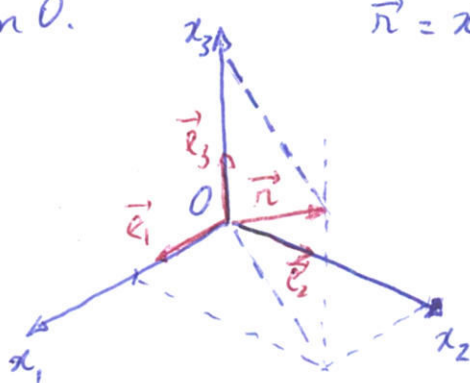


2.1. Campo escalar

Seja $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto do espaço $\mathbb{R}^3$ relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas definida positiva em O .

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x_i \vec{e}_i$$



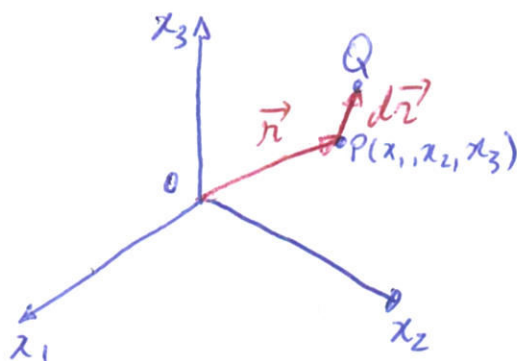
O campo escalar é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, $\mathbb{R}^3$) um escalar:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \varphi(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$$

Por exemplo, a distribuição de temperatura numa peça pode ser descrita por meio de um campo de temperatura na peça.

2.1.1. Gradiente de um campo escalar

Sejam φ um campo escalar, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(O, (x_1, x_2, x_3))$ e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal qualquer.



16
Seja φ uma função dependente de três variáveis (x_1, x_2, x_3) , do cálculo de várias variáveis tem-se que a variação de φ do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ é:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

Pode-se mostrar que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ são as componentes de um vetor denominado gradiente de φ ($\nabla \varphi$). Como dx_1, dx_2, dx_3 são as componentes de $d\vec{r}$, tem-se:

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r}$$

Se dr denota a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot \vec{e} dr$$

$$\text{ou } \frac{d\varphi}{dr} = \nabla \varphi \cdot \vec{e}$$

Isto é, a componente de $\nabla \varphi$ na direção $\vec{e}$ é a taxa de variação de φ nessa direção (a derivada direcional). Assim a taxa de variação de φ na direção $\vec{e}_1$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, na direção $\vec{e}_2$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ e na direção $\vec{e}_3$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$.

O vetor gradiente, $\nabla \varphi$, aponta na direção da máxima variação do campo escalar no ponto, pois $\nabla \varphi \cdot \vec{e}$ é máximo quando ambos têm a mesma direção e sentido.

Exemplo Se $\varphi = x_1 x_2 + x_3$, determine um vetor normal à superfície de φ constante que passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1, 0)$.

Solução: O vetor gradiente é perpendicular à superfície de φ constante.

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3 = x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\nabla \varphi(2,1,0) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Normalizando $\nabla \varphi$:

$$\vec{n} = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \frac{\sqrt{6}}{6} (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

2.2. Campo vetorial

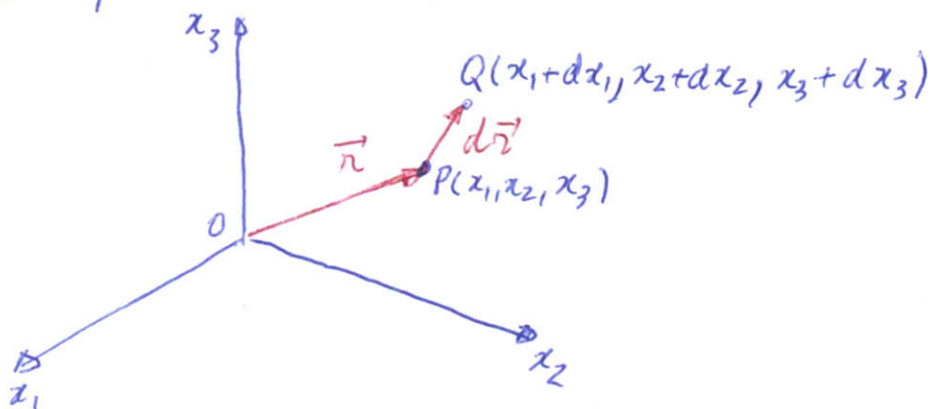
O campo vetorial é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, $\mathbb{R}^3$) um vetor:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \vec{v}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Por exemplo, o campo de deslocamento das partículas de um sólido; ou o campo de velocidade das mesmas partículas.

2.2.1. Gradiente de um campo vetorial

Sejam $\vec{v}$ um campo vetorial, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(0, x_1, x_2, x_3)$, e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal de posição qualquer.



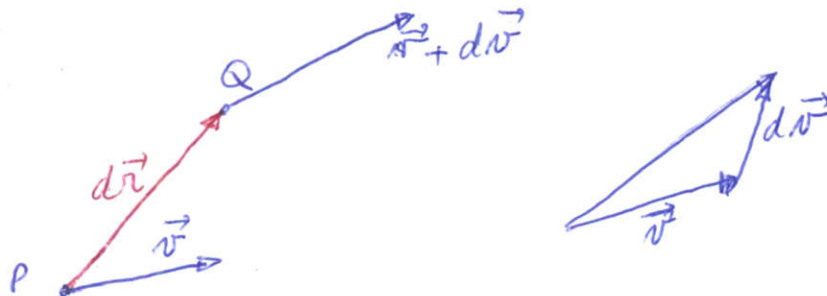
Seja $\vec{v}$ uma função de três variáveis (x_1, x_2, x_3) , ou ainda, sendo as componentes de $\vec{v}$, v_i , funções escalares, tem-se que a variação de v_i do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ é:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

18

Na equação acima, dx_i e dx_j são vetores, o que sugere que $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ sejam as componentes de um tensor. De fato, $\nabla \vec{v}$ é o tensor gradiente do campo vetorial $\vec{v}$ e suas componentes são $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}) = (\nabla \vec{v}) d\vec{r}$$



Se dr denota a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então:

$$d\vec{v} = (\nabla \vec{v}) \vec{e} dr$$

ou $\frac{d\vec{v}}{dr} = (\nabla \vec{v}) \vec{e}$

Isto é, o vetor $(\nabla \vec{v}) \vec{e}$ na direção $\vec{e}$ é a taxa de variação de $\vec{v}$ nessa direção (a derivada direcional). Logo, considerando um sistema de coordenadas cartesianas, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = (\nabla \vec{v}) \vec{e}_i$ é a taxa de variação do campo vetorial $\vec{v}$ na direção $\vec{e}_i$.

Matricialmente, o tensor gradiente de um campo vetorial

é:

$$[\nabla \vec{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

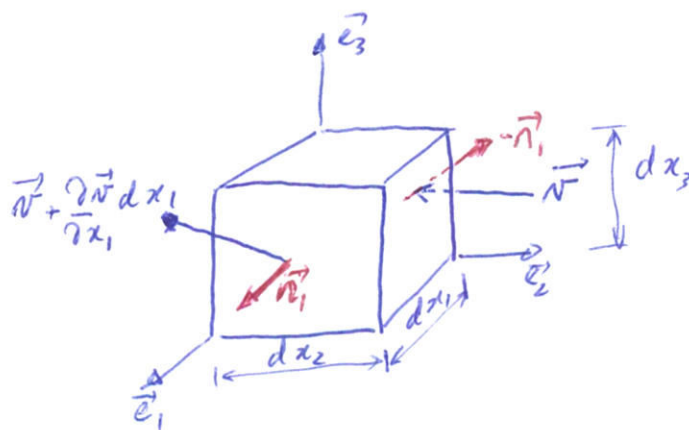
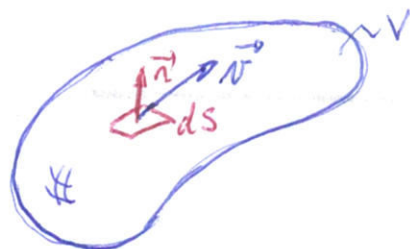
2.2.2. Divergente de um campo vetorial

19

O divergente de um campo vetorial $\vec{v}$ é o campo escalar dado pelo traço do gradiente de $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{tr}(\nabla \vec{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

ou $\nabla \cdot \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V}$ (fluxo de $\vec{v}$ por unidade de volume)



$$\begin{aligned} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \left[\left(\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} dx_1 \right) \cdot \vec{e}_1 - \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \right] dx_2 dx_3 + \\ &+ \left[\left(\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} dx_2 \right) \cdot \vec{e}_2 - \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \right] dx_1 dx_3 + \\ &+ \left[\left(\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} dx_3 \right) \cdot \vec{e}_3 - \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \right] dx_1 dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v} \cdot \vec{e}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{v} \cdot \vec{e}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{v} \cdot \vec{e}_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \Delta V \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Exemplo: Determine as componentes simétrica e antisimétrica do gradiente do campo de deslocamento $\vec{u} = x_1^2 x_2 \vec{e}_1 + 2x_2 x_3 \vec{e}_2 + 3x_1 x_3^2 \vec{e}_3$. Determine também o divergente desse campo.

Solução:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2x_1 x_2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = x_1^2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2x_3; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 2x_2$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 3x_3^2; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 6x_1 x_3$$

Gradiente

$$\therefore \nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 3x_3^2 & 0 & 6x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

$$(\nabla \vec{u})_S = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{3x_3^2}{2} \\ \frac{x_1^2}{2} & 2x_3 & x_2 \\ \frac{3x_3^2}{2} & x_2 & 6x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

$$(\nabla \vec{u})_A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_1^2}{2} & -\frac{3x_3^2}{2} \\ -\frac{x_1^2}{2} & 0 & x_2 \\ \frac{3x_3^2}{2} & -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Divergente

$$\nabla \cdot \vec{u} = \text{tr}(\nabla \vec{u}) = 2x_1 x_2 + 2x_3 + 6x_1 x_3$$

2.3. Campo Tensorial

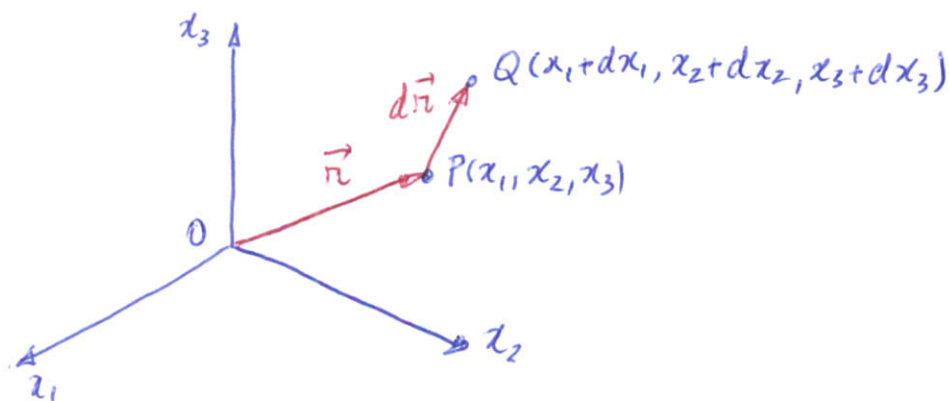
O campo tensorial é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, $\mathbb{R}^3$) um tensor:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow T(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^9$$

Por exemplo, o campo de tensão ou de deformação num sólido.

2.3.1. Gradiente de um campo Tensorial

Sejam T um campo tensorial, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(0, (x_1, x_2, x_3))$ e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal de posição qualquer.

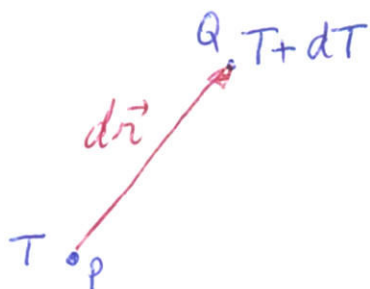


Seja T uma função de três variáveis (x_1, x_2, x_3) , ou seja, sendo as componentes de T , T_{ij} , funções escalares, tem-se que a variação de T_{ij} do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ é:

$$dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} dx_k$$

Na equação acima, dT_{ij} e dx_k são componentes de tensor e vetor, respectivamente, o que sugere que $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$ sejam as componentes de um tensor de 3ª ordem. De fato, ∇T é o gradiente do campo tensorial T e suas componentes são $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$.

$$dT = T(\vec{r} + d\vec{r}) - T(\vec{r}) = (\nabla T) d\vec{r}$$



Se dr denotar a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então:

$$dT = (\nabla T) \vec{e} dr$$

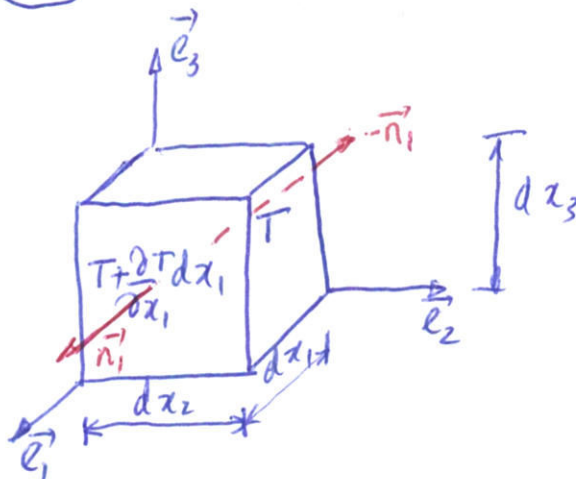
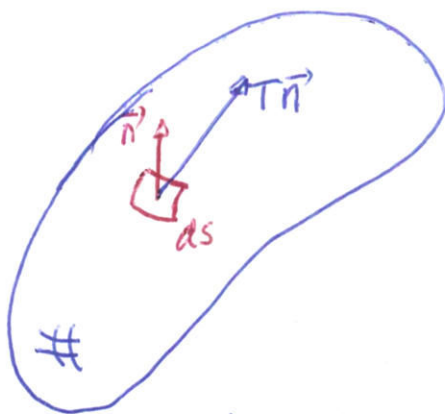
$$\text{ou } \frac{dT}{dr} = (\nabla T) \vec{e}$$

Isto é, o tensor $(\nabla T) \vec{e}$ é a taxa de variação de T na direção $\vec{e}$ (a derivada direcional). Logo, considerando um sistema de coordenadas cartesianas, $\frac{\partial T}{\partial x_i} = (\nabla T) \vec{e}_i$ é a taxa de variação do campo tensorial T na direção $\vec{e}_i$.

2.3.2. Divergente de um campo tensorial

O divergente de um campo tensorial T é o campo vetorial definido como:

$$\nabla \cdot T = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S T \vec{n} ds}{\Delta V}$$



$$\begin{aligned}
 \int_S T \vec{n} ds &= \left[\left(T + \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 \right) \vec{e}_1 - T \vec{e}_1 \right] dx_2 dx_3 + \\
 &+ \left[\left(T + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 \right) \vec{e}_2 - T \vec{e}_2 \right] dx_1 dx_3 + \\
 &+ \left[\left(T + \frac{\partial T}{\partial x_3} dx_3 \right) \vec{e}_3 - T \vec{e}_3 \right] dx_1 dx_2 \\
 &= \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \vec{e}_k \right) dV
 \end{aligned}$$

Como :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (T \vec{e}_k) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \vec{e}_k + T \left(\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x_k} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \vec{e}_k$$

mas :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (T \vec{e}_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} \vec{e}_i) = \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \right) \vec{e}_i + T_{ik} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \right) \vec{e}_i$$

Portanto:

$T_{ik,k}$

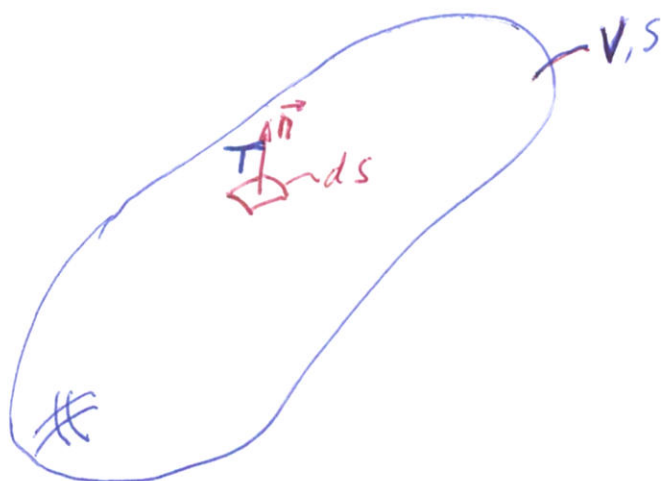
24

$$\nabla \cdot T = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \vec{e}_i$$

ou seja, o divergente de T é o vetor de componentes $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$.

Se T for o tenzor de tensão numa partícula, o divergente de T numa partícula é a resultante de forças de contato sobre a partícula por unidade de volume.

2.4. O Teorema de Gauss (ou da divergência)



Seja S uma superfície contínua por partes que fecha a região do espaço de volume V. Se um campo Tensional de ordem qualquer, T, é contínuo e tem derivada primeira contínua em V, então:

$$\int_S T \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot T dV$$

ou

$$\int_S T_{ij \dots k} n_k dS = \int_V T_{ij \dots k, k} dV$$

Este Teorema não é útil para determinar a resultante de forças externas sobre um sólido. 25

Ex: Obtenha o divergente do tensor simétrico

$$[T] = \begin{bmatrix} 2x_1^2 & 3x_1x_2 & 4x_1x_3 \\ 3x_1x_2 & 4x_2^2 & 5x_2x_3 \\ 4x_1x_3 & 5x_2x_3 & 6x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$T_{1k,k} = T_{11,1} + T_{12,2} + T_{13,3} = 4x_1 + 3x_1 + 4x_1 = 11x_1$$

$$T_{2k,k} = T_{21,1} + T_{22,2} + T_{23,3} = 3x_2 + 8x_2 + 5x_2 = 16x_2$$

$$T_{3k,k} = T_{31,1} + T_{32,2} + T_{33,3} = 4x_3 + 5x_3 + 12x_3 = 21x_3$$

$$\therefore \nabla \cdot T = 11x_1 \vec{e}_1 + 16x_2 \vec{e}_2 + 21x_3 \vec{e}_3$$