

# Formas diferenciales de las leyes fundamentales

## Esquema

- 5.1 Introducción
- 5.2 Ecuación diferencial de continuidad
- 5.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento
  - 5.3.1 Formulación general
  - 5.3.2 Ecuaciones de Euler
  - 5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes
  - 5.3.4 Ecuaciones de vorticidad
- 5.4 Ecuación diferencial de energía
- 5.5 Resumen

---

## Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son derivar las ecuaciones diferenciales y establecer las condiciones límite e iniciales para resolverlas para los campos de velocidad y presión en un flujo de fluido. Las ecuaciones diferenciales parciales incluyen:

- ▲ La ecuación de continuidad
- ▲ Las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos inviscidos (ecuaciones de Euler)
- ▲ Las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos viscosos (ecuaciones de Navier-Stokes)
- ▲ Las ecuaciones de vorticidad
- ▲ La ecuación de energía

Numerosos ejemplos y problemas ilustrarán varias aplicaciones relativamente simples de las ecuaciones diferenciales junto con la simplificación de las ecuaciones según la situación del flujo.

## 5.1 INTRODUCCIÓN

El material de este capítulo puede ser omitido en un curso introductorio. Los capítulos subsecuentes se diseñaron de modo que permitan dos rutas posibles: Se pueden usar las ecuaciones diferenciales generales presentadas en este capítulo, o se pueden derivar ecuaciones únicas para una geometría particular sin referirse a estas ecuaciones generales.

En el capítulo 4 las leyes básicas se expresaron en función de un volumen de control fijo, un volumen finito en el espacio. Esto a menudo se describe como una aproximación global a la mecánica de fluidos. Para encontrar una solución utilizando el volumen de control fue necesario: asumir una aproximación de los integrandos (principalmente las distribuciones de velocidad y presión) o se dieron las expresiones para los integrandos. Suponga que se desea encontrar una cantidad integral, tal como la velocidad de flujo debajo de un dique, o la fuerza de elevación en una superficie aerodinámica, y no se puede hacer una suposición razonable para la distribución de velocidad o presión. En tal caso es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que la cantidad integral pueda ser calculada. Esto se hace resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales que expresan las leyes básicas.

No sólo las soluciones de las formas diferenciales de las leyes básicas permiten determinar cantidades integrales de interés, sino que con frecuencia contienen información en sí mismas. Por ejemplo, es posible que se desee saber la ubicación exacta de la presión mínima en un cuerpo, o la región de flujo separado de una superficie. Así que con frecuencia se resuelven las ecuaciones diferenciales para responder una pregunta específica surgida en relación con un flujo especial.

Existen dos métodos principalmente utilizados para derivar las formas diferenciales de las leyes fundamentales. Un método implica la aplicación del teorema de Gauss, que permite que las integrales de área de las ecuaciones básicas del capítulo 4 sean transformadas en integrales de volumen; los integrandos luego se reúnen en una integral, la cual puede ser igualada a cero. La integración es válida en cualquier volumen de control arbitrario, y de ese modo el integrando mismo puede ser igualado a cero, lo que da la forma diferencial de la ley básica. El otro método, el utilizado en este libro, consiste en identificar un elemento infinitesimal en el espacio y aplicar las leyes básicas directamente a dicho elemento. Ambos métodos dan por resultado las formas diferenciales de las leyes básicas; el primer método, sin embargo, exige el uso de cálculo vectorial y tensorial, matemáticas que por regla general se consideran innecesarias en un primer curso de fluidos. Se introduce algo de cálculo vectorial pero no será utilizado al nivel operacional demandado por el teorema de Gauss.

La conservación de la masa, aplicada a un elemento infinitesimal, conduce a la ecuación diferencial de continuidad; relaciona los campos de densidad y velocidad.<sup>1</sup> La segunda ley de Newton (una relación vectorial) produce tres ecuaciones diferenciales parciales conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes; relacionan los campos de velocidad, presión y densidad e introducen la viscosidad y el vector de gravedad en un flujo de fluido. La primera ley de la termodinámica proporciona la ecuación de energía diferencial relacionando el campo de temperatura con los campos de velocidad, densidad y presión e introduce el calor específico y la conductividad. La mayoría de los problemas considerados en un curso introductorio son flujos incompresibles isotérmicos en los que el campo de temperatura no

### CONCEPTO CLAVE

*Es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que la cantidad integral pueda ser hallada.*

<sup>1</sup>Cuando una variable dependiente depende de más de una variable independiente, se conoce como campo, es decir,  $V(x, y)$  es un campo de velocidad y  $p(x, y, z, t)$  es un campo de presión. Las ecuaciones diferenciales parciales que describen las cantidades de campo a menudo reciben el nombre *ecuaciones de campo*.

interviene; para flujos como esos las tres ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad proporcionan cuatro ecuaciones diferenciales parciales que relacionan las tres componentes de velocidad y la presión. De este modo no se requiere la ecuación de energía. Sin embargo, se derivará la ecuación diferencial de energía para ser utilizada en un número limitado de situaciones.

Las ecuaciones diferenciales parciales requieren condiciones que especifiquen ciertos valores para las variables dependientes con valores particulares de las variables independientes. Si la variable independiente es el tiempo, las condiciones se llaman **condiciones iniciales**; si la variable independiente es una coordenada espacial, las condiciones son **condiciones límite**. El problema total se conoce como *problema de valor inicial* o *problema de valor límite*.

En mecánica de fluidos las condiciones límite se derivan de:

- Las condiciones no deslizantes de un flujo viscoso. La viscosidad hace que el fluido se pegue en la pared y por lo tanto la velocidad del fluido en la pared asume la velocidad de ésta. En general la velocidad de la pared es cero.
- La componente normal de velocidad en un flujo inviscido, un flujo en el que los efectos viscosos son insignificantes. Cerca de una pared no porosa el vector de velocidad debe ser tangente a la pared. Esta sería la situación que implica oleaje, o en un flujo separado que implica cavitación.
- La presión de un fluido que involucra una superficie libre. En problemas con una superficie libre, como los de un fluido con una interfase líquido-gaseosa, la presión es conocida en esta interfase. Esta se vería en problemas con movimientos de ondas o de un flujo separado que involucre cavitación.
- La temperatura del límite o el gradiente de temperatura en el límite. Si la temperatura del límite se mantiene constante, la temperatura del fluido junto al límite será igual a la temperatura de éste. Si el límite está aislado, el gradiente de temperatura será cero en el límite.

En un flujo discontinuo la condición inicial demanda que las tres componentes de velocidad se especifiquen en todos los puntos del flujo en un instante particular, casi siempre considerado como  $t = 0$ . Esta información es muy difícil de obtener en muchas situaciones, por ejemplo, la atmósfera; para obtener las tres componentes de velocidad en cualquier parte de la atmósfera en un instante dado es una tarea casi imposible.

Las ecuaciones diferenciales adoptan formas muy diferentes según el sistema de coordenadas elegido. Las ecuaciones se derivan utilizando coordenadas rectangulares y luego se expresan en forma vectorial. Las formas que utilizan tanto coordenadas cilíndricas como esféricas se presentan en la tabla 5.1 al final del capítulo.

#### Condiciones iniciales:

*Condiciones que dependen del tiempo.*

#### Condiciones límite:

*Condiciones que dependen de una coordenada espacial.*

#### CONCEPTO CLAVE

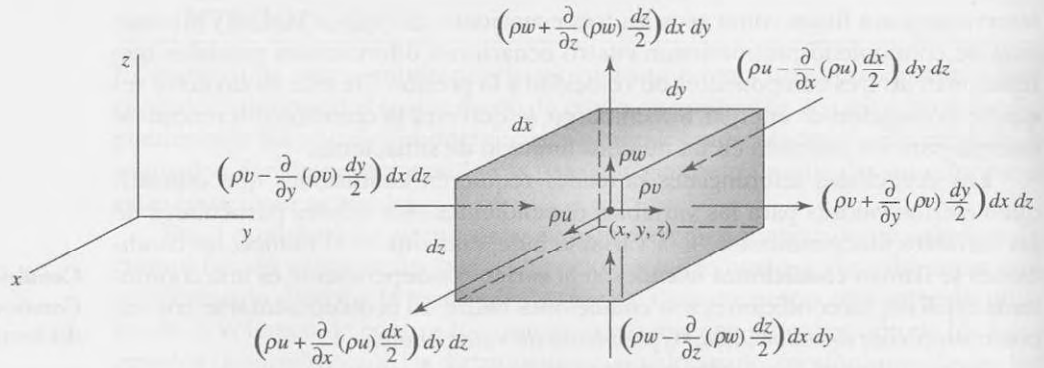
*La viscosidad provoca que la velocidad del fluido pegado a la pared, asuma la velocidad de ésta.*

## 5.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONTINUIDAD

La búsqueda de las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el movimiento detallado de un fluido se inicia aplicando la conservación de la masa a un volumen pequeño en un flujo de fluido. Considere el flujo de masa a través de cada una de las caras del volumen de control mostrado en la figura 5.1. El flujo de masa neto que entra al elemento se hace igual a la velocidad de cambio de la masa del elemento; es decir,

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \frac{\partial}{\partial t} m_{\text{elemento}} \quad (5.2.1)$$

Para realizar este balance de masa  $\rho u$ ,  $\rho v$  y  $\rho w$  se identifican en el centro del elemento y luego cada una de estas cantidades se tratan como una sola variable. Vease el



**FIGURA 5.1** Volumen de control infinitesimal que utiliza coordenadas rectangulares.

análisis de presión asociado con la figura 2.3. La figura 5.1 muestra el flujo de masa a través de cada una de las seis caras; la ecuación 5.2.1 adopta la forma

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz - \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz \\
 & + \left[ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz \\
 & + \left[ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy - \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz)
 \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Restando los términos apropiados y dividiendo entre  $dx dy dz$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.2.3)$$

Puesto que la densidad se considera una variable, se diferencian los productos y la ecuación 5.2.3 se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.2.4)$$

o, en función de la derivada sustancial (véase la Ec. 3.2.11),

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.2.5)$$

**Ecuación diferencial de continuidad:** La ecuación diferencial que resulta de la conservación de la masa.

Ésta es la forma más general de la **ecuación diferencial de continuidad** expresada en coordenadas rectangulares.

Se introduce el **operador de gradiente**, llamado “del”, el cual, en coordenadas rectangulares es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (5.2.6)$$

La ecuación de continuidad entonces se escribe en la forma



$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5.2.7)$$

donde  $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$  y  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  recibe el nombre de *divergencia* de la velocidad. Esta forma de la ecuación de continuidad no se refiere a cualquier sistema particular de coordenadas. Es la forma utilizada para expresar la ecuación de continuidad mediante varios sistemas de coordenadas.

En el caso de *flujo incompresible*, un flujo en el cual la densidad de la partícula de un fluido no cambia a medida que se desplaza, se ve que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (5.2.8)$$

Observe que esta suposición es menos restrictiva que la suposición de densidad constante, la cual requerirá que cada término de la ecuación 5.2.8 sea cero. Los flujos incompresibles que tienen gradientes de densidad en ocasiones se conocen como *flujos estratificados* o *flujos no homogéneos*; los flujos atmosféricos y oceánicos son ejemplos de flujos de esa clase. Si se utiliza la ecuación 5.2.5, la ecuación de continuidad, para un flujo incompresible, adopta la forma

#### CONCEPTO CLAVE

Para un flujo incompresible,  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.2.9)$$

o, en forma vectorial,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5.2.10)$$

La divergencia del vector de velocidad es cero en un flujo incompresible.

En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación de continuidad para un flujo incompresible se presenta en la tabla 5.1. La expresión para  $D/Dt$  en coordenadas cilíndricas y esféricas también se encuentra en la tabla 5.1.

### Ejemplo 5.1

La componente  $x$  de velocidad está dada por  $u(x, y) = Ay^2$  en un flujo plano incompresible. Determine  $v(x, y)$  si  $v(x, 0) = 0$ , como sería en el caso de un flujo entre placas paralelas.

#### Solución

La ecuación diferencial de continuidad para un flujo plano incompresible es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

puesto que en un flujo plano las dos componentes de velocidad dependen sólo de  $x$  y  $y$ . Con la  $u(x, y)$  dada se encuentra que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (Ay^2) = 0$$

Ya que ésta es una ecuación diferencial parcial, su solución es

$$v(x, y) = f(x)$$

(continúa)

Pero  $v(x, 0) = 0$  requiere que  $f(x) = 0$ . Por consiguiente,

$$v(x, y) = 0$$

es la componente  $y$  de la velocidad demandada por la conservación de la masa. Para que  $v(x, y)$  no sea cero,  $u(x, y)$  tendría que variar con  $x$  o  $v(x, 0)$  tendría que ser no cero.

### Ejemplo 5.2

Fluye aire por un tubo y la velocidad en tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con una separación entre sí de 4 pulg, es de 274, 285 y 291 ft/seg, respectivamente, como se muestra en la figura E5.2. La temperatura y presión son 50°F y 50 psia, respectivamente, en el punto  $B$ . Aproxime  $d\rho/dx$  en dicho punto, suponiendo flujo uniforme continuo.

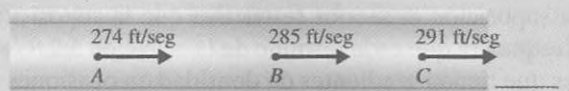


FIGURA E5.2

#### Solución

La ecuación de continuidad (5.2.4) para este flujo uniforme ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), continuo ( $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ ) se reduce a

$$u \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{du}{dx} = 0$$

Se utilizan derivadas ordinarias puesto que  $u$  y  $\rho$  dependen sólo de  $x$ . La derivada de velocidad se representa de una manera aproximada mediante

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{291 - 274}{8/12} = 25.5 \frac{\text{ft/seg}}{\text{ft}}$$

donde se utilizó la diferencia central más precisa<sup>2</sup>. La densidad es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{50 \times 144}{1716 \times (50 + 460)} = 0.00823 \text{ slug/ft}^3$$

donde se utilizaron la presión y temperatura absolutas. La derivada de densidad es por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} &= -\frac{\rho}{u} \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{0.00823}{285} \times 25.5 = -0.000736 \text{ slug/ft}^4 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Si se utiliza una diferencia adelantada  $\Delta u/\Delta x = (291 - 285)/0.333 = 18$ ; una diferencia retrasada  $\Delta u/\Delta x = (285 - 274)/0.333 = 33$ . Estas dos aproximaciones son menos precisas que la diferencia central utilizada en el ejemplo. Un bosquejo de la curva general  $u(x)$  podría demostrar gráficamente esto al mostrar tres puntos  $x - \Delta x$ ,  $x$  y  $x + \Delta x$  y junto con las pendientes.

### Ejemplo 5.3

La componente  $x$  de la velocidad en los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , con una separación entre sí de 10 mm, es de 5.76, 6.72, 7.61 y 8.47 m/s, respectivamente, en el flujo incompresible plano, continuo, simétrico mostrado en la figura E5.3 en el cual  $w = 0$ . Calcule la componente  $x$  de la aceleración en  $C$  y la componente  $y$  de la velocidad a 6 mm sobre  $B$ .

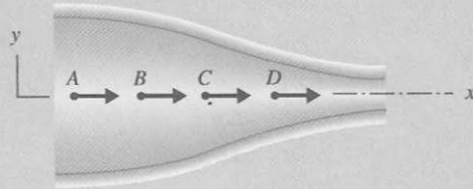


FIGURA E5.3

**Solución**

La componente de la aceleración deseada de acuerdo con la ecuación 3.2.9 es

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\cong u \frac{\Delta u}{\Delta x} = 7.61 \frac{8.47 - 6.72}{0.02} = 666 \text{ m/s}^2$$

donde se supuso un flujo simétrico de modo que  $v$  a lo largo de la línea de eje o media es cero. Se utilizaron diferencias centrales para evaluar  $\partial u / \partial x$  en el punto C, como se hizo en el ejemplo 5.2 (véase la nota al pie 2).

La componente  $y$  de la velocidad a 6 mm sobre B se determina con la ecuación de continuidad (5.2.9) como sigue:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} \cong - \frac{\Delta u}{\Delta x} = - \frac{7.61 - 5.76}{0.02} = -92.5$$

$$\therefore \Delta v = -92.5 \Delta y = -92.5 \times 0.006 = -0.555 \text{ m/s}$$

Se sabe que  $v = 0$  en B; por consiguiente en el lugar deseado, con  $\Delta v = v - v_B$ , se obtiene

$$v = -0.555 \text{ m/s}$$

**Ejemplo 5.4**

Para cambiar la forma de una expresión se puede usar la ecuación de continuidad. Escriba la expresión  $\rho D\tilde{u}/Dt + p \nabla \cdot \mathbf{V}$  en función de la entalpía  $h$  y no de la energía interna  $\tilde{u}$ . Recuerde que  $h = \tilde{u} + p/\rho$  (véase la Ec. 1.7.11).

**Solución**

Utilizando la definición de entalpía, se escribe

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

donde se utilizó

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

La expresión deseada es entonces

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V}$$

(continúa)

Se introduce la ecuación (5.2.7) y se obtiene

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} &= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + p \left( -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) \\ &= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}\end{aligned}$$

y de este modo se introduce la entalpía.

## 5.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

### 5.3.1 Formulación general

Suponga que no se conoce el campo de velocidad o el campo de presión en un flujo incompresible<sup>3</sup> de interés y se desea resolver las ecuaciones diferenciales para obtener dicha información. La ecuación diferencial de continuidad es una ecuación diferencial que sirve para este fin; sin embargo, tiene tres incógnitas, las tres componentes de la velocidad. La ecuación diferencial de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial y por consiguiente proporciona tres ecuaciones escalares. Estas ecuaciones ayudan en el intento de determinar los campos de velocidad y presión. Existe una dificultad al derivar estas ecuaciones, sin embargo, puesto que se deben utilizar las componentes de esfuerzo para determinar las fuerzas requeridas en la ecuación de cantidad de movimiento. A continuación se identifiquen estas componentes de esfuerzo.

Existen nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular de un flujo de fluido. Existen nueve componentes del tensor de esfuerzo  $\tau_{ij}$ . No se estudiarán las propiedades de un tensor de esfuerzo en detalle puesto que no se tiene que incrementar al máximo o reducir al mínimo el esfuerzo (como se requeriría en un curso de mecánica de sólidos; sin embargo, se tienen que utilizar las nueve componentes del esfuerzo en las derivaciones, y luego relacionar las componentes de esfuerzo con los campos de velocidad y presión por medio de las ecuaciones apropiadas. Las componentes de esfuerzo que actúan en un punto se muestran en elementos rectangular bi y tridimensionales en la figura 5.2. Se considera que estos elementos son un punto exagerado, un punto cúbico; las componentes de esfuerzo actúan en la dirección positiva en una cara positiva (un vector normal apunta en la dirección coordenada positiva) y en la dirección negativa en una cara negativa (un vector normal apunta en la dirección coordenada negativa). El primer subíndice en una componente de esfuerzo señala la cara sobre la cual actúa la componente, y el segundo denota la dirección en la cual actúa; la componente  $\tau_{xy}$  actúa en la dirección y positiva en una cara  $x$  positiva y en la dirección y negativa en una cara  $x$  negativa, como se muestra en la figura 5.2a. Una componente de esfuerzo que actúa perpendicular a una cara se conoce como **esfuerzo normal**, las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  son esfuerzos normales. Una componente de esfuerzo que actúa tangencial a una cara recibe el nombre de **esfuerzo cortante**; las componentes  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zy}$  son las componentes de esfuerzo cortante.

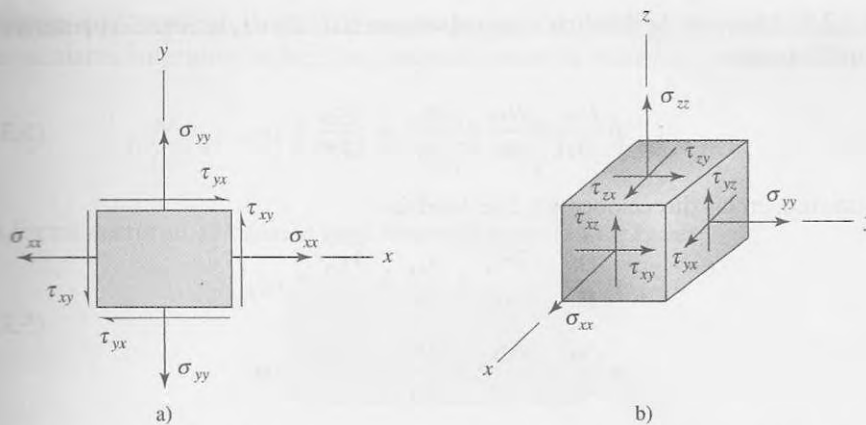
Existen nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular de un fluido. Para derivar la ecuación diferencial de cantidad de movimiento, considere las fuerzas que actúan en la partícula de fluido infinitesimal mostrada en la

**Esfuerzo normal:** Un componente de esfuerzo que actúa perpendicular a un área.

**Esfuerzo cortante:** Una componente de esfuerzo que actúa tangencial a un área.

<sup>3</sup>Cuando en un planteamiento general como el de esta sección se hace referencia a un flujo incompresible, en general se está haciendo referencia a un flujo de densidad constante. Esto es cierto en la mayoría de los escritos de mecánica de fluidos, incluidos libros de textos sobre el tema.





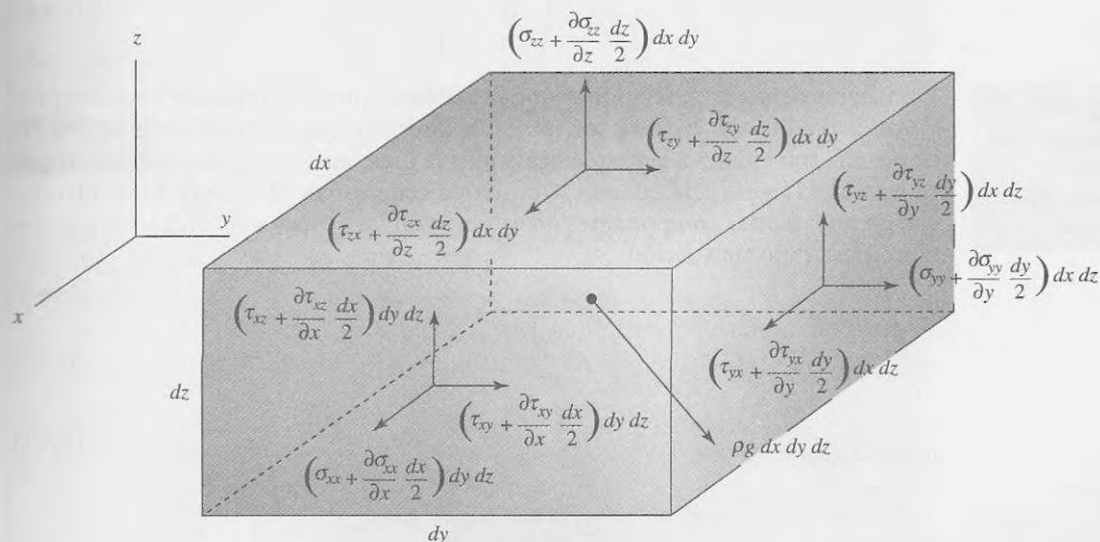
**FIGURA 5.2** Componentes de esfuerzo en coordenadas rectangulares: a) componentes de esfuerzo en dos dimensiones; b) componentes de esfuerzo en tres dimensiones.

figura 5.3. Se muestran sólo las fuerzas que actúan en las caras positivas. Se supone que las componentes de esfuerzo son funciones de  $x, y, z$  y  $t$  y por lo tanto sus valores cambian de una cara a otra puesto que la ubicación de cada una es ligeramente diferente. La fuerza de cuerpo se muestra actuando en una dirección arbitraria.

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula de fluido, en la dirección de la componente  $x$ , es  $\Sigma F_x = ma_x$ . Para la partícula mostrada, ésta toma la forma

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ & - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ & - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + \rho g_x dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

donde la componente del vector de gravedad  $\mathbf{g}$  que actúa en la dirección  $x$  es  $g_x$ , y  $Du/Dt$  es la componente  $x$  de la aceleración de la partícula de fluido (véase la



**FIGURA 5.3** Fuerzas que actúan en una partícula infinitesimal.

Ec. 3.2.9). Después de dividirla entre el volumen  $dx \, dy \, dz$ , la ecuación anterior se simplifica como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \quad (5.3.2)$$

Asimismo, en las direcciones  $y$  y  $z$  se tendría

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \quad (5.3.3)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

Se puede demostrar, tomando momentos en torno a los ejes que pasan por el centro del elemento infinitesimal, que

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (5.3.4)$$

Esto es, el tensor de esfuerzo es simétrico; así que en realidad existen seis componentes de esfuerzo independientes.

El tensor de esfuerzo puede ser mostrado de la manera usual como

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

Los subíndices  $i$  y  $j$  toman los valores numéricos 1, 2 o 3. Entonces,  $\tau_{12}$  representa el elemento  $\tau_{xy}$  en la primer fila, segunda columna.

### 5.3.2 Ecuaciones de Euler

Buenas aproximaciones de las componentes del tensor de esfuerzo para muchos flujos, en especial para flujo alejado de una frontera (flujo alrededor de una superficie aerodinámica) o en regiones de cambio repentino (flujo a través de una contracción) se muestran mediante el arreglo

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

#### CONCEPTO CLAVE

A menudo se supone que las componentes de esfuerzo son insignifican-temente pequeñas.

Para flujos como esos, se supuso que las componentes de esfuerzo cortante provocados por efectos viscosos son insignificantes y que las componentes de esfuerzo normal son iguales a la parte negativa de la presión; esto es precisamente lo que se hizo en la figura 3.16 cuando se derivó la ecuación de Bernoulli. Si se introducen de nuevo estas componentes de esfuerzo en las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 se obtiene, para flujo sin fricción,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Suponga que el eje  $z$  es vertical de modo que  $g_x = g_y = 0$  y  $g_z = -g$ . Las ecuaciones escalares anteriores se escriben entonces como la ecuación vectorial

$$\rho \frac{D}{Dt} (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) - \rho g\hat{k} \quad (5.3.8)$$

En forma vectorial, se tiene la muy conocida **ecuación de Euler**

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho g\hat{k} \quad (5.3.9)$$

**Ecuación de Euler:** Las tres ecuaciones diferenciales que resultan de la aplicación de la segunda ley de Newton y la omisión de los efectos viscosos.

Si se supone un flujo continuo de densidad constante, la ecuación 5.3.9 es integrada a lo largo de una línea de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli, un resultado que no sorprende puesto que se hicieron las mismas suposiciones cuando se derivó la ecuación de Bernoulli en el capítulo 3; esto se ilustra en el ejemplo 5.6.

Con las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento en la forma de las ecuaciones 5.3.7, se agregaron tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$ . Con las condiciones límite e iniciales apropiadas, sería posible una solución que dé los campos de velocidad y presión para este flujo inviscido incompresible.

### Ejemplo 5.5

Se propone que un campo de velocidad sea

$$u = \frac{10y}{x^2 + y^2} \quad v = -\frac{10x}{x^2 + y^2} \quad w = 0$$

a) ¿Es éste un posible flujo incompresible? b) Si lo es, encuentre el gradiente de presión  $\nabla p$  suponiendo un flujo de aire libre de fricción con el eje  $z$  vertical. Use  $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ .

#### Solución

a) Se utiliza la ecuación de continuidad (5.2.9) para determinar si el campo de velocidad es posible. Para este flujo incompresible se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Sustituyendo en las componentes de velocidad, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{10y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{10x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-10y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-10x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [-20xy + 20xy] = 0$$

La cantidad entre corchetes es obviamente cero; por lo tanto el campo de velocidad dado es un posible flujo incompresible.

b) El gradiente de presión se encuentra con la ecuación de Euler. En su forma de componentes se tiene lo siguiente:

(continúa)

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x^0 \\ \therefore \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= -1.23 \left[ \frac{10y}{x^2 + y^2} \frac{-20xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2} \frac{(x^2 + y^2)10 - 10y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{123x}{(x^2 + y^2)^2} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y^0 \\ \therefore \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \\ &= -1.23 \left[ \frac{10y}{x^2 + y^2} \frac{(x^2 + y^2)(-10) + 10x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2} \frac{20xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{123y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z^0 \\ \therefore \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g_z = 1.23 \times (-9.81) = -12.07 \text{ Pa/m}\end{aligned}$$

$$\text{De este modo } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \frac{123}{(x^2 + y^2)^2} (x\hat{i} + y\hat{j}) - 12.07\hat{k} \text{ Pa/m}$$

### Ejemplo 5.6

Suponga un flujo continuo de densidad constante e integre la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente en un flujo plano.

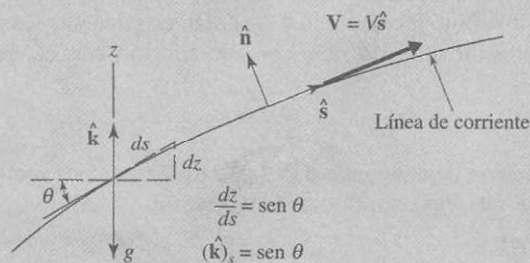


FIGURA E5.6

#### Solución

Primero, la derivada sustancial se expresa en coordenadas de la línea de corriente. Como el vector de velocidad es tangente a la línea de corriente, se escribe

$$\mathbf{V} = V \hat{s}$$

donde  $\hat{s}$  es el vector unitario tangente a la línea de corriente y  $V$  la magnitud de la velocidad, como se muestra en la figura E5.6. La derivada sustancial es entonces, para este flujo plano,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V \frac{\partial(V \hat{s})}{\partial s} + (\vec{V})_n \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \hat{s} + V^2 \frac{\partial \hat{s}}{\partial s}$$



La cantidad  $\partial \hat{s}/\partial s$  se deriva del cambio del vector unitario  $\hat{s}$ ; el vector unitario no puede cambiar de magnitud (siempre debe tener la magnitud de 1), sólo cambia de dirección. Por consiguiente la derivada  $\partial \hat{s}/\partial s$  es en una dirección normal a la línea de corriente y no entra en la ecuación de componentes de línea de corriente. Para un flujo continuo  $\partial V/\partial t = 0$ . Por consiguiente, en la dirección de la línea de corriente, la ecuación de Euler (5.3.9) adopta la forma

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s}$$

reconociendo que la componente de  $\hat{k}$  a lo largo de la línea de corriente se expresa como  $(\hat{k})_s = \partial z/\partial s$  (véase la Fig. anterior). Observe que en esta ecuación se utilizan derivadas parciales puesto que la velocidad y presión también varían con la coordenada normal.

La ecuación anterior puede ser escrita, si se supone densidad constante  $\partial \rho/\partial s = 0$ , como

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0$$

Si se integra a lo largo de la línea de corriente se obtiene

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{const.}$$

Esta, desde luego, es la ecuación de Bernoulli. Se integró a lo largo de una línea de corriente suponiendo densidad constante, flujo continuo, efectos viscosos, y un marco de referencia inercial, así que era de esperarse que emergiera la ecuación de Bernoulli.

### 5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Muchos fluidos manifiestan una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad. Tales fluidos se llaman **fluidos newtonianos** e incluyen fluidos comunes tales como agua, aceite y aire. Si además de linealidad, se requiere que el fluido sea **isotrópico**<sup>4</sup>, es posible relacionar las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad utilizando sólo dos propiedades de fluido, la viscosidad  $\mu$  y el *segundo coeficiente de viscosidad*  $\lambda$ . Las relaciones de esfuerzo-gradiente de velocidad, a menudo conocidas como *ecuaciones constitutivas*<sup>5</sup>, se formulan como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} & \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} & \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} & \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Para la mayoría de los gases, y para gases monoatómicos exactamente, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad mediante

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (5.3.11)$$

#### Fluidos newtonianos:

Fluidos que poseen una relación lineal entre esfuerzo y gradientes de velocidad.

**Fluido isotrópico:** Un fluido cuyas propiedades son independientes de la dirección en una posición dada.

<sup>4</sup>La condición de entropía existe si las propiedades de fluido son independientes de la dirección. Los polímeros son ejemplos de fluidos anisotrópicos.

<sup>5</sup>En cualquier libro de texto sobre el tema de mecánica de medios continuos se pueden hallar detalles del desarrollo de ecuaciones constitutivas.

una condición conocida como *hipótesis de Stokes*. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión, esto es,

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p \quad (5.3.12)$$

Mediante las ecuaciones 5.3.10, se puede demostrar que esto siempre es cierto para un líquido en el cual  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , con la hipótesis de Stokes también es cierto para un gas.

Si se sustituyen las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento (5.3.2) y (5.3.3), se obtiene, utilizando la hipótesis de Stokes,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

#### Fluido homogéneo:

*Un fluido cuyas propiedades son independientes de la posición.*

en la que se supuso un **fluido homogéneo**, es decir, las propiedades del fluido (p. ej., la viscosidad) son independientes de la posición.

Para un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite que las ecuaciones anteriores se reduzcan a

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

#### Ecuaciones de

**Navier-Stokes:** *Las tres ecuaciones diferenciales que resultan de la aplicación de la segunda ley de Newton.*

Estas son las **ecuaciones de Navier-Stokes**, llamadas así en honor de Louis M. H. Navier (1785-1836) y George Stokes (1819-1903); con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$ . la viscosidad y densidad son propiedades de fluido que supuestamente se conocen. Con las condiciones de límite e iniciales apropiadas las ecuaciones pueden ser resueltas. Varias geometrías relativamente simples permiten soluciones analíticas; algunas de ellas se presentan en el capítulo 7. También se determinaron soluciones numéricas para muchos flujos de interés; en el capítulo 15 se presentan métodos computacionales. Como la ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales (los términos de aceleración hacen que las ecuaciones sean no lineales como se observa en las ecuaciones 3.2.9, no se puede asegurar que la solución encontrada en realidad será verificada en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo, un flujo laminar y un flujo turbulento pueden tener condiciones iniciales y de límite idénticas, no obstante los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se resolvieron para un flujo turbulento. Todos los flujos turbulentos son discontinuos y tridimensionales y por consiguiente las derivadas con respecto al tiempo deben ser retenidas. Esto requiere una condición inicial en todas la variables dependientes; es decir,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$  deben ser

conocidas en todos los puntos en el campo de flujo en el instante  $t = 0$ . Tal información sería extremadamente difícil, si no es que imposible, de obtener. Para evitar esta situación, se introducen las cantidades promediadas con respecto al tiempo para flujos turbulentos. Este tema será estudiado en un capítulo posterior.

Las ecuaciones Navier-Stokes se expresan en forma vectorial multiplicando las ecuaciones 5.3.14 por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente, y sumándolas. Se reconoce que

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt}\hat{i} + \frac{Dv}{Dt}\hat{j} + \frac{Dw}{Dt}\hat{k} &= \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \\ \frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} &= \nabla p \\ \nabla^2 u\hat{i} + \nabla^2 v\hat{j} + \nabla^2 w\hat{k} &= \nabla^2 \mathbf{V}\end{aligned}\quad (5.3.15)$$

donde se utilizó el Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.3.16)$$

Si se combina la anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes (5.3.14) adoptan la forma vectorial

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (5.3.17)$$

Con esta forma vectorial las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser expresadas en otros sistemas de coordenadas. En la tabla 5.1 las ecuaciones se dan en coordenadas cilíndricas y esféricas.

### Ejemplo 5.7

Simplifique la ecuación de Navier-Stokes correspondiente a la componente  $x$  para flujo continuo en un canal rectangular horizontal suponiendo todas las líneas de corriente paralelas a las paredes. Sea la dirección  $x$  la dirección del flujo (Fig. E5.7).

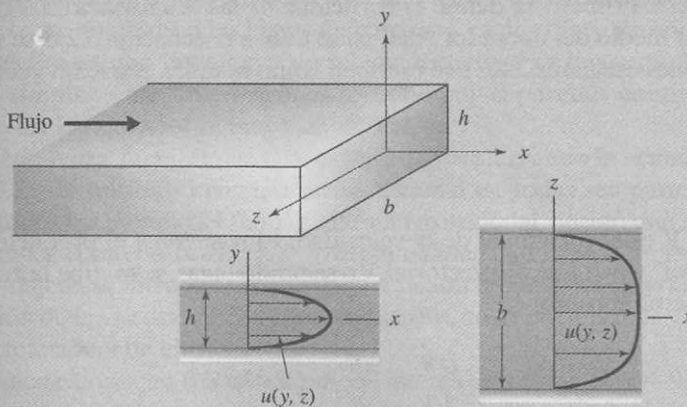


FIGURA E5.7

#### Solución

Si las líneas de corriente son paralelas a las paredes, sólo la componente  $x$  de la velocidad será no cero. Con  $v = w = 0$  la ecuación de continuidad (5.2.9) para un flujo incom-

(continúa)

presible es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lo que demuestra que  $u = u(y, z)$ . La aceleración es entonces

$$\frac{Du}{Dt} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $x$  se simplifica como

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu \left( \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

o

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Con las condiciones de límite apropiadas (las condiciones de no deslizamiento), se podría buscar una solución de la ecuación anterior. Da los perfiles de velocidad mostrados en la figura E5.7.

### 5.3.4 Ecuaciones de vorticidad

Existen ciertos fenómenos de flujo de fluidos que no pueden ser explicados o comprendidos sin hacer referencia a las ecuaciones de vorticidad, ecuaciones derivadas de las ecuaciones de Navier-Stokes (El Ej. 5.8 proporciona un fenómeno de ese tipo). Además de dar una idea más completa de tales fenómenos, las ecuaciones de vorticidad no contienen los términos de presión o gravedad encontrados en las ecuaciones de Navier-Stokes, sino que contienen términos que implican la velocidad únicamente. Como las condiciones de límite con suma frecuencia involucran sólo la velocidad, las ecuaciones de vorticidad a menudo son las ecuaciones elegidas para soluciones numéricas.

Para derivar las ecuaciones de vorticidad se toma el rotacional de la ecuación 5.3.17, la forma vectorial de las ecuaciones de Navier-Stokes. Ésta es una tarea difícil, de modo que aquí no se explicarán los pasos sino simplemente el plan general del proceso. Primero, se define la vorticidad de las ecuaciones 3.2.21 en forma vectorial por medio del operador “del”; si se utiliza la ecuación 5.2.6, se ve que las tres ecuaciones escalares 3.2.21 se escriben como la única ecuación vectorial

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (5.3.18)$$

donde  $\nabla \times \mathbf{V}$  es el rotacional de la velocidad. El *rotacional* el producto cruz del operador “del” y una función vectorial. En segundo lugar, se escribe la aceleración en forma vectorial como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (5.3.19)$$

donde se utilizaron las ecuaciones 3.2.8, 3.2.10 y 5.2.6. Por último, se escribe la rotación de la ecuación vectorial de Navier-Stokes (5.3.17):

$$\nabla \times \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla \times \nabla p + \rho \nabla \times \mathbf{g} + \mu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{V} \quad (5.3.20)$$



El rotacional del gradiente de una función escalar y el rotacional de una constante son cero. Además, como se puede intercambiar la diferenciación, escribimos

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \quad (5.3.21)$$

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{V} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

El paso difícil, el cual se dejará de tarea, se presenta al demostrar que

$$\nabla \times [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (5.3.22)$$

La ecuación 5.3.20 se convierte entonces, suponiendo que  $\rho$  y  $\mu$  son constantes, en la **ecuación de vorticidad**,

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (5.3.23)$$

La ecuación se escribe como tres ecuaciones escalares. En coordenadas rectangulares, las tres ecuaciones de vorticidad son

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_x \\ \frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_y \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_z \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Como la vorticidad es el rotacional de la velocidad, observe que todos los términos en las ecuaciones de vorticidad implican sólo la velocidad y sus derivadas. Por consiguiente, las ecuaciones de vorticidad a menudo llegan a ser las ecuaciones a elegir cuando se resuelven problemas que requieren ecuaciones diferenciales de movimiento. De hecho, se hace referencia a las líneas de vórtice y a los tubos de vórtice como similares a las líneas de corriente y a los tubos de corriente. Una **línea de vórtice** es una línea cuyo vector de vorticidad es tangente. Un **tubo de vórtice**, o simplemente un **vórtice**, es un tubo cuyas paredes contienen líneas de vórtice. En la figura 5.4 se muestra un vórtice.

Se puede hacer una interesante conclusión considerando la ecuación de vorticidad 5.3.23. Si un flujo inviscido es irrotacional en todas sus partes (es decir,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  en todos los puntos del flujo), debe ser irrotacional, puesto que  $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$ . Esto se conoce como *persistencia de irrotacionalidad*. Además, si un flujo se aproxima a un objeto, se introduce vorticidad (rotación de sus partículas) al flujo sólo por la acción de la viscosidad. Sin efectos viscosos, no se puede crear vorticidad en un flujo irrotacional de entrada.

Los flujos planos con frecuencia son de interés particular. Si  $w = 0$ ,  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  la única componente de vorticidad es  $\omega_z$ . Para un flujo de esa índole, la ecuación de vorticidad adquiere la forma

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega_z \quad (5.3.25)$$

#### Ecuación de vorticidad:

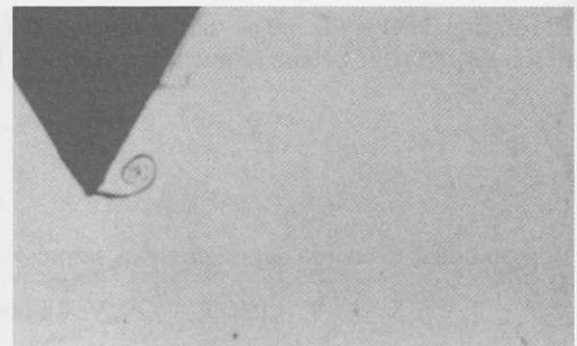
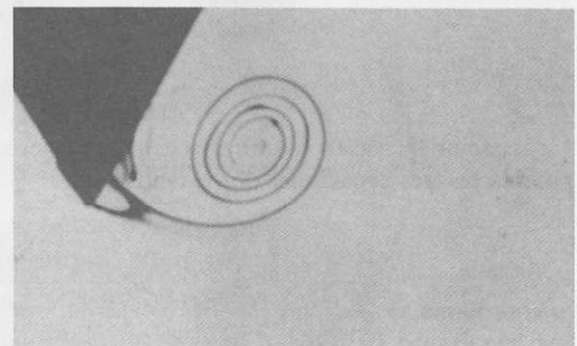
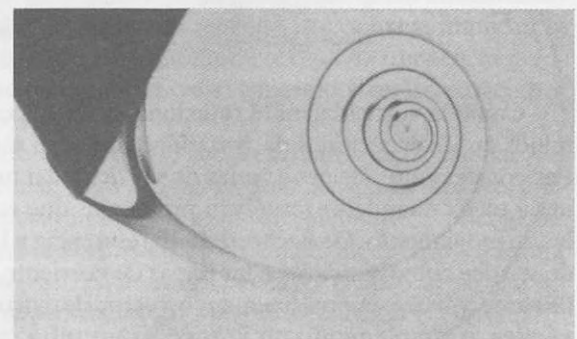
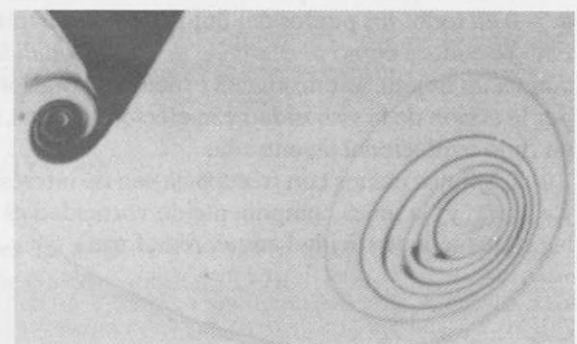
Ecuación derivada después de considerar la rotación de la ecuación de Navier-Stokes. La ecuación de vorticidad no contiene términos que impliquen presión o gravedad.

#### CONCEPTO CLAVE

Las ecuaciones de vorticidad involucran únicamente a la velocidad y sus derivadas.

**Línea de vórtice:** Una línea a la cual el vector de vorticidad es tangente.

**Tubo de vórtice:** Un haz de líneas de vórtice.

 $t=1.0\text{ s}$  $t=5.0\text{ s}$  $t=9.0\text{ s}$  $t=13.0\text{ s}$ 

**FIGURA 5.4** Iniciando un vórtice en una cuña. Un pistón impulsa agua normal al eje de una cuña. Se inyecta un colorante en el agua a través de pequeños orificios en la superficie de la cuña. El número característico del número de Reynolds es del orden de 100. El pistón se detiene después de 12.5 s, y produce un vórtice de detención en la última fotografía. (Cortesía de The Parabolic Press, Stanford, California. Reimpresa con permiso).

Se observa que se requieren efectos viscosos para provocar cambios de vorticidad en un flujo plano.

El ejemplo siguiente ilustra un fenómeno de flujo que puede ser explicado fácilmente con el uso de la ecuación de vorticidad.

### CONCEPTO CLAVE

Se requieren efectos viscosos que provoquen cambios de vorticidad en un flujo plano.

### Ejemplo 5.8

En una tormenta de nieve, la nieve en realidad se ahueca frente de un árbol, como se muestra en la figura E5.8a. Explique este fenómeno recurriendo a las ecuaciones de vorticidad.

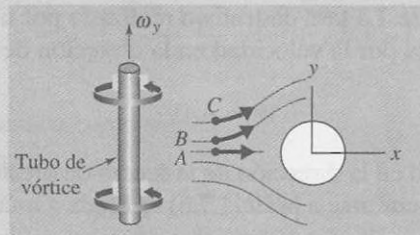
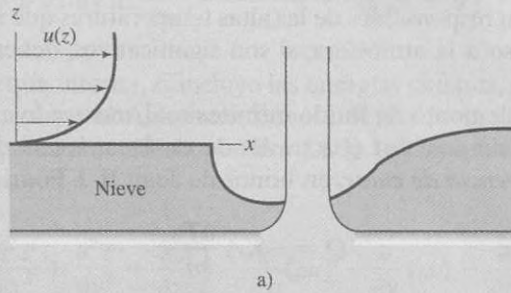


FIGURA E5.8

### Solución

Sea la velocidad en la proximidad del árbol en la dirección  $x$  con un gradiente de velocidad  $\partial u / \partial z$  cerca del suelo. Las componentes de vorticidad son entonces (remítase a las Ecs. 3.2.21)

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \omega_z = 0$$

La ecuación de vorticidad (5.3.24) para  $\omega_y$ , si se ignoran los efectos viscosos en el corto recorrido del flujo, se reduce a

$$\frac{D\omega_y}{Dt} = \omega_y \frac{\partial v}{\partial y}$$

Observe en la figura E5.8b que cerca del árbol  $\partial v / \partial y$  es positiva puesto que  $v_C > v_B > v_A$ . (Se demuestra que  $\partial v / \partial y$  es positiva también con  $y$  negativa). Como  $\omega_y$  y  $\partial v / \partial y$  son ambas positivas,  $D\omega_y / Dt$  es positiva y  $\omega_y$  se incrementa conforme los tubos de vórtice se aproximan al árbol. Esta vorticidad incrementada crea un fuerte vórtice frente del árbol lo que provoca que la nieve se ahueque como se muestra. Este mismo fenómeno ocurre en una tormenta de arena o en un flujo de agua alrededor de un poste en un lecho de río.

## 5.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ENERGÍA

La mayoría de los problemas de interés en mecánica de fluidos no implican gradientes de temperatura, sino flujos en los cuales la temperatura permanece constante en todos sus puntos. Para flujos como esos no es necesario introducir la ecuación diferencial de energía. Existen situaciones, sin embargo, tanto para flujos compresibles como incompresibles, en los que los gradientes de temperatura son importantes, y para tales flujos se requiere la ecuación diferencial de energía. Se deriva la ecuación diferencial de energía suponiendo efectos viscosos insignificantes, una suposición que simplifica de una manera significativa la derivación. Como los esfuerzos cortantes provocados por la viscosidad son bastante pequeños en muchas aplicaciones, esta suposición puede ser aceptable. Estos esfuerzos cortantes, no obstante, son responsables de las altas temperaturas que incendian los satélites en su reingreso a la atmósfera; si son significativos, deben ser incluidos en cualquier análisis.

### CONCEPTO CLAVE

Los esfuerzos cortantes responden de las altas temperaturas que incendian los satélites.

Considere el elemento de fluido infinitesimal, mostrado en la figura 5.5. La tasa de transferencia de calor  $\dot{Q}$  a través de un área  $A$  está dada por la *ley de Fourier de transferencia de calor*, en honor de Jean B. J. Fourier (1768–1830):

$$\dot{Q} = -KA \frac{\partial T}{\partial n} \quad (5.4.1)$$

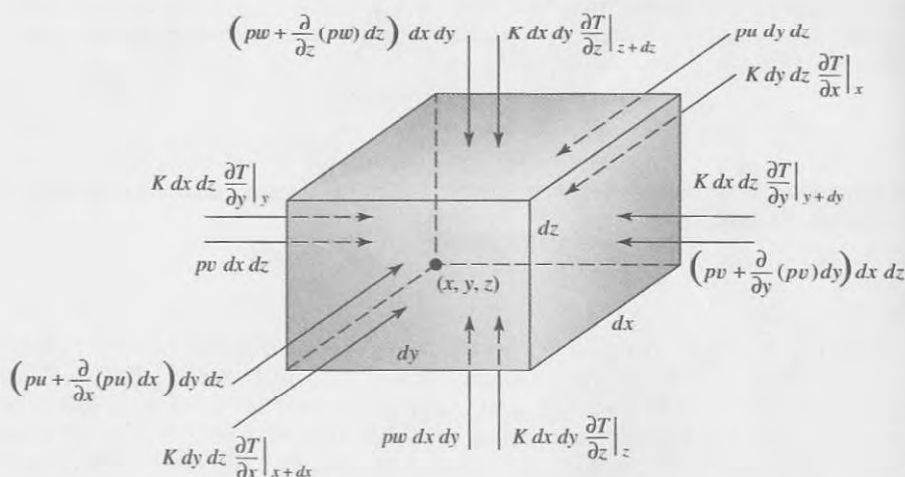
donde  $n$  es la dirección normal al área,  $T$  la temperatura y  $K$  la *conductividad térmica*, supuesta constante. La tasa de trabajo realizado por una fuerza es la magnitud de ésta multiplicada por la velocidad en la dirección de la fuerza, es decir,

$$\dot{W} = pAV \quad (5.4.2)$$

donde  $V$  es la velocidad en la dirección de la fuerza de presión  $pA$ . La primera ley de la termodinámica (remitirse a la Ec. 1.7.6) aplicada a una partícula de fluido es

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{DE}{Dt} \quad (5.4.3)$$

donde  $D/Dt$  se utiliza puesto que se está siguiendo una partícula del fluido en el instante mostrado. Para la partícula que ocupa el elemento infinitesimal de



**FIGURA 5.5** Razón de transferencia de calor y razón de trabajo en un elemento de fluido infinitesimal.



la figura 5.5, las relaciones anteriores permiten escribir

$$\begin{aligned}
 & K dy dz \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz \\
 & + K dx dz \left( \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+dy} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz \\
 & + K dx dy \left( \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+dz} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz \\
 & = \rho dx dy dz \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \quad (5.4.4)
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{u}$  es la energía interna,  $E$  incluye las energías cinética, potencial e interna, y el eje  $z$  se supone vertical. Asimismo, la masa de una partícula de fluido es constante  $\rho dx dy dz$  queda afuera del operador  $D/Dt$ . Divida ambos lados entre  $dx dy dz$ . El resultado es

$$\begin{aligned}
 & K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \\
 & = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \quad (5.4.5)
 \end{aligned}$$

Esta puede ser reordenada como sigue:

$$\begin{aligned}
 & K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \\
 & = \rho u \frac{Du}{Dt} + \rho v \frac{Dv}{Dt} + \rho w \frac{Dw}{Dt} + \rho g \frac{Dz}{Dt} + \rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} \quad (5.4.6)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler (5.3.7) se aplican a este flujo inviscido; por consiguiente los últimos tres términos del lado izquierdo son iguales a los primeros cuatro términos del lado derecho si se reconoce que

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} + w \frac{\partial z}{\partial z} = w \quad (5.4.7)$$

puesto que  $x, y, z$  y  $t$  son variables independientes. La ecuación de energía simplificada entonces toma la forma

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5.4.8)$$

En forma vectorial se expresa como

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} = K \nabla^2 T - \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (5.4.9)$$

Antes de simplificar esta ecuación para flujo de gas incompresible, se escribe en función de la entalpía y no en función de la energía interna. Con

$$\tilde{u} = h - \frac{p}{\rho} \quad (5.4.10)$$

la ecuación de energía se vuelve, utilizando la ecuación 5.2.7,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt} \quad (5.4.11)$$

Véase el ejemplo 5.4 para los detalles de esta conversión.

Existen dos casos especiales a ser considerados. En primer lugar, para un flujo de líquido se puede usar  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  y con  $\tilde{u} = c_p T$ , donde  $c_p$  es el calor específico<sup>6</sup>, la ecuación 5.4.9 se reduce a

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (5.4.12)$$

donde se introdujo la *difusividad térmica*  $\alpha$  definida por

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \quad (5.4.13)$$

En un flujo de gas incompresible, se presenta un resultado interesante. En el ejemplo 5.10 se demuestra que

$$\left| \frac{Dp}{Dt} \right| \ll |p \nabla \cdot \mathbf{V}| \quad (5.4.14)$$

Por lo tanto, cuando se comparan las ecuaciones 5.4.9 y 5.4.11, la ecuación que se simplifica es la ecuación 5.4.11

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T \quad (5.4.15)$$

para un flujo incompresible de gas se hace la suposición de gas ideal de que

$$dh = c_p dT \quad (5.4.16)$$

Si los efectos viscosos no son insignificantes, la derivación incluirá el trabajo realizado por las componentes de esfuerzo cortante. Esto agrega un término al

<sup>6</sup>El calor específico de un líquido a menudo aparece en tablas como  $c_p$ . El calor específico a volumen constante de un líquido es aproximadamente igual a  $c_p$ . Por consiguiente con frecuencia simplemente se elimina el subíndice y se escribe como  $c_p = c$  para un líquido. Se supone que es constante, pero no depende de la temperatura. Aquí se utilizará  $c_p$ .

lado derecho de todas las ecuaciones diferenciales de energía anteriores; este término se llama *función de disipación*  $\Phi$ , la cual, en coordenadas rectangulares es

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5.4.17)$$

Con la adición de la ecuación de energía, ya se pueden considerar problemas que implican variaciones de temperatura en un flujo. Tales problemas obviamente se presentan en flujos compresibles en los que la presión y la densidad están relacionados con la temperatura mediante una ecuación de estado. En flujos de gas incompresible (número de Mach  $< 0.3$ ) y flujos de líquido, las variaciones de temperatura a menudo son insignificantes de modo que la ecuación diferencial de energía no es de interés. Si, no obstante, existe un campo de temperatura en un flujo de líquido o en un flujo de gas incompresible (intercambiadores de calor, flujos atmosféricos, inversiones en lagos, flujos de lubricación, flujos de convección libre), la ecuación de energía proporciona una ecuación adicional que relaciona las cantidades de interés. Para flujos líquidos que involucran gradientes de temperatura a menudo es necesario asumir que  $\mu = \mu(T)$ ; en flujos de convección libre se debe suponer que  $\rho = \rho(T)$ . En flujos de gas incompresible por regla general se puede suponer que la viscosidad es constante en vista de que la variación de temperatura es bastante pequeña.

### Ejemplo 5.9

Un líquido de densidad constante fluye al interior de un canal horizontal rectangular ancho, las paredes se mantienen a una temperatura más alta que la del líquido, como se muestra en la figura E5.9. Suponga una variable  $\mu$ , incluya la disipación viscosa, y escriba las ecuaciones diferenciales que describen un flujo continuo.

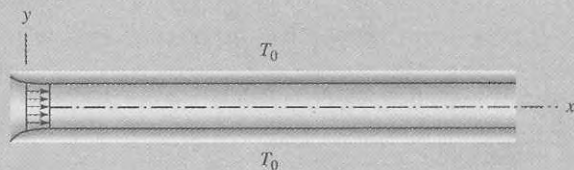


FIGURA E5.9

#### Solución

Que el eje  $x$  coincida con la línea de eje o media del canal y que el eje  $y$  sea vertical. La ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

puesto que  $w = 0$  para el canal ancho.

El flujo principalmente será en la dirección  $x$ , pero se debe tener en cuenta la variación de la componente  $y$  de  $v$ . No habrá variación en la dirección  $z$ . Las aceleraciones en este flujo continuo serán

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{Dv}{Dt} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

(continúa)

Los términos de esfuerzo de las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 utilizando las ecuaciones 5.3.10 con  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , suponiendo una variable  $\mu$ , son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento son entonces

$$\begin{aligned}\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

La ecuación de energía se simplifica como sigue

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{2\mu}{c_p} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

donde se supuso que  $K$  es constante. Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales anteriores, aunque muy oportunas cuando se intenta una solución analítica, pueden ser resueltas numéricamente con las condiciones de límite apropiadas, y una velocidad de flujo suficientemente baja de modo que exista un flujo laminar (un flujo turbulento siempre es discontinuo y tridimensional).

### Ejemplo 5.10

Demuestre que para un gas ideal  $|Dp/Dt| \ll |p \nabla \cdot \mathbf{V}|$  en un flujo a baja velocidad, con lo que se concluye que la ecuación 5.4.15 es la ecuación apropiada.

#### Solución

Considere un flujo uniforme continuo en un tubo de modo que  $|\mathbf{V}| = u$  y  $Dp/Dt = u \partial p / \partial x$ . Entonces el problema consiste en demostrar que:

$$\left| u \frac{\partial p}{\partial x} \right| \ll \left| p \frac{\partial u}{\partial x} \right|$$

Los efectos viscosos son insignificantes y no modifican la conclusión, así que pueden ser pasados por alto independientemente de cualquier efecto viscoso posible. Entonces la ecuación de Euler permite utilizar

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Si se utiliza la definición de la velocidad del sonido (Ec. 1.7.17) y la ecuación de estado, se ve que

$$c = \sqrt{\frac{k p}{\rho}} \quad \text{o} \quad p = c^2 \frac{\rho}{k}$$

Así pues

$$p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2}{k} \rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

ahora el problema puede ser planteado: Demostrar que

$$\left| \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{c^2}{k} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right|$$

o, simplemente, es verdad que

$$u^2 \ll \frac{c^2}{k}?$$

Se puede ver que esto es cierto puesto que se supuso que para un flujo de gas a baja velocidad que la velocidad de éste es mucho menor que la velocidad del sonido (es decir,  $u < 0.3c$  o  $M < 0.3$ ). Se sabe que  $k$  de orden unitario ( $k = 1.4$  para aire), así que no afectará la conclusión de que

$$\left| \frac{Dp}{Dt} \right| \ll |\rho \nabla \cdot \mathbf{V}|$$

## 5.5 RESUMEN

Ya se completó la derivación de las ecuaciones diferenciales parciales utilizadas para describir flujos de interés. Las ecuaciones en forma vectorial resumidas, para un flujo incompresible, son:

Continuidad:  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  (5.5.1)

Cantidad de movimiento:  $\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$  (5.5.2)

Energía:  $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T + \Phi$  Líquidos (5.5.3)

Energía:  $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T + \Phi$  Gases incompresibles (5.5.4)

Para expresar estas ecuaciones en las formas anteriores, se supuso:

- Un fluido newtoniano (una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad).
- Un fluido isotrópico (las propiedades de fluido son independientes de la dirección).
- Un fluido homogéneo (las propiedades de fluido  $\mu$ ,  $c_p$  y  $K$  no dependen de la posición).
- Un flujo incompresible (la densidad de una partícula es constante, es decir,  $D\rho/Dt = 0$ ; no se exige que  $\rho = \text{constante}$ . Para un flujo de gas se requiere que  $M < 0.3$ ).
- Un marco de referencia inercial.

La ecuación de vorticidad también es de interés, la cual es

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (5.4.5)$$

Los métodos numéricos a menudo utilizan esta ecuación de vorticidad.

En la derivación de las ecuaciones diferenciales en este capítulo no se mencionó el flujo laminar o turbulento. Las ecuaciones son aplicables a cualquier clase de flujo. Algunos flujos laminares en geometrías relativamente simples se resuelven analíticamente y otros numéricamente. Los flujos turbulentos, sin embargo, no se resuelven incluso para la geometría más simple. Un flujo turbulento siempre es un flujo discontinuo y la presencia de derivadas con respecto al tiempo demanda condiciones iniciales; esto es, en el instante  $t = 0$  se tienen que especificar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $p$  en todos los puntos de la región de interés, información que es difícil de obtener incluso en un flujo simple por una tubería.

### CONCEPTO CLAVE

Las ecuaciones diferenciales se aplican a flujos laminares y turbulentos.



**TABLA 5.1** Leyes fundamentales para flujos incompresibles

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_z^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + v \left( \nabla^2 v_r - \frac{2v_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + v \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\theta v_\phi + v_\phi \mu_\phi \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g_\phi + v \left( \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

**Energía**

**Cartesianas**

$$\frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

**Cilíndricas**

$$\frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2$$

**Continuidad**

**Cartesianas**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

**Cilíndricas**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

**Esféricas**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$$

**Cantidad de movimiento**

**Cartesianas**

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + v \nabla^2 u$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + v \nabla^2 v$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + v \nabla^2 w$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Cilíndricas**

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + v \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + v \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + v \nabla^2 v_z$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Esféricas**

$$\frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2$$

**Cilíndricas**

$$\frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2$$

## PROBLEMAS

## Ecuación diferencial de continuidad

- 5.1 El teorema de divergencia (también conocido como teorema de Gauss) estipula que

$$\int_A \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} dV$$

donde  $\mathbf{V}$  representa cualquier vector y  $A$  rodea por completo al volumen  $V$ . Aplique este teorema a la ecuación integral de continuidad 4.3.3 y derive la ecuación diferencial de continuidad 5.2.5.

- 5.2 Use el elemento infinitesimal mostrado en la figura P5.2 y derive la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas cilíndricas. El vector de velocidad es  $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$ .

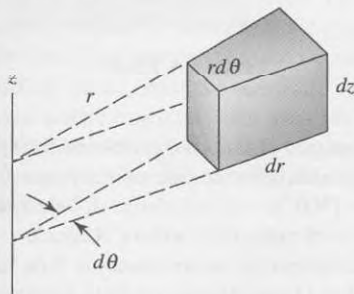


FIGURA P5.2

- 5.3 Use los elementos infinitesimales mostrados en la figura P5.3 y deduzca la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas esféricas. El vector de velocidad es  $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$ .

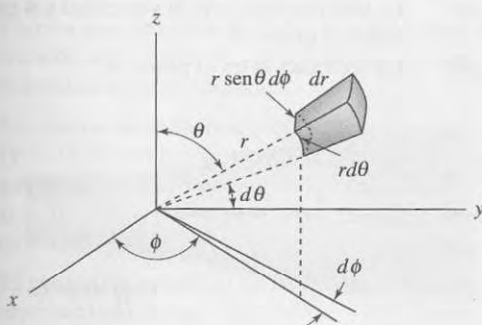


FIGURA P5.3

- 5.4 En un tubo de diámetro constante ocurre un flujo compresible uniforme. Escriba la ecuación diferencial de continuidad simplificada para el flujo continuo.
- 5.5 Un flujo de aire incompresible sobre la cadena montañosa mostrada en la figura P5.5 puede ser aproximada por un flujo plano continuo. Si el eje  $z$  es vertical y se permite que la densidad varíe, escriba las ecuaciones diferenciales que resultan de consideraciones de conservación de la masa.

ba las ecuaciones diferenciales que resultan de consideraciones de conservación de la masa.

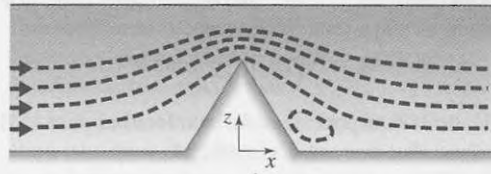


FIGURA P5.5

- 5.6 Un flujo de agua salina estratificada, en el cual la densidad se incrementa con la profundidad, pasa sobre una obstrucción en el fondo del canal de la figura P5.6. Suponiendo un flujo continuo plano con el eje  $z$  vertical, escriba las ecuaciones que resultan de la ecuación diferencial de continuidad.

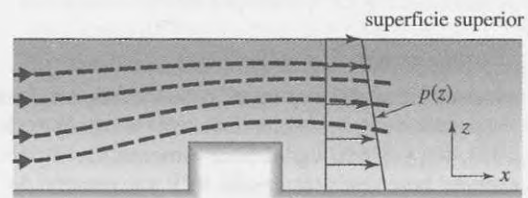


FIGURA P5.6

- 5.7 Demuestre que para un flujo compresible isotérmico,

$$\frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}$$

- 5.8 Un fluido incompresible fluye radialmente en un fregadero (tratado como una línea o un punto en el origen). Determine una expresión para la componente de la velocidad radial si es:

- (a) Un fregadero línea  
(b) Un fregadero punto

- 5.9 Ocurre un flujo incompresible de modo que

$$u = 200xy \quad v = 200(x^2 + y^2) \quad w = 0 \text{ m/s}$$

Encuentre la velocidad con la que cambia la densidad en el punto (2 m, 1 m) donde  $\rho = 2.3 \text{ kg/m}^3$ .

- 5.10 Si, en un flujo incompresible plano, la componente de la velocidad  $u = \text{const}$ , ¿qué puede decir sobre la componente  $y$ ? ¿Sobre la densidad?
- 5.11 En un flujo incompresible se sabe que  $u$  y  $v$  son no cero pero de magnitud constante. ¿Qué puede inferir sobre  $\omega$  de acuerdo con la ecuación diferencial de continuidad? ¿Sobre la densidad?
- 5.12 En un flujo plano incompresible  $u = Ax$ . Encuentre  $v(x, y)$  si  $v(x, 0) = 0$ .

- 5.13 Si la componente de la velocidad está dada por

$$u(x, y) = 10 + \frac{5x}{x^2 + y^2}$$

en un flujo incompresible plano, determine  $v(x, y)$ . Sea  $v(x, 0) = 0$ .

- 5.14 La componente  $\theta$  de la velocidad está dada por

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{0.4}{r^2}\right) \cos \theta$$

Halle la componente  $r$  de la velocidad para el flujo plano incompresible si  $v_r(0.2, \theta) = 0$ .

- 5.15 En flujo plano incompresible

$$v_\theta = 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{40}{r}$$

Encuentre  $v_r(r, \theta)$  si  $v_r(1, \theta) = 0$ .

- 5.16 En un flujo axisimétrico incompresible ( $v_\phi = 0$ ) la componente de la velocidad está dada por  $v_\theta$

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{40}{r^3}\right) \sin \theta$$

Encuentre  $v_r(r, \theta)$  si  $v_r(2, \theta) = 0$ .

- 5.17 La velocidad del aire en un tubo medido en puntos separados entre sí a una distancia de 2 pulg es de 453, 486 y 526 ft/seg. respectivamente. En el punto medio la temperatura es de 40°F y la presión de 18 psia. Encuentre  $dp/dx$  en el punto medio de este flujo continuo uniforme.

- 5.18 La componente  $x$  de la velocidad sobre el eje  $x$  (Fig. P5.18) se propone que sea  $u(x) = -20(1 - e^{-x})$  m/s. Aproxime la componente  $y$  de velocidad en la punto (2,0.2) en este flujo incompresible plano. Las coordenadas están en metros.

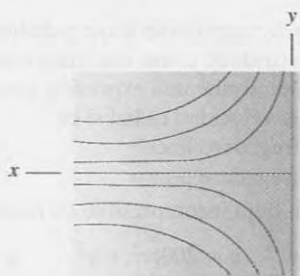


FIGURA P5.18

- 5.19 Suponga el flujo del problema 5.18 es axisimétrico y reemplace  $y$  con  $r$  y  $x$  con  $z$ . Calcule la componente  $r$  de la velocidad en (2,0.2). Las coordenadas están en metros.

- 5.20 La componente de la velocidad a lo largo del eje  $x$  (Fig. P5.20) es  $u(x) = 10 - 40/x^2$  m/s. ¿Cuál es el radio del cilindro? Aproxime la componente  $y$  de la velocidad en (-3, 0.1) suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

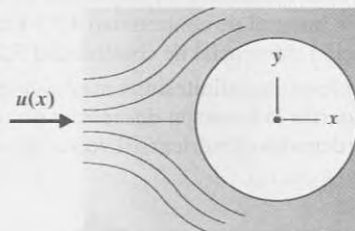
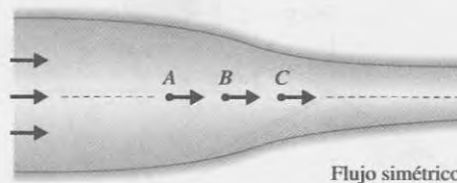


FIGURA P5.20

- 5.21 Suponga que el flujo del problema 5.20 representa un flujo alrededor de una esfera y que  $v_r(r) = (40/r^2) - 10$  a lo largo del eje  $x$  negativo. ¿Cuál es el radio de la esfera? Calcule aproximadamente la componente  $\theta$  de la velocidad en (-3, 0.1) suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

- 5.22 La componente  $x$  del vector de velocidad se midió en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  separados 5 mm como 11.3, 12.6 y 13.5 m/s, respectivamente, en el flujo incompresible plano continuo mostrado en la figura P5.22. Calcule:

- (a) La componente  $y$  de la velocidad a 4 mm sobre el punto  $B$ .  
(b) La aceleración en el punto  $B$ .



Flujo simétrico

FIGURA P5.22

### Ecuación diferencial de cantidad de movimiento

- 5.23 Suma las fuerzas que actúan en el elemento de la figura 5.3 en la dirección  $y$  y demuestre que resulta la ecuación 5.3.3a.
- 5.24 ¿El campo de velocidad

$$u = \frac{10x}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{10y}{x^2 + y^2} \quad w = 0$$

representa un posible campo incompresible? De ser así, halle el gradiente de presión  $\nabla p$  suponiendo un flujo libre de presión con fuerzas de cuerpo insignificantes.

- 5.25 ¿El campo de velocidad

$$v_r = 10\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -10 \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta$$

$$v_z = 0$$

representa un posible campo incompresible? De ser así, halle el gradiente de presión  $\nabla p$  suponiendo un flujo libre de presión con fuerzas de cuerpo insignificantes.

**5.26** Considere el campo de velocidad

$$v_r = 10 \left( 1 - \frac{8}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -10 \left( 1 + \frac{4}{r^3} \right) \sin \theta$$

$$v_\phi = 0$$

¿Representa un flujo incompresible? De ser así, encuentre el gradiente de presión  $\nabla p$  suponiendo un flujo sin fricción e ignorando la fuerza de cuerpo.

**5.27** Para el flujo plano continuo mostrado en la figura P5.27, encuentre una expresión para  $D\mathbf{V}/Dt$  en función de las coordenadas  $(s, n)$  tangenciales y normales a una línea de corriente. Sea  $R$  el radio de curvatura.

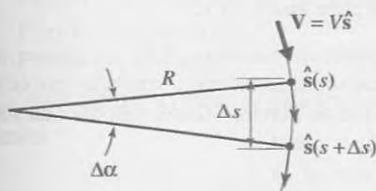


FIGURA P5.27

**5.28** Escriba una ecuación de Euler si la velocidad está referida a un marco de referencia que gira con velocidad angular constante.

**5.29** Un campo de velocidad está dado por  $u = 30(y - 24y^2)$  ft/seg,  $v = 0$  y  $w = 0$ . Muestre las componentes de esfuerzo en  $y = 0.1$  pulg, con  $\mu = 10^{-5}$  lb-seg/ft<sup>2</sup> y  $p = 30$  psi. Encuentre la relación  $\tau_{xy}/\sigma_{xx}$ .

**5.30** El campo de velocidad cerca de una superficie está representado por  $u = 10(2y/\delta - y^2/\delta^2)$ , donde  $\delta = Cx^{4/5}$ . Si  $\delta = 8$  m con  $x = 1000$  m, halle  $v(x, y)$  suponiendo que  $w = 0$  y  $v(x, 0) = 0$ . También, muestre las componentes de esfuerzo en  $(1000, 0)$  con  $\mu = 2 \times 10^{-5}$  N·s/m<sup>2</sup> y  $p = 100$  kPa. Suponga un flujo incompresible.

**5.31** Demuestre que para un flujo continuo  $Du/Dt$  puede escribirse con  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)u$ , y que  $D\mathbf{V}/Dt = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ . Verifique por medio de coordenadas rectangulares.

**5.32** Escriba las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento (5.3.13) para flujo compresible como una ecuación en forma vectorial.

**5.33** Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo continuo incompresible entre placas paralelas horizontales suponiendo que  $u = u(y)$ ;  $w = 0$ . Escriba las tres ecuaciones.

**5.34** Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo continuo incompresible en una tubería horizontal suponiendo que  $v_z = v_z(r)$ ,  $v_\theta = 0$ . Escriba las tres ecuaciones.

**5.35** Fluye un fluido por un hueco pequeño entre esferas concéntricamente rotatorias de modo que  $v_\theta = v_\theta(r)$  y  $v_\phi = 0$ . Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes ignorando la gravedad para flujo continuo incompresible.

**5.36** Sustituya las ecuaciones constitutivas (5.3.10) para flujo incompresible en las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento 5.3.2 y 5.3.3 y derive las ecuaciones de Navier-Stokes 5.3.14.

**5.37** En las ecuaciones 5.3.14 se supone que la viscosidad es constante. Si la temperatura no es constante, como en un flujo de líquido con gradientes de temperatura, sea  $\mu = \mu(T)$  de modo que  $\mu = \mu(x, y, z)$  puesto que  $T = T(x, y, z)$ . Modifique las ecuaciones 5.3.14 para tener en cuenta la viscosidad variable.

**5.38** Una gran placa plana oscila debajo de un líquido como se muestra en la figura P5.38. Escriba la ecuación diferencial que describe el movimiento si el flujo plano laminar se mueve sólo paralelo a la placa. Suponga que  $\mu = \text{const}$ .

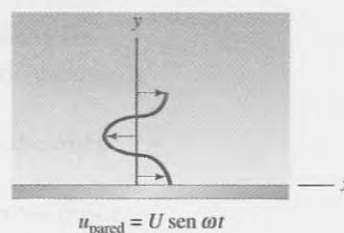


FIGURA P5.38

**5.39** Para un flujo de gas en el cual la hipótesis de Stokes no es aplicable, el promedio negativo de los tres esfuerzos normales, denotados  $\bar{p}$ , puede ser diferente de la presión  $p$ . Encuentre una expresión para  $(\bar{p} - p)$ .

### Vorticidad

**5.40** Demuestre que las relaciones (5.3.22) sí son verdaderas por medio de coordenadas rectangulares.

**5.41** Existe un flujo uniforme sobre la placa plana de la figura P5.41 que es paralela al flujo. La placa tiene

un borde de ataque muy filoso. Identifique el término responsable de crear la vorticidad.

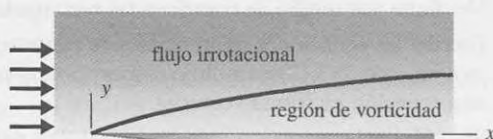


FIGURA P5.41

- 5.42 Ignore los efectos viscosos y determine el perfil de velocidad exactamente corriente abajo de la contracción en la sección 2 en el flujo plano mostrado en la figura P5.42. *Sugerencia:* en un flujo inviscido, el fluido no se pega en la pared.

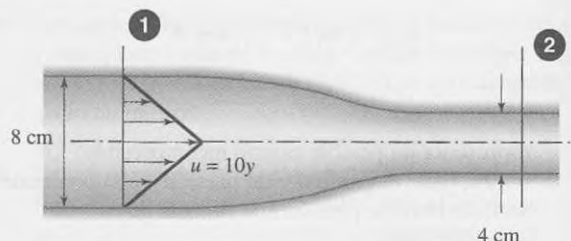


FIGURA P5.42

- 5.43 En el ejemplo 5.8, ¿ $\omega_x$  permanece cero como el tubo de vórtice cerca del árbol? Si no, explique por qué.

### Ecuación diferencial de energía

- 5.44 Derive la ecuación diferencial de energía para flujo incompresible aplicando el teorema de Gauss (véase el Prob. 5.1) a la ecuación integral de energía 4.5.13 suponiendo que  $\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{cortante}} = \dot{W}_l = 0$  y utilizando  $\dot{Q}_s = \int_{\text{s.c.}} K \nabla T \cdot \hat{n} dA$  suponiendo que no hay efectos viscosos.
- 5.45 Verifique que la ecuación 5.4.11 se deriva de la ecuación 5.4.4. Recuerde la derivación de una segunda derivada.
- 5.46 Verifique que la ecuación 5.4.11 se deriva de la ecuación 5.4.9.
- 5.47 Simplifique la ecuación diferencial de energía para flujo de líquido en el cual los gradientes de temperatura son bastante grandes y las componentes de velocidad son muy pequeñas, tal como en un lago calentado desde arriba.
- 5.48 Explique qué término de la ecuación diferencial de energía se encarga de las temperaturas extremadamente altas que existen en los satélites durante su reingreso a la atmósfera.
- 5.49 La distribución de velocidad en una tubería de 2.0 cm de diámetro está dada por  $u(r) = 10(1 - 10000r^2)$  m/s. Encuentre la magnitud de la función de disipación en la pared, en la línea media, y a la mitad para aire a 20°C.
- 5.50 Si la placa del problema 5.38 se calienta, escriba la ecuación diferencial de energía simplificada y la ecuación de Navier-Stokes simplificada suponiendo:
- $\mu = \text{const.}$
  - $\mu = \mu(T)$ .