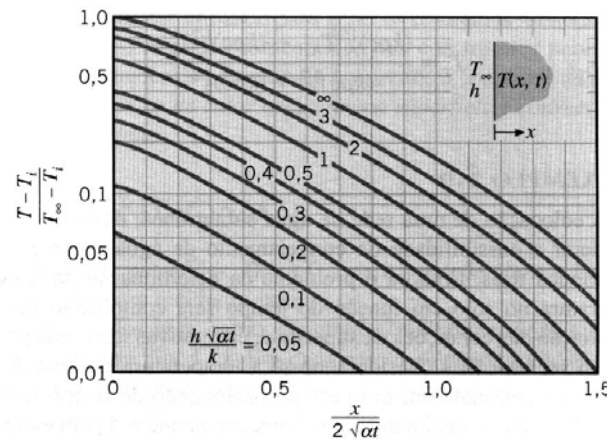


Fig. 5.8 Histórias das temperaturas em um sólido semi-infinito com convecção na superfície [2]. (Adaptado com permissão.)

B.3 As Quatro Primeiras Raízes da Equação Transcendental, $\xi_n \tan \xi_n = Bi$, para Condução Transiente em uma Parede Plana

$Bi = \frac{hL}{k}$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
0	0	3,1416	6,2832	9,4248
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117
30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334
50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172
80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956

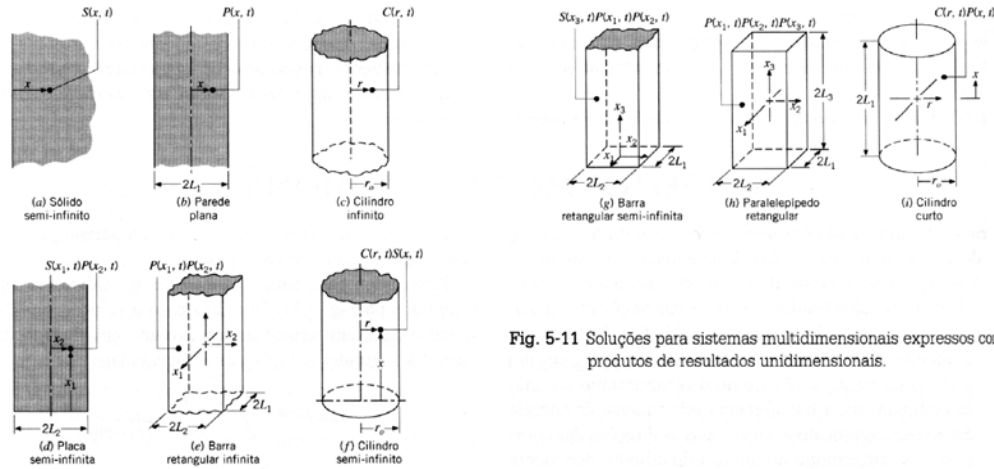


Fig. 5-11 Soluções para sistemas multidimensionais expressos como produtos de resultados unidimensionais.

B.2 Função Erro de Gauss¹

w	erf w	w	erf w	w	erf w
0,00	0,00000	0,36	0,38933	1,04	0,85865
0,02	0,02256	0,38	0,40901	1,08	0,87333
0,04	0,04511	0,40	0,42839	1,12	0,88679
0,06	0,06762	0,44	0,46622	1,16	0,89910
0,08	0,09008	0,48	0,50275	1,20	0,91031
0,10	0,11246	0,52	0,53790	1,30	0,93401
0,12	0,13476	0,56	0,57162	1,40	0,95228
0,14	0,15695	0,60	0,60386	1,50	0,96611
0,16	0,17901	0,64	0,63459	1,60	0,97635
0,18	0,20094	0,68	0,66378	1,70	0,98379
0,20	0,22270	0,72	0,69143	1,80	0,98909
0,22	0,24430	0,76	0,71754	1,90	0,99279
0,24	0,26570	0,80	0,74210	2,00	0,99532
0,26	0,28690	0,84	0,76514	2,20	0,99814
0,28	0,30788	0,88	0,78669	2,40	0,99931
0,30	0,32863	0,92	0,80677	2,60	0,99976
0,32	0,34913	0,96	0,82542	2,80	0,99992
0,34	0,36936	1,00	0,84270	3,00	0,99998

¹A função erro de Gauss é definida como

$$\operatorname{erf} w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$$

A função erro complementar é definida como

$$\operatorname{erfc} w = 1 - \operatorname{erf} w$$

B.4 Funções de Bessel de Primeira Espécie

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0	0,7652	0,4400
1,1	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399
2,4	0,0025	0,5202