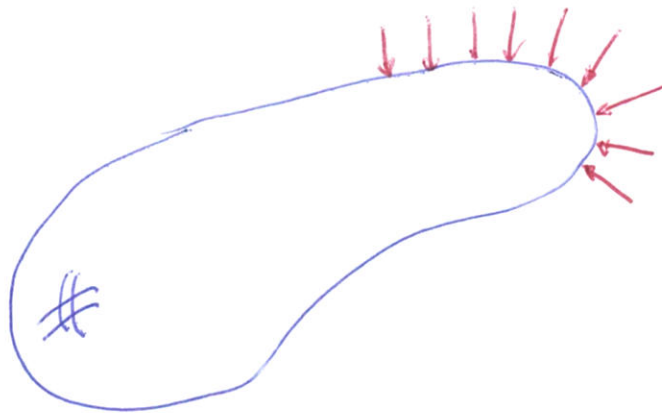


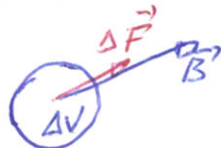
4.1. Forças superficiais e de corpo

Forças superficiais são aquelas que atuam na superfície de um corpo por interação das partículas aí dispostas, por contato com outras partículas que se distribuem sobre a superfície.



Forças de corpo são aquelas que atuam em todas as partículas do corpo por interação à distância com outras partículas, em geral localizadas muito distantes. Exemplos deste tipo de força são a força peso, força eletrostática, força eletromagnética e forças de inércia.

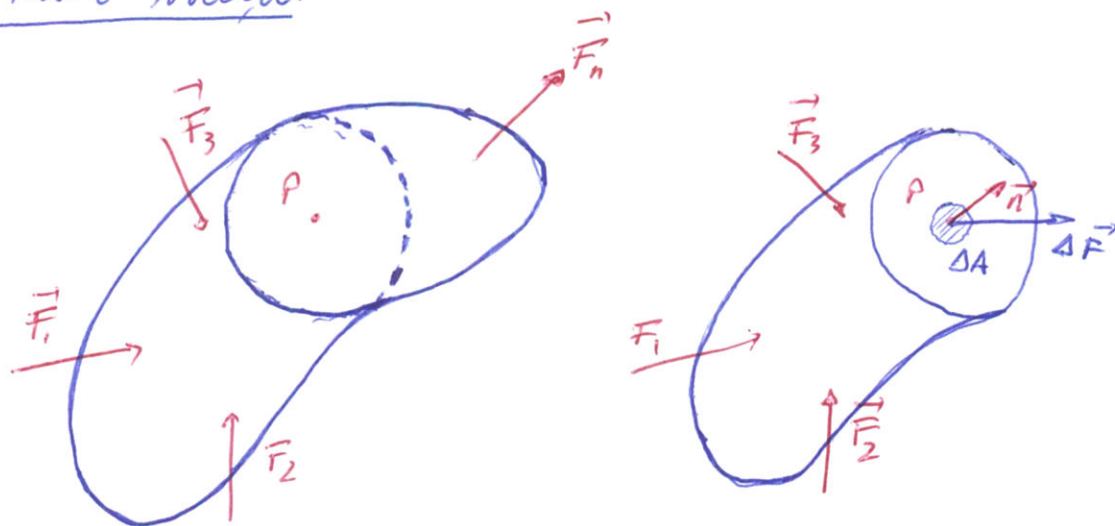
A densidade de força de corpo,  $\vec{B}$ , é a razão entre a força que atua sobre uma partícula e o volume desta.



$$\vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$$

## 4.2. O vetor tração

4-2



Considere um corpo submetido a forças e um plano de corte que separa o corpo em duas partes. Na superfície de corte está o ponto  $P$  e um elemento de área  $\Delta A$  envolvendo-o sobre o qual atua uma força  $\Delta \vec{F}$ . Defina-se a normal à superfície de corte no ponto  $P$  como  $\vec{n}$ . O vetor tração no ponto  $P$  segundo o plano de corte de normal  $\vec{n}$ ,  $\vec{T}_{\vec{n}}$ , é a razão entre a força  $\Delta \vec{F}$  e a área  $\Delta A$ :

$$\vec{T}_{\vec{n}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Pela lei da ação e reação, tem-se:

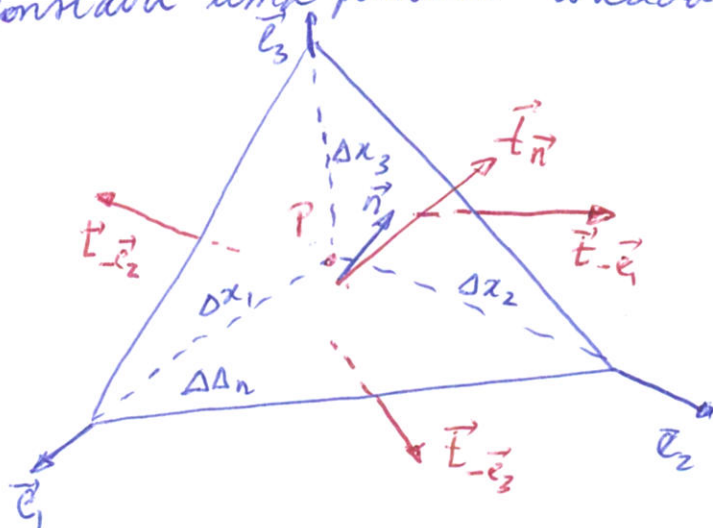
$$\vec{T}_{-\vec{n}} = -\vec{T}_{\vec{n}}$$

## 4.3. O tensor de tensão

Num mesmo ponto  $P$ , a cada plano de normal  $\vec{n}$  associa-se um vetor tração  $\vec{T}_{\vec{n}}$ . Isto sugere um operador que a cada  $\vec{n}$  associa o vetor  $\vec{T}_{\vec{n}}$ . Seja  $T$  esse operador. Então:

$$T\vec{n} = \vec{T}_{\vec{n}}$$

Se o operador  $T$  for linear, então ele é um tensor. Para mostrar isto, considere uma partícula cortada por 4 planos. 4-3



A partícula está sujeita à aceleração  $\vec{a}$  e à densidade de força de corpo  $\vec{B}$ .

Aplicando a 2ª lei de Newton à partícula:

$$\vec{T}_{-\vec{e}_1} \frac{\Delta x_2 \Delta x_3}{2} + \vec{T}_{-\vec{e}_2} \frac{\Delta x_1 \Delta x_3}{2} + \vec{T}_{-\vec{e}_3} \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{2} + \vec{T}_{\vec{n}} \Delta A_n = (\rho \vec{a} - \vec{B}) \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{6}$$

Como o segundo membro da equação acima é um infinitésimo de segunda ordem face às parcelas do primeiro membro, pode-se escrever:

$$\vec{T}_{\vec{n}} \Delta A_n = \vec{T}_{\vec{e}_1} \frac{\Delta x_2 \Delta x_3}{2} + \vec{T}_{\vec{e}_2} \frac{\Delta x_1 \Delta x_3}{2} + \vec{T}_{\vec{e}_3} \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{2}$$

O vetor normal à face inclinada do tetraedro é:

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3$$

As áreas das faces do tetraedro se relacionam entre si, pois as faces de normal  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são projeções da face inclinada.

Logo:

$$\frac{\Delta x_2 \Delta x_3}{2} = \Delta A_n n_1$$

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_3}{2} = \Delta A_n n_2$$

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{2} = \Delta A_n n_3$$

Portanto,

$$\vec{T}_n \Delta A_n = \vec{T}_1 n_1 \Delta A_n + \vec{T}_2 n_2 \Delta A_n + \vec{T}_3 n_3 \Delta A_n$$

ou

$$\vec{T}_n = n_1 \vec{T}_1 + n_2 \vec{T}_2 + n_3 \vec{T}_3$$

Como  $T \vec{e}_i = \vec{T}_{e_i}$  e  $T \vec{n} = \vec{T}_n$ , então:

$$T \vec{n} = T(n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3) = n_1 T \vec{e}_1 + n_2 T \vec{e}_2 + n_3 T \vec{e}_3$$

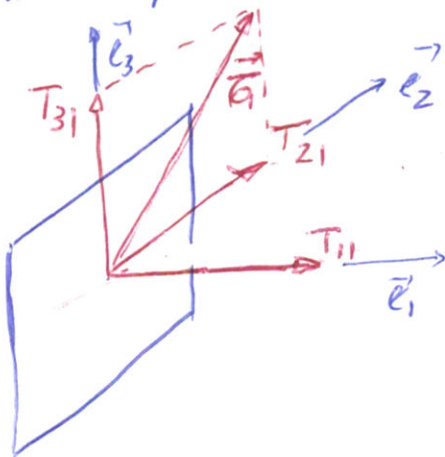
ou seja,  $T$  é linear e, portanto, é um tensor, o tensor de tensão ou tensor de tensão de Cauchy.

#### 4.4. Componentes do tensor de tensão

1) vetor tração atuante na face de normal  $\vec{e}_1$  é

$$\vec{T}_{e_1} = T_{11} \vec{e}_1 + T_{21} \vec{e}_2 + T_{31} \vec{e}_3$$

$T_{11}$  é a tensão normal à face e tem a mesma direção de  $\vec{e}_1$ ,  
 $T_{21}$  e  $T_{31}$  são componentes paralelas à face nas direções  $\vec{e}_2$   
e  $\vec{e}_3$ , respectivamente.



$$\vec{T}_1 = T_{21} \vec{e}_2 + T_{31} \vec{e}_3$$

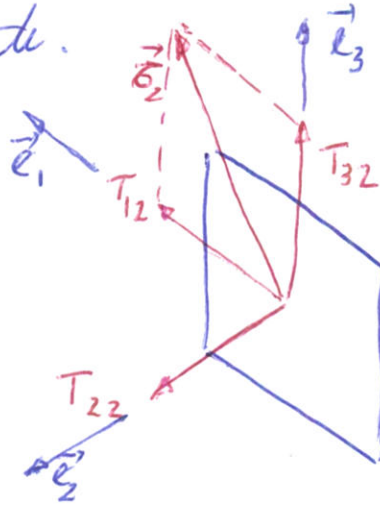
$$\|\vec{T}_1\| = \sqrt{T_{21}^2 + T_{31}^2}$$

$T_{21}$  e  $T_{31}$  são chamadas de tensão de cisalhamento.

na face de normal  $\vec{e}_2$  é:

$$\vec{T}_{\vec{e}_2} = T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{32}\vec{e}_3$$

$T_{22}$  é a tensão normal à face e tem a mesma direção de  $\vec{e}_2$ ,  
 $T_{12}$  e  $T_{32}$  são componentes paralelas à face nas direções  $\vec{e}_1$  e  
 $\vec{e}_3$ , respectivamente.



$$\vec{G}_2 = T_{12}\vec{e}_1 + T_{32}\vec{e}_3$$

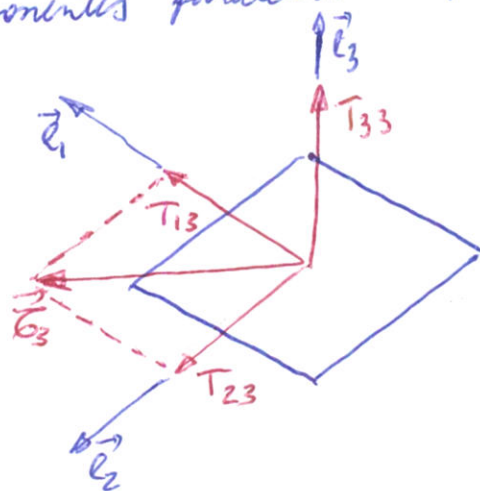
$$\|\vec{G}_2\| = \sqrt{T_{12}^2 + T_{32}^2}$$

$T_{12}$  e  $T_{32}$  são tensões de cisalhamento.

na face de normal  $\vec{e}_3$  é:

$$\vec{T}_{\vec{e}_3} = T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3$$

$T_{33}$  é a tensão normal à face e tem a mesma direção de  $\vec{e}_3$ ,  $T_{13}$   
e  $T_{23}$  são componentes paralelas à face nas direções  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , res-  
pectivamente.

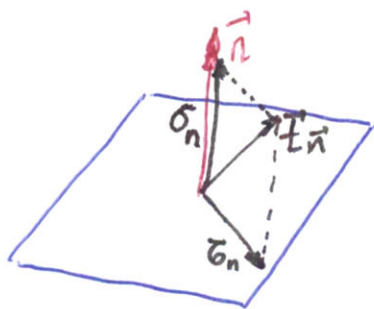


$$\vec{G}_3 = T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2$$

$$\|\vec{G}_3\| = \sqrt{T_{13}^2 + T_{23}^2}$$

Num plano de normal  $\vec{n}$ :

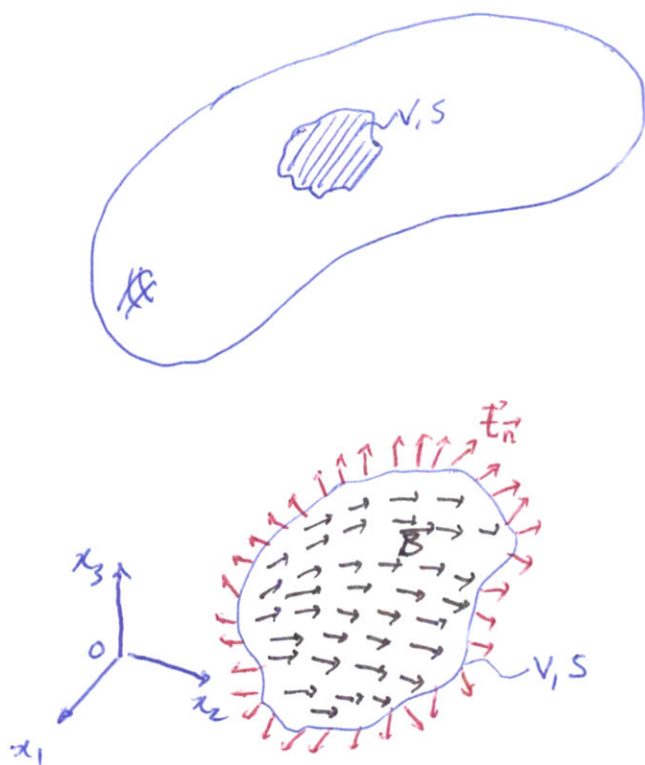
4-6



Componentes do vetor tensão no plano de normal  $\vec{n}$ :  $\sigma_n$  é a componente normal e é denominada tensão normal;  $\tau_n$  é a componente paralela ao plano e denominada de tensão de cisalhamento.

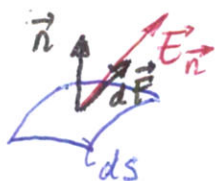
#### 4.5 Equações de equilíbrio de forças e momentos

Considere um sólido carregado com forças superficiais e de corpo. Tomando uma região do sólido de volume  $V$  e superfície  $S$  quaisquer, analisemos o equilíbrio de forças e de momentos dessa região.



### 4.5.1 Equilíbrio de forças

#### Resultante de forças superficiais ( $\vec{R}_s$ )



$$\vec{R}_s = \int_S d\vec{F} = \int_S \vec{F}_n dS = \int_S T \vec{n} dS = \int_S T_{ij} n_j \vec{e}_i dS$$

Aplicando o teorema de Gauss à última integral:

$$\vec{R}_s = \int_V T_{ij,j} \vec{e}_i dV$$

#### Resultante de forças de corpo ( $\vec{R}_B$ )



$$\vec{R}_B = \int_V d\vec{F} = \int_V \vec{B} dV = \int_V B_i \vec{e}_i dV$$

Como há equilíbrio de forças no pedaço de sólido de volume  $V$ , as duas resultantes somadas se anulam:

$$\vec{R}_s + \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$\text{ou} \quad \int_V T_{ij,j} \vec{e}_i dV + \int_V B_i \vec{e}_i dV = \vec{0}$$

$$\text{ou} \quad \int_V (T_{ij,j} + B_i) \vec{e}_i dV = \vec{0}$$

Como o pedaço de sólido de volume  $V$  é qualquer, conclui-se que o integrando deve ser identicamente nulo:

$$T_{ij,j} + B_i = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B}$$

ou seja,

$$T_{11,1} + T_{12,2} + T_{13,3} + B_1 = 0$$

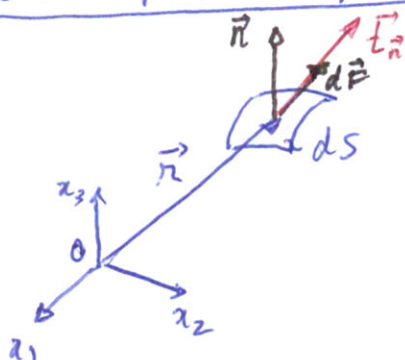
$$T_{21,1} + T_{22,2} + T_{23,3} + B_2 = 0$$

$$T_{31,1} + T_{32,2} + T_{33,3} + B_3 = 0$$

são as equações de equilíbrio de forças sobre uma partícula qualquer do sólido.

#### 4.5.2. Equilíbrio de momentos

Momento das forças superficiais ( $\vec{M}_S$ )

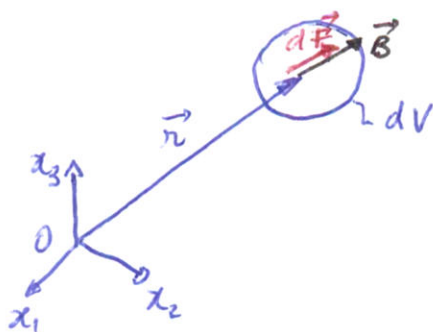


Seja  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$  o vetor posição do elemento de superfície  $dS$ . Então, o momento da força  $d\vec{F}$  em relação à origem  $O$  é  $\vec{r} \times d\vec{F}$ . Portanto, o momento relativo a  $O$  de todas as forças superficiais é:

$$\vec{M}_S = \int_S \vec{r} \times d\vec{F} = \int_S \vec{r} \times \vec{T} \vec{n} dS = \int_S \epsilon_{ijk} x_i T_{jl} n_l \vec{e}_k dS$$

Aplicando o teorema de Gauss à última integral:

$$\vec{M}_S = \int_V (\epsilon_{ijk} x_i T_{jl})_{,l} \vec{e}_k dV$$



O momento da força  $d\vec{F}$  em relação à origem  $O$  é  $\vec{r} \times d\vec{F}$ . Portanto, o momento relativo a  $O$  de todas as forças de corpo é:

$$\vec{M}_B = \int_V \vec{r} \times d\vec{F} = \int_V \epsilon_{ijk} x_i B_j \vec{e}_k dV$$

Como há equilíbrio de momentos no pedaço de sólido de volume  $V$ , as duas resultantes de momentos se anulam:

$$\vec{M}_s + \vec{M}_B = \vec{0}$$

$$\text{ou} \quad \int_V (\epsilon_{ijk} x_i T_{jl})_{,l} \vec{e}_k dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_i B_j \vec{e}_k dV = \vec{0}$$

$$\int_V [(\epsilon_{ijk} x_i T_{jl})_{,l} + \epsilon_{ijk} x_i B_j] \vec{e}_k dV = \vec{0}$$

Como o pedaço de sólido de volume  $V$  é qualquer, conclui-se que o integrando deve ser identicamente nulo:

$$(\epsilon_{ijk} x_i T_{jl})_{,l} + \epsilon_{ijk} x_i B_j = 0$$

$$\epsilon_{ijk} (x_{i,l} T_{jl} + x_i T_{jl,l} + x_i B_j) = 0$$

Do equilíbrio de forças:

$$x_i (T_{jl,l} + B_j) = 0$$

Logo, voltando à resultante de momentos:

4

$$\epsilon_{ijk} x_{i,l} T_{jl} = 0$$

Como  $x_{i,l} = \delta_{il}$ , então:

$$\epsilon_{ijk} \delta_{il} T_{jl} = \epsilon_{ijk} T_{ji} = 0$$

$$\text{ou } \epsilon_{ijk} T_{ij} = 0$$

$$\epsilon_{ij1} T_{ij} = T_{23} - T_{32} = 0 \Rightarrow T_{23} = T_{32}$$

$$\epsilon_{ij2} T_{ij} = -T_{13} + T_{31} = 0 \Rightarrow T_{13} = T_{31}$$

$$\epsilon_{ij3} T_{ij} = T_{12} - T_{21} = 0 \Rightarrow T_{12} = T_{21}$$

Portanto, o tenor de tensão é simétrico:  $T_{ij} = T_{ji}$

#### 4.6 Tensões principais

As tensões principais e respectivas direções principais correspondem aos auto-valores e auto-vetores do tenor de tensão, respectivamente. Como nota, as tensões principais são as raízes da equação característica:

$$|[T] - T[I]| = T^3 - I_1 T^2 + I_2 T - I_3 = 0$$

com os invariantes:

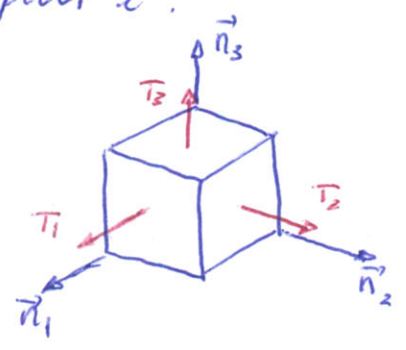
$$I_1 = \text{tr } T$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}$$

A matriz do tensor de tensão  $T$  no sistema de coordenadas correspondente às suas direções principais é:

$$[T]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$



onde  $T_1, T_2$  e  $T_3$  são as tensões principais. Observe a ausência de tensões de cisalhamento nos planos correspondentes às direções principais de tensão.

Tomando  $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ , tem-se para qualquer  $\vec{e}_i$  que

$$T_1 \geq T'_{ii} \geq T_3 \quad (\text{desconsiderar a notação indicial})$$

ou seja, a tensão normal num plano qualquer de um ponto está necessariamente entre  $T_1$  e  $T_3$ .

Exemplo: O estado de tensão uniaxial é aquele para o qual  $T\vec{n} = \sigma(\vec{n} \cdot \vec{m})\vec{m}$ , para qualquer  $\vec{n}$  e para  $\vec{m}$  fixo. Determine as suas tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima e o plano em que ela ocorre. ( $\|\vec{m}\|=1$ )

Solução: Escolhendo uma base  $\{\vec{e}_i\}$  de modo que  $\vec{m} = \vec{e}_1$ , tem-se que as componentes de  $T$  nessa base são:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \vec{e}_1 \cdot T \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot (\sigma \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 = \sigma \\ T_{12} = T_{21} &= \vec{e}_1 \cdot T \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot (\sigma (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_1) = 0 \\ T_{13} = T_{31} &= \vec{e}_1 \cdot T \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot (\sigma (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1) = 0 \\ T_{22} &= \vec{e}_2 \cdot T \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot (\sigma (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1) = 0 \end{aligned}$$

$$T_{23} = \vec{e}_2 \cdot T \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot (\sigma(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1) = 0$$

4.

$$T_{33} = \vec{e}_3 \cdot T \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot (\sigma(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1) = 0$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

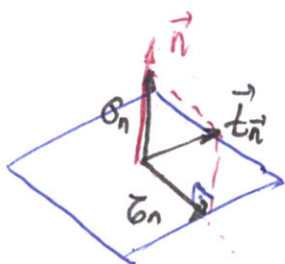
A sua equação característica é:

$$|[T] - T[I]| = (\sigma - T)T^2 = 0$$

cuja raízes são  $T_1 = \sigma$  e  $T_2 = T_3 = 0$ .

Os correspondentes auto-vetores são  $\vec{e}_1$  para  $T_1$  e qualquer outro vetor ortogonal a  $\vec{e}_1$ . Portanto, não há tensão normal nem de cisalhamento em qualquer plano pela partícula normal à direção principal  $\vec{m} = \vec{e}_1$ .

Tensão de cisalhamento máxima:



$$\vec{t}_n^2 = \vec{t}_n \cdot \vec{t}_n = \sigma_n^2$$

$$\vec{t}_n = T \vec{n} = T n_i \vec{e}_i = n_i T \vec{e}_i = n_i T \vec{e}_1 + n_2 T \vec{e}_2 + n_3 T \vec{e}_3 = n_i T \vec{e}_1$$

$$\therefore \vec{t}_n = \sigma n_i \vec{e}_1 \quad \text{e} \quad \vec{t}_n \cdot \vec{t}_n = \sigma n_i \vec{e}_1 \cdot \sigma n_i \vec{e}_1 = \sigma^2 n_i^2$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot T \vec{n} = (n_i \vec{e}_i) \cdot T (n_j \vec{e}_j) = n_i n_j \vec{e}_i \cdot T \vec{e}_j$$

$$T \vec{e}_j = \sigma(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 = \sigma \delta_{j1} \vec{e}_1$$

$$\sigma_n = n_i n_j \vec{e}_i \cdot (\sigma \delta_{j1} \vec{e}_1) = n_i n_j \delta_{j1} \sigma \vec{e}_i \cdot \vec{e}_1 = \sigma n_i \delta_{i1} n_j \delta_{j1} = \sigma n_1^2$$

Voltando a  $\bar{\sigma}_n^2$ :

$$\bar{\sigma}_n^2 = \sigma^2 n_1^2 - \sigma^2 n_1^4$$

Valor máximo de  $\bar{\sigma}_n^2$ :

$$\frac{d}{dn_1} \bar{\sigma}_n^2 = 2\sigma^2 n_1 - 4\sigma^2 n_1^3 = 2\sigma^2 n_1 (1 - 2n_1^2) = 0 \rightarrow$$

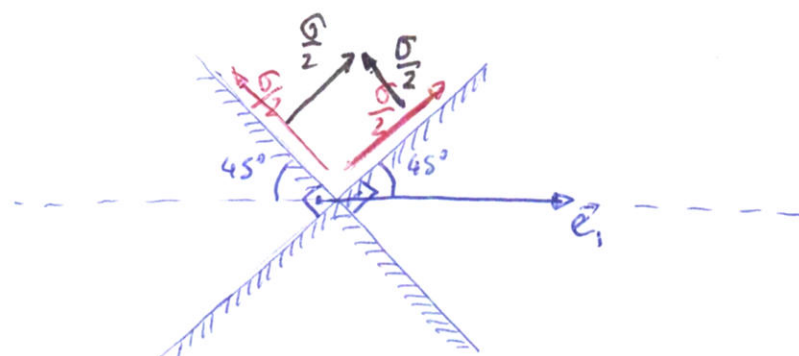
$$\rightarrow n_{10} = 0 \quad \text{ou} \quad n_{10} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

p/  $n_{10} = 0$ :  $\bar{\sigma}_{n0} = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{corresponde à face cuja normal é} \\ \text{direção principal ortogonal a } \vec{e}_1 \end{array} \right.$   
 $\sigma_{n0} = 0$

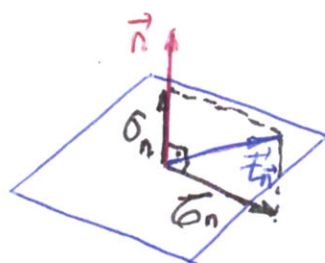
$$p/ n_{10} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad n_{20}^2 + n_{30}^2 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\sigma}_{n0} = \pm \sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{1}{2} - \sigma^2 \cdot \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_{n0} = \sigma \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{2}$$



#### 4.7. Tensão de cisalhamento máxima



Da figura acima, tem-se:

$$\bar{\sigma}_n^2 = \tau_n^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n^2$$

para qualquer plano que corte a partícula. A questão é: qual o plano onde a tensão de cisalhamento é máxima? Para responder a

pergunta, primeiramente vai-se representar o tensor de tensão numa base que coincide com as suas direções principais. A matriz do tensor de tensão é diagonal:

$$[T]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

com as tensões principais  $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ . Nesta forma:

$$\vec{t}_{\vec{n}} \cdot \vec{t}_{\vec{n}} = T \vec{n} \cdot T \vec{n} = \vec{n} \cdot T T \vec{n} = n_1^2 T_1^2 + n_2^2 T_2^2 + n_3^2 T_3^2$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{t}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot T \vec{n} = T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2$$

Portanto,

$$\sigma_n^2 = n_1^2 T_1^2 + n_2^2 T_2^2 + n_3^2 T_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2$$

ou seja:  $\sigma_n^2 = f(n_1, n_2, n_3)$

Deixá-se determinar a normal ao plano,  $\vec{n}_0$ , para o qual  $\sigma_n^2$  é máximo condicionado a  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Isto equivale a determinar o máximo valor de  $\sigma_n$  para  $n_1, n_2$  e  $n_3$  sobre uma superfície esférica de raio 1.

O diferencial de  $\sigma_n^2$  é:

$$d(\sigma_n^2) = \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_3} dn_3$$

Quando se caminha sobre a superfície esférica de raio 1 tem-se:

tem-se:  $n_1 dn_1 + n_2 dn_2 + n_3 dn_3 = 0$

e, além disso, no ponto da esfera onde  $\sigma_n^2$  é máximo tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial n_3} dn_3 = 0$$

com  $n_1, n_2$  e  $n_3$  variando sobre a esfera.

Multiplicando a equação acima por  $n_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2 n_1 dn_1 + \frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2 n_1 dn_2 + \frac{\partial}{\partial n_3} \bar{\phi}_n^2 n_1 dn_3 = 0$$

e substituindo  $n_1 dn_1$  por  $-n_2 dn_2 - n_3 dn_3$  sobre a esfera resulta:

$$\left( \frac{\partial \bar{\phi}_n^2}{\partial n_2} n_1 - \frac{\partial \bar{\phi}_n^2}{\partial n_1} n_2 \right) dn_2 + \left( \frac{\partial \bar{\phi}_n^2}{\partial n_3} n_1 - \frac{\partial \bar{\phi}_n^2}{\partial n_1} n_3 \right) dn_3 = 0$$

Como  $dn_2$  e  $dn_3$  são independentes sobre a superfície esférica de raio 1, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2 n_2 = \frac{\partial}{\partial n_2} \bar{\phi}_n^2 n_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2 n_3 = \frac{\partial}{\partial n_3} \bar{\phi}_n^2 n_1$$

Como  $n_1$  e  $n_2$  são independentes e  $n_1$  e  $n_3$  também, isto sugere que:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2}{n_1} = \frac{\frac{\partial}{\partial n_2} \bar{\phi}_n^2}{n_2} = \frac{\frac{\partial}{\partial n_3} \bar{\phi}_n^2}{n_3} = \mu = \text{constante.}$$

Logo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \bar{\phi}_n^2 = \mu n_1$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} \bar{\phi}_n^2 = \mu n_2$$

$$\frac{\partial}{\partial n_3} \bar{\phi}_n^2 = \mu n_3$$

Determinando as derivadas parciais de  $\bar{\phi}_n^2$ , resulta:

$$2n_1 [T_1^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_1] = \mu n_1$$

$$2n_2 [T_2^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_2] = \mu n_2$$

$$2n_3 [T_3^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_3] = \mu n_3$$

A solução da equação acima é:

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

4-16

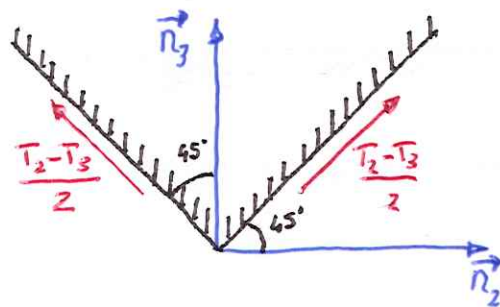
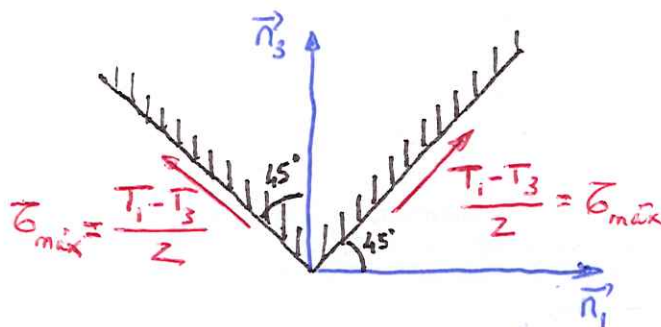
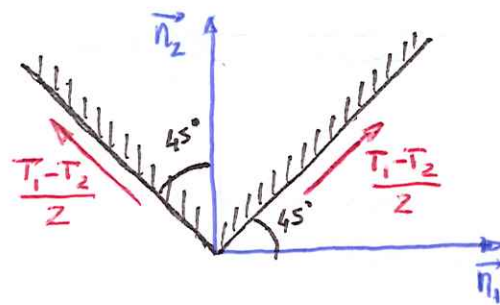
Os planos cujas normais são as três primeiras soluções correspondem às direções principais onde  $\tau_n^2$  é zero. Portanto, são os planos de mínimo valor de  $\tau_n^2$ . Os demais planos correspondem a máximos locais de  $\tau_n^2$ :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ corresponde } \tau_n^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ corresponde } \tau_n^2 = \frac{(T_1 - T_3)^2}{4}$$

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ corresponde } \tau_n^2 = \frac{(T_2 - T_3)^2}{4}$$

Como tomamos  $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ , segue que a máxima tensão de cisalhamento ocorre no plano  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e seu valor é  $\tau_n = \frac{T_1 - T_3}{2}$ .



#### 4.8 O círculo de Mohr de tensão

4-17

Como visto, a tensão normal e a tensão de cisalhamento num plano qualquer de normal  $\vec{n}$  expressas na base  $\{\vec{e}_i\}$  correspondente às direções principais do tensor de tensão são escritas como :

$$\sigma_n = T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2$$

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

Resolvendo as três equações acima para  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  e  $n_3^2$ , obtemos:

$$n_1^2 = \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_2)(\sigma_n - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_3)(\sigma_n - T_1)}{(T_2 - T_3)(T_2 - T_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_1)(\sigma_n - T_2)}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$$

Considere que  $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ .

Como  $0 \leq n_1^2 \leq 1$ , então :

$$0 \leq \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_2)(\sigma_n - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \leq 1$$

ou

$$0 \leq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - (T_2 + T_3)\sigma_n + T_2 T_3 \leq T_1^2 - (T_2 + T_3)T_1 + T_2 T_3$$

Somando  $\left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2$  e subtraindo  $T_2 T_3$  à desigualdade acima, obtemos

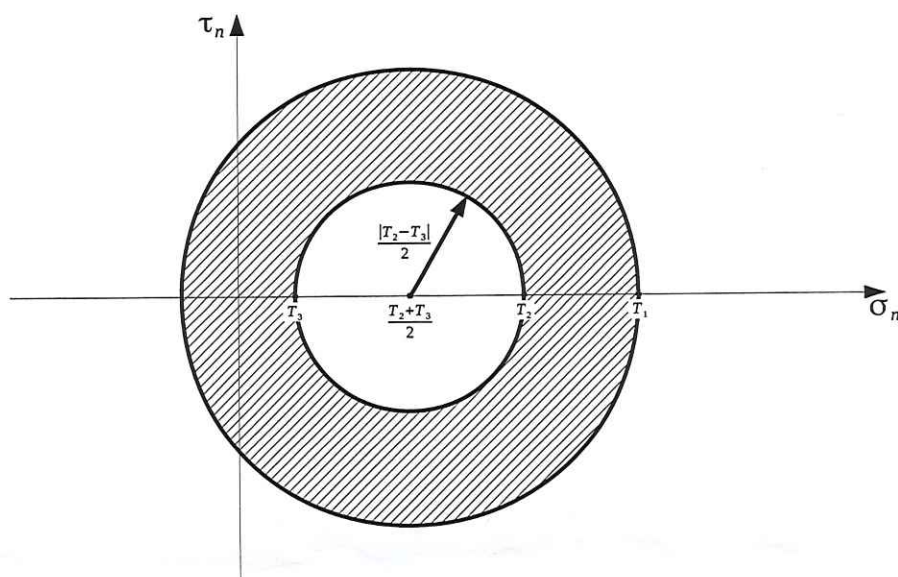
$$\left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 - T_2 T_3 \leq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - (T_2 + T_3)\sigma_n + \left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 \leq T_1^2 - (T_2 + T_3)T_1 + \left(\frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2$$

e, finalmente:

$$\left(\frac{T_2 - T_3}{2}\right)^2 \leq \sigma_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 \leq \left(T_1 - \frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2$$

No plano cartesiano  $\sigma_n \times \tau_n$ , os pontos de coordenadas  $(\sigma_n, \tau_n)$  que satisfazem a desigualdade acima estão na coroa circular centrada no ponto  $(\frac{T_2 + T_3}{2}, 0)$  e de raios interno e externo iguais a  $|\frac{T_2 - T_3}{2}|$  e  $|T_1 - \frac{T_2 + T_3}{2}|$ , respectivamente.

$$\left(\frac{T_2 - T_3}{2}\right)^2 \leq \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 \leq \left(T_1 - \frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 \quad \square$$



Por sua vez, como  $0 \leq R_2 \leq 1$  e  $(T_2 - T_3)(T_2 - T_1) \leq 0$ , tem-se:

$$0 \leq \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_1)(\sigma_n - T_3)}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \leq 1$$

ou  $0 \geq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - T_1 \sigma_n - T_3 \sigma_n + T_1 T_3 \geq T_2^2 - T_1 T_2 - T_3 T_2 + T_1 T_3$

Somando  $\left(\frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2$  e subtraindo  $T_1 T_3$  à desigualdade acima, obtém-se:

$$\left(\frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 - T_1 T_3 \geq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - (T_1 + T_3) \sigma_n + \left(\frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 \geq T_2^2 - (T_1 + T_3) T_2 + \left(\frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2$$

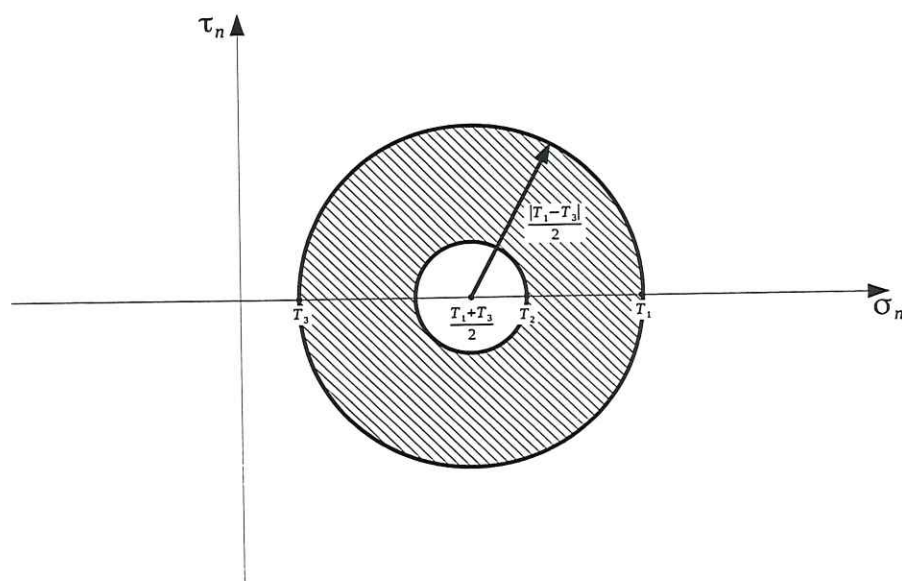
e, finalmente:

4-19

$$\left(\frac{T_1 - T_3}{2}\right)^2 \geq \sigma_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 \geq \left(T_2 - \frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2$$

No plano cartesiano  $\sigma_n \times \tau_n$ , os pontos de coordenadas  $(\sigma_n, \tau_n)$  que satisfazem esta desigualdade estão na coroa circular centrada no ponto  $(\frac{T_1 + T_3}{2}, 0)$  e de raios interno e externo iguais a  $\left|T_2 - \frac{T_1 + T_3}{2}\right|$  e  $\left|\frac{T_1 - T_3}{2}\right|$ , respectivamente.

$$\left(\frac{T_1 - T_3}{2}\right)^2 \geq \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 \geq \left(T_2 - \frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 \quad \square$$



Por último, como  $0 \leq n_3^2 \leq 1$ , então

$$0 \leq \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n - T_1)(\sigma_n - T_2)}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \leq 1$$

ou  $0 \leq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - T_1\sigma_n - T_2\sigma_n + T_1T_2 \leq T_3^2 - T_1T_3 - T_2T_3 + T_1T_2$

Somando  $\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2$  e subtraindo  $T_1T_2$  à desigualdade acima, obtém-se:

$$\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 - T_1T_2 \leq \sigma_n^2 + \sigma_n^2 - (T_1 + T_2)\sigma_n + \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 \leq T_3^2 - (T_1 + T_2)T_3 + \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2$$

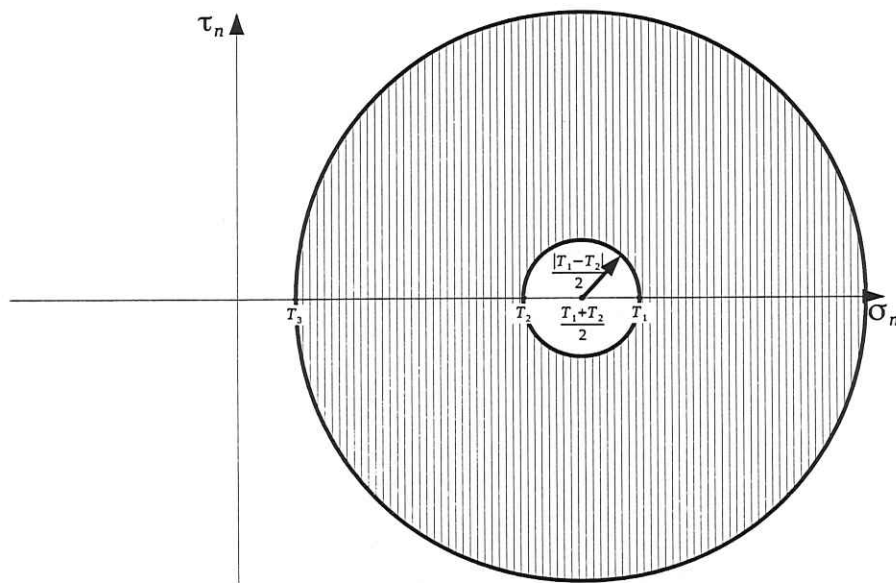
e, finalmente:

4-20

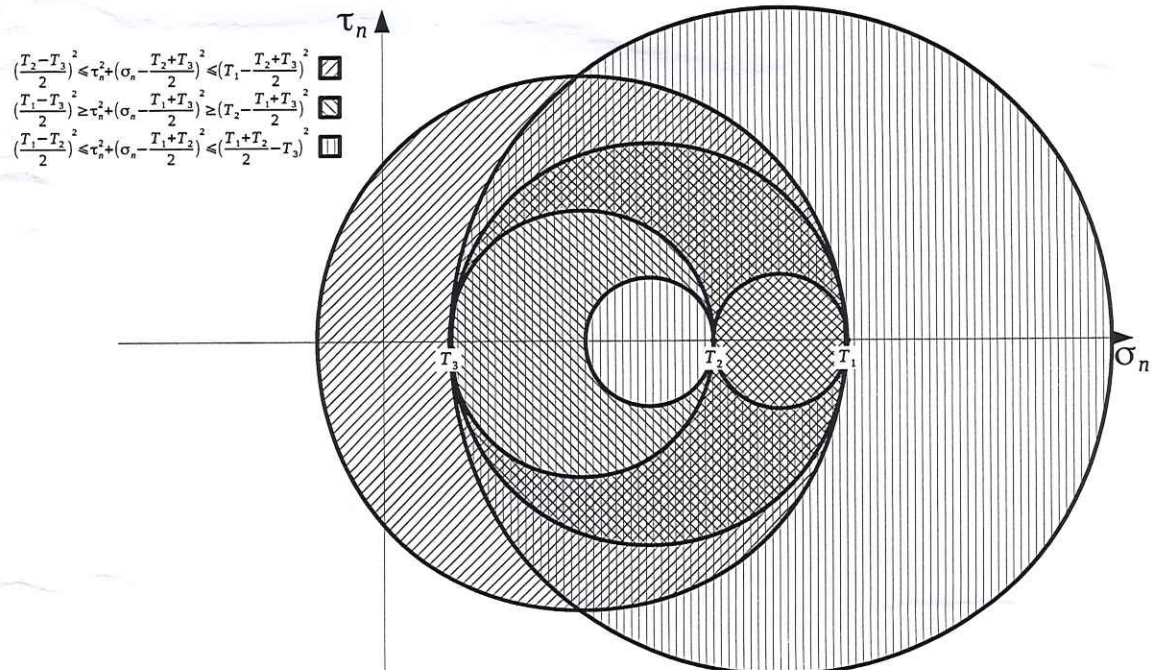
$$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2 \leq \sigma_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3\right)^2$$

No plano cartesiano  $\sigma_n \times \tau_n$ , os pontos de coordenadas  $(\sigma_n, \tau_n)$  que satisfazem esta desigualdade estão na coroa circular centrada no ponto  $(\frac{T_1 + T_2}{2}, 0)$  e de raios interno e externo iguais a  $\left|\frac{T_1 - T_2}{2}\right|$  e  $\left|\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3\right|$ , respectivamente.

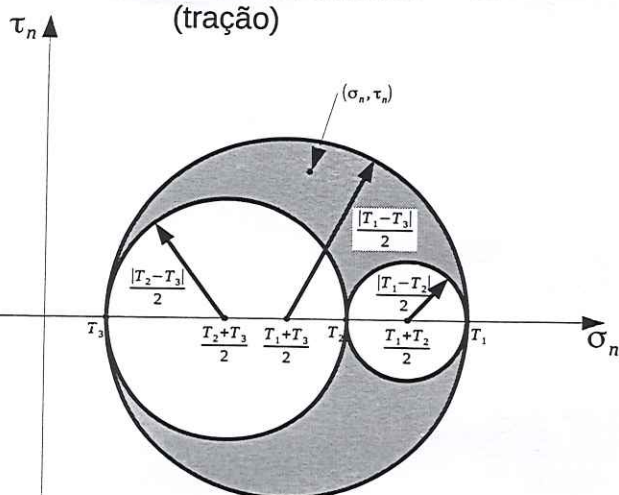
$$\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2 \leq \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3\right)^2 \quad \square$$



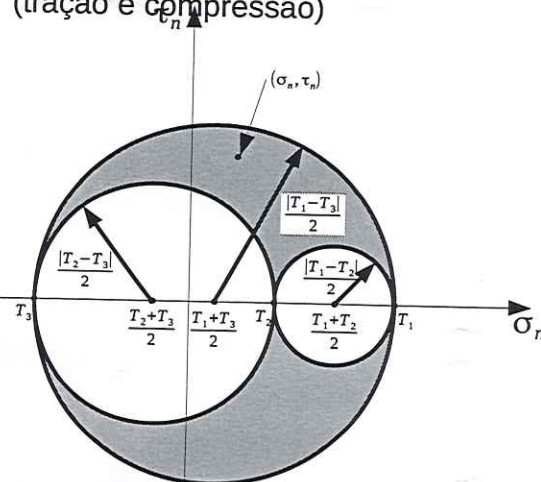
A satisfação das três desigualdades acima corresponde à interseção das três coroas circulares no plano  $\sigma_n \times \tau_n$ , mostradas simultaneamente na figura abaixo. A figura assim formada é chamada de círculo de Mohr de tensão. Repare que são três circunferências com centros no eixo da abscissa e concêntricas entre si. A maior delas está centrada no ponto  $(\frac{T_1 + T_2}{2}, 0)$  e tem raio  $\left|\frac{T_1 - T_2}{2}\right|$ , a interna esquerda está centrada no ponto  $(\frac{T_2 + T_3}{2}, 0)$  e tem raio  $\left|\frac{T_1 - T_3}{2}\right|$ , a interna direita está centrada no ponto  $(\frac{T_1 + T_3}{2}, 0)$  e tem raio  $\left|\frac{T_2 - T_3}{2}\right|$ , conforme as figuras seguintes. O par de tensões



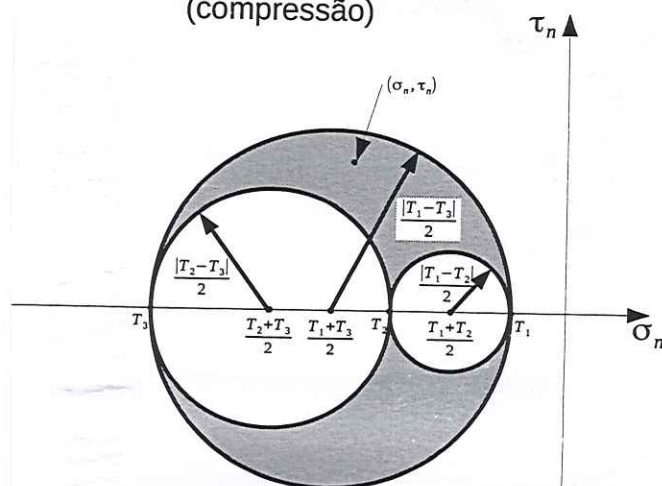
Círculo de Mohr de tensões  
(tração) 



Círculo de Mohr de tensões  
(tração e compressão) 



Círculo de Mohr de tensões  
(compressão) 



4-22

normal e de cisalhamento num plano de normal  $\vec{n}$  qualquer é um ponto na região hachurada do círculo. O círculo pode se encontrar totalmente à direita do eixo das ordenadas, quando a tensão normal por qualquer plano  $\vec{i}$  de tração; ou se encontrar totalmente à esquerda do eixo das ordenadas, quando a tensão normal por qualquer plano  $\vec{i}$  de compressão; ou ser cortado pelo eixo das ordenadas, quando o estado de tensão possui simultaneamente tensões normais de tração e de compressão. A tensão de cisalhamento máxima fica evidente e é igual ao raio da circunferência maior. Os pontos  $(\sigma_n, \tau_n)$  sobre a circunferência externa correspondem aos planos cuja normal está no plano formado pelas direções principais  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_3$ ; os pontos sobre a circunferência interna esquerda correspondem aos planos cuja normal está no plano formado pelas direções principais  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$ ; e os pontos sobre a circunferência interna direita correspondem aos planos cuja normal está no plano formado pelas direções principais  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ . Pelo círculo de Mohr fica fácil de lembrar que nos planos principais de tensão não há tensão de cisalhamento (pontos do círculo que cruzam o eixo das abscissas).

O círculo de Mohr resume bem as principais características do estado de tensão, pelo que se sugere conhecê-lo bem.

Exemplo Dado o estado de tensão num ponto pela matriz <sup>4-23</sup> do tensor de tensão expressa na base  $\{\vec{e}_i\}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

determine o plano onde ocorre a tensão de cisalhamento máxima, o valor desta tensão e da tensão normal nesse mesmo plano.

Solução

Primeiramente vamos determinar as tensões principais do tensor de tensão.

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3} - \lambda & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

Raízes/tensões principais pela ordem decrescente:

$$T_1 = 3$$

$$T_2 = 1$$

$$T_3 = -1$$

Auto-vetores ou direções principais:

Para  $T_1 = 3$ :

$$-\frac{4}{3} n_1^{(1)} - \frac{4}{3} n_3^{(1)} = 0$$

$$-\frac{8}{3} n_2^{(1)} + \frac{4}{3} n_3^{(1)} = 0$$

$$-\frac{4}{3} n_1^{(1)} + \frac{4}{3} n_2^{(1)} - 2n_3^{(1)} = 0$$

$$n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} = 1$$

$$\vec{n}_1 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3$$

para  $T_2 = 1$ :

$$\frac{2}{3}n_1^{(2)} - \frac{4}{3}n_3^{(2)} = 0$$

$$-\frac{2}{3}n_2^{(2)} + \frac{4}{3}n_3^{(2)} = 0$$

$$-\frac{4}{3}n_1^{(2)} + \frac{4}{3}n_2^{(2)} = 0$$

$$n_1^{(2)2} + n_2^{(2)2} + n_3^{(2)2} = 1$$

$$\vec{n}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$$

para  $T_3 = -1$ :

$$\frac{8}{3}n_1^{(3)} - \frac{4}{3}n_3^{(3)} = 0$$

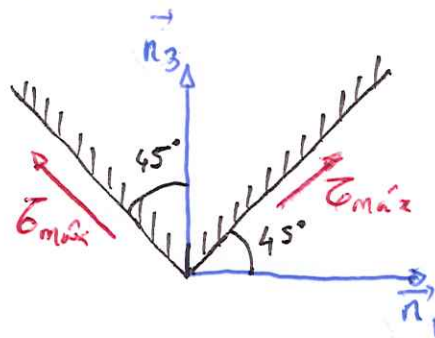
$$\frac{4}{3}n_2^{(3)} + \frac{4}{3}n_3^{(3)} = 0$$

$$-\frac{4}{3}n_1^{(3)} + \frac{4}{3}n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0$$

$$n_1^{(3)2} + n_2^{(3)2} + n_3^{(3)2} = 1$$

$$\vec{n}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$$

Lembrando que a normal ao plano de máxima tensão de cisalhamento está no plano formado por  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_3$  e forma ângulos de  $45^\circ$  com estes dois vetores:



Seja  $\vec{n}$  a normal ao plano de máxima tensão de cisalhamento, então:

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\vec{n}_1 + \vec{n}_3)$$

ou

$$\vec{m}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2$$

$$\vec{m}'' = -\frac{\sqrt{2}}{6} \vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \vec{e}_3$$

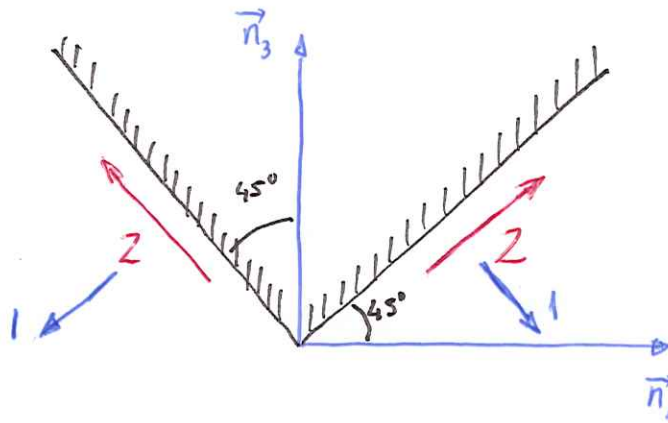
4-2

Tensão de cisalhamento máxima que ocorre num plano:

$$\tau_{\max} = \frac{T_1 - T_3}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

Tensão normal que ocorre num plano:

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{T_1 + T_3}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$



#### 4.9 Tensão esférica e desviadora, octaédrica e de von Mises

Análogo ao que foi feito com o tensor de deformação infinitesimal, o tensor de tensão pode ser decomposto em duas partes, a esférica e a desviadora.

Tensão esférica:

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{ou } \tilde{T} = \frac{1}{3} (\text{tr } T) \mathbf{I}$$

$$\text{ou } [\tilde{T}] = \begin{bmatrix} \frac{\text{tr } T}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{tr } T}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{tr } T}{3} \end{bmatrix}$$

Tensão desviadora:

$$\hat{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{ou } \hat{T} = T - \frac{1}{3} (\text{tr } T) \mathbf{I}$$

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} - \frac{\text{tr } T}{3} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} - \frac{\text{tr } T}{3} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} - \frac{\text{tr } T}{3} \end{bmatrix}$$

As direções principais do tensor tensão desviadora são as mesmas do tensor de tensão, pois se  $\lambda$  e  $\vec{n}$  são o auto-valor e o auto-vetor de  $T$ , respectivamente, então:

$$\hat{T} \vec{n} = T \vec{n} - \frac{1}{3} (\text{tr} T) I \vec{n} = \lambda \vec{n} - \frac{1}{3} (\text{tr} T) \vec{n}$$

ou  $\hat{T} \vec{n} = (\lambda - \frac{\text{tr} T}{3}) \vec{n}$

Isto é, o auto-valor e o auto vetor de  $\hat{T}$  é  $\lambda - \frac{\text{tr} T}{3}$  e  $\vec{n}$ , respectivamente.

### Tensões octaédricas

Define-se plano octaédrico aquele cuja normal forma ângulos iguais com as três direções principais do tensor de tensões. Logo, a normal ao plano octaédrico é representada no sistema de coordenadas correspondente às direções principais por  $\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ , onde  $\{\vec{e}_i\}$  estão alinhados com as direções principais.

As tensões normal e de cisalhamento no plano octaédrico são chamadas de tensões octaédricas.

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot T \vec{n}$$

$$\bar{\sigma}_n^2 = \vec{E}_n \cdot \vec{E}_n - \sigma_n^2$$

Desenvolvendo os termos nas expressões acima:

$$\vec{E}_n = T \vec{n} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} (T_1 \vec{e}_1 + T_2 \vec{e}_2 + T_3 \vec{e}_3)$$

$$\vec{E}_n \cdot \vec{E}_n = \frac{1}{3} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)$$

$$\vec{n} \cdot T \vec{n} = \frac{1}{3} (T_1 + T_2 + T_3)$$

Logo:

$$\sigma_n = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} (T_1 + T_2 + T_3) = \frac{1}{3} T_{kk} = \frac{1}{3} I_1$$

onde  $I_1$  é o primeiro invariante de  $T$ . E:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n^2 = \bar{\sigma}_{oct}^2 &= \left( \frac{T_1 - T_2}{3} \right)^2 + \left( \frac{T_1 - T_3}{3} \right)^2 + \left( \frac{T_2 - T_3}{3} \right)^2 \\ &= \frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2 \end{aligned}$$

onde  $I_2$  é o segundo invariante de  $T$ .

A prova deste último resultado segue:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \frac{1}{3} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) - \frac{1}{9} (T_1 + T_2 + T_3)^2 \\ &= \frac{1}{9} (3T_1^2 + 3T_2^2 + 3T_3^2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2 - 2T_1T_2 - 2T_1T_3 - 2T_2T_3) \\ &= \frac{1}{9} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2 + T_1^2 - 2T_1T_3 + T_3^2 + T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) \\ &= \frac{1}{9} [(T_1 - T_2)^2 + (T_1 - T_3)^2 + (T_2 - T_3)^2]\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \frac{1}{9} (2T_1^2 + 2T_2^2 + 2T_3^2 - 2T_1T_2 - 2T_1T_3 - 2T_2T_3) \\ &= \frac{1}{9} (2T_1^2 + 2T_2^2 + 2T_3^2 + 4T_1T_2 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 - 6T_1T_2 - 6T_1T_3 - 6T_2T_3) \\ &= \frac{1}{9} [2(T_1 + T_2 + T_3)^2 - 6(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)] \\ &= \frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2\end{aligned}$$

Tensão efetiva ou de von Mises

$$\sigma_e^2 = \sigma_{vm}^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{2} + \frac{(T_1 - T_3)^2}{2} + \frac{(T_2 - T_3)^2}{2}$$

Esta se relaciona com a tensão octaédrica de esalhamento por meio de expressão:

$$\sigma_e^2 = \frac{9}{2} \sigma_{oct}^2$$

Se num ponto do sólido a tensão de von Mises atinge a tensão de escoamento de um material dútil, então o material está numa condição de falha. Por isso, muitos pacotes do método dos elementos finitos dão como opção exibir o mapa de distribuição de tensão de von Mises na peça analisada.

Exemplo: Dada a matriz de um tensor de tensões num determinado ponto de um sólido na base  $\{\vec{e}_i\}$ :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

determine os tensores esférico e deviator, as tensões octaédrica e de von Mises num ponto.

Solução:

Primariamente vamos determinar as tensões principais do tensor de tensão.

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3} - \lambda & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

Raízes / tensões principais:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 3$$

$$T_3 = -1$$

Invariantes do tensor:

$$I_1 = \text{tr} T = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$I_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -1$$

Tensão esférica:

$$\tilde{T} = \frac{1}{3} (\text{tr} T) I = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot I = I$$

Tensão deviatora:

$$\hat{T} = T - \tilde{T}$$

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} - 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} - 1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Tensão normal octaédrica:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Tensão de cisalhamento octaédrica:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2} = \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot -1} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

Tensão de von Mises:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{(T_1 - T_2)^2}{2} + \frac{(T_1 - T_3)^2}{2} + \frac{(T_2 - T_3)^2}{2}} = \sqrt{\frac{(1-3)^2}{2} + \frac{(1+1)^2}{2} + \frac{(3+1)^2}{2}} = \sqrt{12}$$

$$\sigma_{vm} = 2\sqrt{3}$$