CAPíTULO 1

Vetores e tensores

1.1. Notação indicial

A notação indicial é uma simplificação da notação de uma somatória. Antes de explicar a notação indicial, convém definir *monômio*, *coeficiente* e *índice. Monômio* é o termo de uma somatória, sendo que cada *monômio* é o produto de um ou mais *coeficientes.* Cada *coeficiente* pode possuir nenhum, um ou mais *índices.* Será convencionado aqui que os *índices* se posicionam à direita e embaixo do *coeficiente.* Os *índices* podem ser os números 1, 2 ou 3 e, quando representados por letras, expressam implicitamente um desses três números. Por exemplo, seja a somatória de 3 *monômios* $a_i\, b_i$ (*coeficiente* a_i multiplicado pelo *coeficiente* b_i) com o índice i variando de 1 a 3:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \tag{1.1}$$

Em notação indicial esta somatória se escreve simplesmente:

$$a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

Na notação indicial subentende-se que o(s) índice(s) varia(m) de 1 a 3, ou seja, pode-se simplesmente omitir $i = 1, 2, 3$ no final da expressão:

$$a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \tag{1.3}$$

Esta última expressão é que melhor exprime a notação indicial, pois é a forma mais simplificada de representar a somatória entre as três possibilidades acima.

Veja-se um outro exemplo:

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, b_j = T_{i1}\, b_1 + T_{i2}\, b_2 + T_{i3}\, b_3 \tag{1.4}$$

Agora existem dois índices, i e j, ambos variando de 1 a 3. O primeiro será chamado *índice livre* e o segundo *índice mudo.* O *índice mudo* (neste exemplo j) é o que perfaz a somatória e *sempre se repete uma única vez no monômio.* O *índice livre* (neste exemplo, i) *nunca se repete no monômio.* Na notação indicial, o(s) índice(s) *não repetido(s)* é(são) denominado(s) índice(s) livre(s) e o(s) repetido(s) *uma única vez* é(são) denominados índice(s) mudo(s). No exemplo anterior, o resultado da somatória poderia ser denotado, seguindo a notação indicial, como:

$$a_i = T_{ij}\, b_j \tag{1.5}$$

O coeficiente a_i é o resultado da somatória $T_{ij}\, b_j$ para i igual a 1, 2 ou 3. Nesta última expressão o índice livre i aparece nos dois membros, significando que há 3 equações e cada uma delas tem uma somatória em j:

$$\begin{aligned} a_1 &= T_{11}\, b_1 + T_{12}\, b_2 + T_{13}\, b_3 \\ a_2 &= T_{21}\, b_1 + T_{22}\, b_2 + T_{23}\, b_3 \\ a_3 &= T_{31}\, b_1 + T_{32}\, b_2 + T_{33}\, b_3 \end{aligned}$$

Um monômio pode ter mais de um índice livre e mais de um índice mudo. Por exemplo, na expressão a seguir há nenhum índice livre e dois índices mudos, significando que há duas somatórias, uma no índice mudo i e outra no j:

$$\begin{aligned} T_{ij}\,S_{ij} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\,S_{ij} \\ &= T_{11}\,S_{11} + T_{12}\,S_{12} + T_{13}\,S_{13} + T_{21}\,S_{21} + T_{22}\,S_{22} + T_{23}\,S_{23} + T_{31}\,S_{31} + T_{33}\,S_{32} + T_{32}\,S_{33} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe-se que não existe nenhum índice livre na notação indicial acima. Portanto, não pode ser atribuído nenhum índice ao resultado desta somatória, como no exemplo anterior.

1.1.1. Propriedades da adição de monômios.

1.1.1.1. *Associativa.*

$$(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$$

1.1.1.2. *Comutativa.*

$$a_i + b_i = b_i + a_i$$

1.1.2. Propriedades da multiplicação de monômios.

1.1.2.1. *Comutativa.*

$$a_i\,b_j = b_j\,a_i$$

1.1.2.2. *Associativa.*

$$(a_i\,b_j)\,c_k = a_i(b_j\,c_k)$$

1.1.2.3. *Distributiva.*

$$a_i(b_j + c_j) = a_i\,b_j + a_i\,c_j$$

1.2. Representação de vetores numa base ortonormal definida positiva

Uma base ortonormal de vetores $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\} = \{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}\}$ é aquela em que os três vetores são ortogonais entre si e têm módulo unitário. A base ainda é dita definida positiva se são verificadas as seguintes relações entre os elementos da base:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \\ \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \\ \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \end{aligned}$$

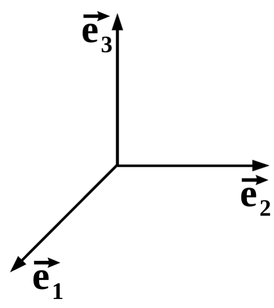


FIGURA 1.1. Base ortonormal de vetores definida positiva.

De aqui em diante esta base de vetores será denotada simplesmente por $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ pode ser representado numa base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ por meio das suas componentes nas direções dos três elementos dessa base. As componentes de $\vec{\mathbf{v}}$ na base são as suas projeções nas três direções:

$$v_1 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}) \tag{1.7}$$

$$v_2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}) \tag{1.8}$$

$$v_3 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}) \tag{1.9}$$

onde $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ denota o módulo de $\vec{\mathbf{v}}$, $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i})$ e $\cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i})$ são o ângulo diretor e o cosseno diretor, respectivamente, entre $\vec{\mathbf{v}}$ e o elemento $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ da base.

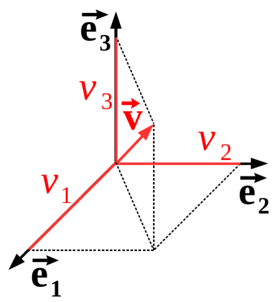


FIGURA 1.2. Componentes do vetor $\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Em notação indicial, um vetor pode ser representado na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ como:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = v_1\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + v_2\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + v_3\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

Um vetor costuma ser escrito matricialmente por meio de uma matriz coluna 3×3 cujos coeficientes são as componentes do vetor na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

1.2.1. Módulo de um vetor. O módulo de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é por definição o seu comprimento. Na representação na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ o módulo se escreve:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

ou em notação indicial:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = v_i\, v_i$$

1.2.2. Multiplicação de um escalar por um vetor. Sejam α um escalar e $\vec{\mathbf{v}}$ um vetor. Define-se o produto de α com $\vec{\mathbf{v}}$ o vetor que tem a mesma direção de $\vec{\mathbf{v}}$ e módulo igual a $|\alpha|\, \|\vec{\mathbf{v}}\|$. Sua representação na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ é:

$$\alpha\, \vec{\mathbf{v}} = \alpha\, v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \alpha\, v_1\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \alpha\, v_2\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \alpha\, v_3\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

1.2.3. Adição de vetores. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ dois vetores quaisquer. A soma de ambos é o vetor de componentes $v_i + u_i$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} = v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} + u_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = (v_i + u_i)\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

1.2.3.1. *Propriedades da adição.*

1.2.3.1.1. Associativa. $$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})$$

1.2.3.1.2. Comutativa. $$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$$

1.2.4. O vetor oposto. O *oposto* de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$, denotado por $-\vec{\mathbf{v}}$, é o vetor de sentido contrário ao de $\vec{\mathbf{v}}$. Sua representação na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ é:

$$-\vec{\mathbf{v}} = -v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

1.2.5. O delta de Kronecker δ. O *delta de Kronecker (δ_{ij})* é o coeficiente de dois índices definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Matricialmente ele se identifica com a matriz identidade:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguem algumas regras associadas ao *delta de Kronecker*:

$$\begin{aligned} &\delta_{ii} = 3 \\ &a_i\,\delta_{ij} = a_j \\ &b_{ij}\,\delta_{ij} = b_{ii} = b_{jj} \\ &b_{ik}\,\delta_{kj} = b_{ij} \\ &b_{ki}\,\delta_{kj} = b_{ji} \end{aligned}$$

Observe nas expressões $b_{ik}\,\delta_{kj}$ e $b_{ki}\,\delta_{kj}$ que o δ de Kronecker "desaparece" permanecendo o coeficiente b com o índice *mudo* k substituído pelo índice *livre* do delta de Kronecker. Esta regra vale para quantos índices houver no coeficiente. Assim, por exemplo:

$$\begin{aligned} &c_{ijml}\,\delta_{mk} = c_{ijkl} \\ &c_{ijlm}\,\delta_{mk} = c_{ijlk} \end{aligned}$$

1.2.6. Produto escalar entre vetores. O produto escalar entre dois vetores quaisquer, $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$, é por definição o escalar (o número):

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$$

A partir da definição de produto escalar, os elementos de uma base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ verificam a seguinte identidade:

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \delta_{ij}$$

1.2.6.1. *Propriedades do produto escalar.*

1.2.6.1.1. Comutativa.

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

1.2.6.1.2. Distributiva.

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$$

1.2.6.1.3. Multiplicação por um escalar. A multiplicação de um produto escalar por um escalar verifica as seguintes identidades:

$$\alpha\,\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\alpha\,\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\alpha\,\vec{\mathbf{v}})$$

onde α é um escalar.

1.2.6.2. *Componentes de um vetor na base* $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. As componentes de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são as suas projeções em cada um dos elementos que a compõem:

$$v_i = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

Portanto, a componente v_i do vetor $\vec{\mathbf{v}}$ obtém-se pelo produto escalar entre $\vec{\mathbf{v}}$ e o elemento $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ da base.

1.2.6.3. *Representação do produto escalar na base* $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Na representação da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, o produto escalar entre dois vetores $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ se escreve:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (u_i\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) \cdot (v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = u_i\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = u_i\,v_j\,\delta_{ij} = u_i\,v_i = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

ou seja, o produto escalar é soma do produto das componentes dos vetores na base.

1.2.6.3.1. Módulo de um vetor. O módulo de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = v_i\,v_i = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

1.2.7. O símbolo de permutação ε. O símbolo de permutação ε é empregado, por exemplo, na representação do produto externo entre dois vetores por meio da notação indicial. Ele é definido da seguinte forma:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$
$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$
$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{122} = \cdots = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{332} = \varepsilon_{333} = 0$$

Como é difícil memorizar todas as possibilidades, a dica é:

(1) para índices repetidos o símbolo de permutação é nulo;
(2) para índices não repetidos e na sequência anti-horária $(\cdots, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots)$ o símbolo de permutação é igual a 1 (Fig. 1.3 à esquerda);
(3) para índices não repetidos e na sequência horária $(\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \cdots)$ o símbolo de permutação é igual a -1 (Fig. 1.3 à direita).

ou ainda:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ se } i, j, k \text{ é uma permutação par de } 1, 2, 3 \\ -1, \text{ se } i, j, k \text{ é uma permutação ímpar de } 1, 2, 3 \\ 0 \text{ do contrário} \end{cases}$$

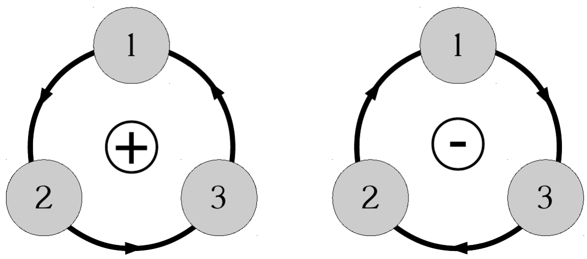


FIGURA 1.3. Sequência anti-horária (esquerda) e horária (direita) dos índices do símbolo de permutação.

A seguinte propriedade é importante para operações com o índice de permutação:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$$

Para memorizar estas relações, a dica é:

(1) se os símbolos de permutação comparados têm sequências de índices horária e horária ou anti-horária e anti-horária, então eles são iguais (Fig. 1.4 à esquerda);
(2) se os símbolos de permutação comparados têm sequências de índices horária e anti-horária ou anti-horária e horária, então eles são opostos (Fig. 1.4 à direita).

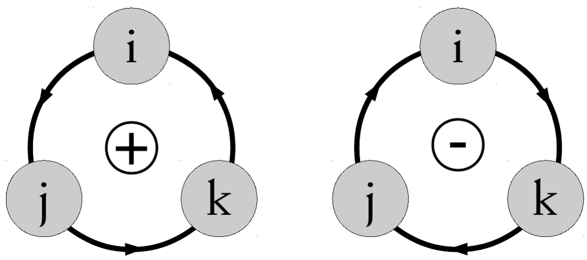


FIGURA 1.4. Sequência anti-horária (esquerda) e horária (direita) dos índices do símbolo de permutação.

Seguem algumas identidades úteis entre o símbolo de permutação e o delta de Kronecker:

$$\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} - \delta_{il}\,\delta_{jk}$$
$$\varepsilon_{imn}\,\varepsilon_{jmn} = 2\,\delta_{ij}$$

1.2.8. Produto externo entre vetores. Uma vez apresentado o símbolo de permutação, chegou o momento de aplicá-lo na obtenção do produto externo entre dois vetores. Antes, porém, convém recordar que o produto externo entre dois vetores, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, é um vetor perpendicular a ambos vetores, de módulo $\|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{u}}\|\ \mathrm{sen}\,(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}})$ e sentido dado pela regra da mão direita ou do saca-rolha.

Um resultado útil é aquele que decorre da aplicação do produto externo aos elementos de uma base ortonormal definida positiva $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$
$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$$
$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$$

ou simplesmente, como pode ser verificado:

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \varepsilon_{ijk}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}$$

1.2.8.1. *Propriedades do produto externo.*

1.2.8.1.1. Propriedade associativa. O produto externo é associativo, ou seja:

$$(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$

1.2.8.1.2. Propriedade distributiva. O produto externo é distributivo, ou seja:

$$\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$$

1.2.8.1.3. Multiplicação por um escalar. A multiplicação de um produto externo por um escalar verifica as seguintes identidades:

$$\alpha\,\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (\alpha\,\vec{\mathbf{u}}) \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \times (\alpha\,\vec{\mathbf{v}})$$

onde α é um escalar.

1.2.8.2. *Componentes do produto externo numa base.* As componentes do produto externo entre dois vetores quaisquer $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ é deduzida a seguir:

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_i\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) \times (v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = u_i\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \varepsilon_{ijk}\,u_i\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}$$

ou seja:

$$w_i = \varepsilon_{ijk}\,u_j\,v_k$$

1.3. Tensores

No estudo da mecânica dos sólidos é preciso trabalhar com tensões e deformações. Uma ferramenta matemática que facilita a análise de tensões e deformações no sólido são os tensores. A seguir serão definidos os tensores, as suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ e algumas propriedades.

1.3.1. Definição de tensor. Tensor é um operador linear, $\mathbf{T}$, que relaciona um vetor qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ a um único vetor $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$. Decorre de sua linearidade que:

$$\mathbf{T}(\alpha\vec{\mathbf{v}}) = \alpha\mathbf{T}\vec{\mathbf{v}}$$
$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{T}\vec{\mathbf{u}}$$
$$\mathbf{T}(\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{u}}) = \alpha\mathbf{T}\vec{\mathbf{v}} + \beta\mathbf{T}\vec{\mathbf{u}}$$

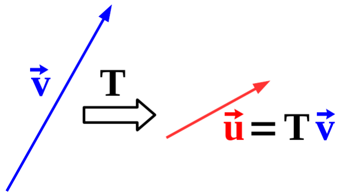


FIGURA 1.5. Ilustração da definição de tensor.

1.3.2. Componentes de um tensor. Considere um tensor $\mathbf{T}$ e a base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Ao aplicar $\mathbf{T}$ a cada um dos elementos de $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, obtêm-se três vetores, genericamente expressos por $\vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{T}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$. Cada um destes três vetores tem componentes em $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ dadas genericamente por:

$$\vec{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = T_{11}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{21}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{31}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j1}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$$
$$\vec{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = T_{12}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{22}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{32}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j2}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$$
$$\vec{\mathbf{t}}_3 = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{13}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{23}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{33}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j3}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$$

ou simplesmente:

$$\vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = T_{1i}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{2i}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{3i}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{ji}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$$

Os coeficientes $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, \cdots, T_{32}, T_{33}$ representam univocamente o tensor $\mathbf{T}$ e são as componentes dele na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Portanto, são 9 o número de componentes de um tensor.

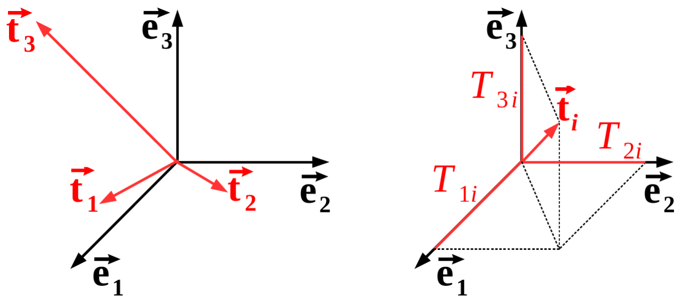


FIGURA 1.6. Vetores associados a cada vetor da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ (esquerda) e componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{t}}_i$ (direita).

A componente T_{ij} do tensor $\mathbf{T}$ é obtida por $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$, cuja prova é feita a seguir.

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot T_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = T_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = T_{kj}\,\delta_{ik} = T_{ij}$$

Um tensor pode ser representado por meio de uma matriz 3×3 cujos coeficientes são as componentes do tensor na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Observe que os coeficientes da *primeira coluna* são as componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, os da*segunda* as componentes de $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ e os da *terceira* as componentes de $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

1.3.3. Componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Como definido, um tensor associa o vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ ao vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Convém agora examinar as componentes de $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ supondo conhecidas as componentes de $\mathbf{T}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ nessa mesma base.

$$\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}(v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = v_j\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = v_j\,T_{ij}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = T_{ij}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

De onde se conclui que as componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ são iguais a $T_{ij}\,v_j$.

Matricialmente as componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são dadas pelo produto matricial [T] {v}:

$$\{\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

1.3.4. Soma de tensores. O resultado da soma de dois tensores, **T** e **S**, é por definição o tensor $\mathbf{W} = \mathbf{T} + \mathbf{S}$ que verifica $\mathbf{W}\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{T} + \mathbf{S})\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{S}\vec{\mathbf{v}}$, para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são $W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$, como se monstra a seguir.

$$W_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{W}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{S})\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot (\mathbf{T}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} + \mathbf{S}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} + \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{S}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = T_{ij} + S_{ij}$$

Matricialmente a soma de dois tensores, **T** e **S**, é dada pela soma das matrizes de tensores, ou seja, [T] + [S].

1.3.4.1. *Propriedades da soma.*

1.3.4.1.1. Propriedade comutativa. A soma entre tensores é comutativa:

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$$

1.3.4.1.2. Propriedade associativa. A soma entre tensores é associativa:

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S}) + \mathbf{T} = \mathbf{R} + (\mathbf{S} + \mathbf{T})$$

1.3.5. Produto de tensores. O resultado do produto de dois tensores, **T** e **S**, é por definição o tensor $\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{S}$ que verifica $\mathbf{W}\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{T}\mathbf{S})\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}(\mathbf{S}\vec{\mathbf{v}})$, para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são $W_{ij} = (TS)_{ij} = T_{ik}\,S_{kj}$, como se monstra a seguir.

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{W}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}\mathbf{S}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{S}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}(S_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}) = S_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = S_{kj}\,T_{ik} = T_{ik}\,S_{kj}$$

Matricialmente o produto de dois tensores é dado pelo produto matricial [T] [S].

1.3.5.1. *Propriedades do produto.*

1.3.5.1.1. Propriedade associativa. O produto de tensores é associativo:

$$(\mathbf{R}\mathbf{S})\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{T})$$

1.3.5.1.2. Propriedade distributiva. O produto de tensores é distributivo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{R}\mathbf{S} + \mathbf{R}\mathbf{T}$$

O produto de tensores *não* é comutativo, ou seja, *em geral*:

$$\mathbf{T}\mathbf{S} \neq \mathbf{S}\mathbf{T}$$

1.3.6. O tensor identidade. O tensor identidade é aquele que para todo e qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$ o próprio vetor $\vec{\mathbf{v}}$, ou seja, $\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são facilmente obtidas tendo em conta que as colunas da matriz de componentes são as componentes do vetor $\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$. Portanto, a matriz de componentes do tensor identidade na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ é a matriz identidade:

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma propriedade facilmente demonstrável é:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}$$

para qualquer tensor **T**.

1.3.7. O tensor inverso. O tensor inverso de um tensor **T**, $\mathbf{T}^{-1}$, é por definição aquele que verifica $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{I}$, ou, matricialmente, $[\mathrm{T}]\,[\mathrm{T}^{-1}] = [\mathrm{T}^{-1}]\,[\mathrm{T}] = [\mathrm{I}]$.

Observe que se $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$, então $\mathbf{T^{-1}}\,\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T^{-1}}\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$, ou seja, o tensor $\mathbf{T^{-1}}$ leva o vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ ao próprio vetor $\vec{\mathbf{v}}$.

As componentes do tensor $\mathbf{T^{-1}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são os coeficientes da matriz inversa de $\mathbf{T}$, isto é, $[\mathrm{T}^{-1}] = [\mathrm{T}]^{-1}$.

1.3.8. O tensor transposto. O tensor transposto de um tensor $\mathbf{T}$ qualquer é $\mathbf{T^T}$ que, por definição, verifica $\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T^T}\,\vec{\mathbf{u}}$, para quaisquer vetores $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$.

Se as componentes de $\mathbf{T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são T_{ij}, então as de $\mathbf{T^T}$ são T_{ji}, como se demonstra a seguir. Como visto, as componentes de $\mathbf{T^T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são dadas pelo produto escalar $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T^T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$, que pela definição de tensor transposto é igual a $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = T_{ji}$.

Matricialmente, a matriz do tensor transposto é a matriz transposta do tensor, ou seja:

$$[\mathrm{T^T}] = [\mathrm{T}]^T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

1.3.9. Os tensores simétrico e antissimétrico. Todo e qualquer tensor $\mathbf{T}$ pode ser decomposto num tensor simétrico, $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T^T})$, e num antissimétrico, $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T^T})$, e esta decomposição é *única*:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T^T}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T^T}) = \mathbf{S} + \mathbf{A}$$

Suas componentes são:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$
$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Portanto, num tensor simétrico tem-se $S_{ij} = S_{ji}$ e num antissimétrico $A_{ij} = -A_{ji}$ e, consequentemente, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$.

A matriz do tensor simétrico de $\mathbf{T}$ é, portanto:

$$\begin{aligned}[\mathrm{S}] &= \frac{1}{2}([\mathrm{T}] + [\mathrm{T}]^T) \\ &= \begin{bmatrix} T_{11} & \frac{1}{2}(T_{12} + T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13} + T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21} + T_{12}) & T_{22} & \frac{1}{2}(T_{23} + T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31} + T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32} + T_{23}) & T_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e a do tensor antissimétrico:

$$\begin{aligned}[\mathrm{A}] &= \frac{1}{2}([\mathrm{T}] - [\mathrm{T}]^T) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{12} - T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13} - T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21} - T_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{23} - T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31} - T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32} - T_{23}) & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.3.10. O vetor dual de um tensor antissimétrico. O vetor dual, $\vec{\mathbf{a}}$, de um tensor antissimétrico $\mathbf{A}$ é aquele que verifica $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{v}}$ para todo vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes podem ser obtidas a partir da própria definição:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}) = a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k})\\ &= \varepsilon_{lkm}\,a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{m} = \varepsilon_{lkm}\,a_l\,\delta_{jm} = \varepsilon_{lkj}\,a_l = -\varepsilon_{jkl}\,a_l\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por ε_{jki} obtém-se:

$$\varepsilon_{jki}A_{jk} = -\varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{jkl}\,a_l = -\varepsilon_{ikj}\,\varepsilon_{lkj}\,a_l = -2\,\delta_{il}\,a_l = -2a_i$$

Permutando nesta última equação os índices do símbolo de permutação obtém-se, finalmente:

$$a_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$$

ou seja, as componentes do vetor dual do tensor antissimétrico $\mathbf{A}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Pode-se observar a partir da definição do vetor dual que o tensor antissimétrico $\mathbf{A}$ leva qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$ a um outro vetor, $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$, ortogonal a seu vetor dual $\vec{\mathbf{a}}$.

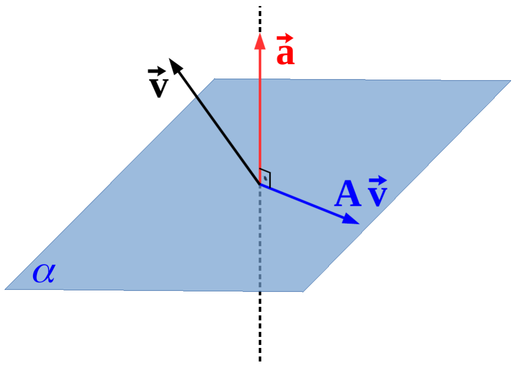


FIGURA 1.7. Vetor dual $\vec{\mathbf{a}}$ do tensor antissimétrico $\mathbf{A}$. Plano α ortogonal ao vetor dual. Para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$, $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$ é paralelo ao plano α.

1.3.11. O produto diádico de dois vetores. O produto diádico de dois vetores, $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, é um tensor $\mathbf{ab}$ que verifica para qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ a identidade $\mathbf{ab}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$. Pela definição o tensor $\mathbf{ab}$ associa a qualquer vetor um outro vetor na direção do vetor $\vec{\mathbf{a}}$. Suas componentes são $ab_{ij} = a_i\,b_j$, como se deduz a seguir:

$$ab_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{ab}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot a_k\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}\,b_j = a_k\,b_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = a_k\,b_j\,\delta_{kj} = a_i\,b_j$$

Matricialmente:

$$[\mathrm{ab}] = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{Bmatrix}$$

Um caso importante é o do produto diádico entre os elementos da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$[\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots [\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este resultado permite uma maneira alternativa de representar o tensor $\mathbf{T}$ como $T_{ij}\,\mathbf{e}_\mathbf{i}\mathbf{e}_\mathbf{j}$.

1.3.12. O traço de um tensor. O traço de um tensor produto diádico **ab** é por definição o produto escalar dos vetores $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, ou seja, $\mathrm{tr}\,\mathbf{ab} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$. Como qualquer tensor pode ser representado em termos dos produtos diádicos dos elementos da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, o traço de um tensor $\mathbf{T}$ qualquer é $\mathrm{tr}\,\mathbf{T} = T_{ii}$, como se deduz a seguir:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{T} = \mathrm{tr}\,(T_{ij}\,\mathbf{e_i e_j}) = T_{ij}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e_i e_j} = T_{ij}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = T_{ij}\,\delta_{ij} = T_{ii}$$

O traço, portanto, é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz do tensor.

1.3.13. O tensor ortogonal Q. Um tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ é aquele que por definição mantém invariantes o comprimento e o ângulo entre dois vetores quaisquer, ou seja, dados dois vetores quaisquer, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, o tensor $\mathbf{Q}$ faz com que:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{u}}$$

Na equação acima, pode-se escrever que:

$$\mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{Q^T}\,\mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \delta_{ij}$$

De onde se pode concluir que

$$\mathbf{Q^T}\,\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q^T} = \mathbf{I}$$

Na rotação de um corpo rígido, o comprimento e o ângulo entre dois segmentos materiais quaisquer permanecem sempre o mesmo, são invariantes, de onde se conclui que o tensor que realiza a rotação é um caso particular de tensor ortogonal. Num corpo rígido em rotação em torno de um eixo, todo segmento material paralelo a esse eixo mantém-se paralelo ao eixo de rotação. Assim, todo tensor de rotação $\mathbf{R}$ tem uma direção para a qual qualquer vetor orientado segundo ela não sofre alteração de direção e módulo com a rotação. Seja $\vec{\mathbf{e}}$ um vetor na direção do eixo de rotação. Logo:

$$\mathbf{R}\,\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}$$
$$\mathbf{R^T}\,\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}$$

Subtraindo acima a segunda equação da primeira obtém-se $(\mathbf{R} - \mathbf{R^T})\,\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{0}}$. Como $\mathbf{R} - \mathbf{R^T}$ é antissimétrico, tem-se para qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ que $(\mathbf{R} - \mathbf{R^T})\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{v}}$, onde $\vec{\mathbf{a}}$ é o vetor dual de $\mathbf{R} - \mathbf{R^T}$. Portanto, $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{0}}$, ou seja, o vetor na direção do eixo de rotação do tensor de rotação $\mathbf{R}$ é o vetor dual do seu tensor antissimétrico $\mathbf{R} - \mathbf{R^T}$.

1.3.14. Transformação de coordenadas entre dois sistemas cartesianos ortogonais. Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ e $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$. As duas bases se relacionam por meio de um tensor de rotação $\mathbf{Q}$, pois elas preservam comprimentos e ângulos, de modo que $\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i} = \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = Q_{ji}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$.

O significado geométrico das componentes do tensor $\mathbf{Q}$, Q_{ij}, fica evidente a partir do seguinte desenvolvimento: $Q_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j} = \cos(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}, \vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j})$. Portanto, o coeficiente Q_{ij} é o cosseno diretor entre o elementos $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ e $\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j}$. Além disso, $\mathbf{Q}\,\mathbf{Q^T} = \mathbf{Q^T}\,\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, por se tratar de um tensor de rotação.

Os coeficientes do tensor $\mathbf{Q}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ formam a *matriz de transformação* [Q] da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ para a $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$, nessa ordem:

$$[\mathrm{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Convém observar que a transformação inversa, da base $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$ para a $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, é dada pela transposta de [Q], $[\mathrm{Q}]^T$, pois:

$$\mathbf{Q^T}\,\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i} = \mathbf{Q^T}\,\mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

Exemplo 1.1. Obtenha a matriz de transformação entre as bases $\{\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}\}$ e $\{\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{i}}\}$, que é obtida

1.3.13. Transformação de coordenadas entre dois sistemas cartesianos ortogonais

Sejam $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{e}'_i\}$ duas bases ortonormais. Vejamos primeiramente como representar os elementos da segunda na primeira. Por se tratarem de duas bases ortonormais, chega-se à segunda a partir de uma rotação conveniente da primeira. Logo, pode-se obter os elementos de $\{\vec{e}'_i\}$ por meio de um tensor rotação Q aplicado a cada elemento de $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{e}'_i = Q\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{e}_j$$

Os coeficientes Q_{ij} são os cossenos diretores entre os elementos $\vec{e}_i$ e $\vec{e}'_j$, pois $Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot Q\vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j)$. Além disso, $QQ^T = Q^TQ = I$, por se tratar de um tensor de rotação.

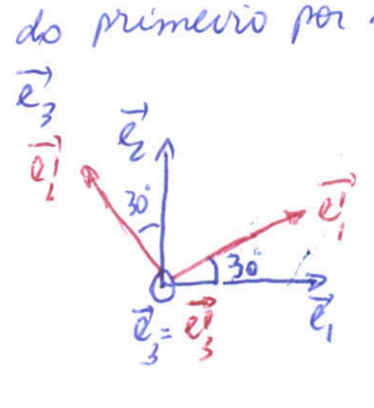
A matriz de transformação $[Q]$ da base $\{\vec{e}_i\}$ para a base $\{\vec{e}'_i\}$ é formada pelos coeficientes do tensor Q:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

A transformação inversa, da base $\{\vec{e}'_i\}$ para a base $\{\vec{e}_i\}$ é dada pela matriz transposta de $[Q]$, $[Q]^T$, pois:

$$\vec{e}_i = I\vec{e}_i = Q^TQ\,\vec{e}_i = Q^T\vec{e}'_i$$

Exemplo: Obtenha a matriz de transformação entre $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{e}'_i\}$, que é obtido a partir do primeiro por meio de uma rotação de 30° em torno do eixo $\vec{e}_3$



Solução:

$$Q_{11} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1{}') = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{12} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2{}') = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$Q_{13} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3{}') = \cos 90^\circ = 0$$

$$Q_{21} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1{}') = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$Q_{22} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2{}') = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{23} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3{}') = \cos 90^\circ = 0$$

$$Q_{31} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1{}') = \cos 90^\circ = 0$$

$$Q_{32} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2{}') = \cos 90^\circ = 0$$

$$Q_{33} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3{}') = \cos 0^\circ = 0$$

Portanto:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.14. Transformação das componentes de um vetor de uma base para outra

Seja $\vec{v}$ um vetor. Na base $\{e_i\}$ ele tem componentes:

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

e na base $\{e_i'\}$:

$$v_i' = \vec{v} \cdot \vec{e}_i{}' = \vec{v} \cdot Q_{mi} \vec{e}_m = Q_{mi} \, \vec{v} \cdot \vec{e}_m$$

ou

$$v_i' = Q_{mi} v_m$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

ou, simplesmente:

$$\{v\}' = [Q]^T\{v\}$$

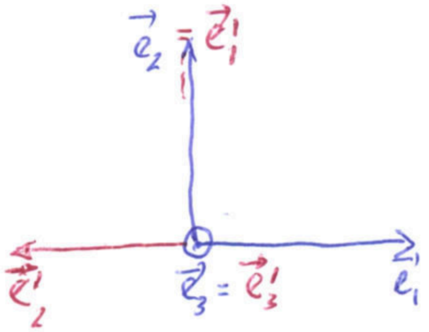
Pré-multiplicando esta última equação por $[Q]$ tem-se

$$[Q][Q]^T\{v\} = [Q]\{v\}'$$

ou

$$\{v\} = [Q]\{v\}'$$

<u>Exemplo</u>. O vetor $\vec{v}$ é dado na base $\{\vec{e}_i\}$ como $\vec{v} = 2\vec{e}_1$. Represente $\vec{v}$ na base $\{\vec{e}_i'\}$ que é obtida a partir de uma rotação de $\{\vec{e}_i\}$ em torno do eixo $\vec{e}_3$ de 90° no sentido anti-horário, cuja matriz de transformação é:



$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Solução</u>:

$$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.15. <u>Transformação das componentes de um tensor de uma base para outra</u>

Seja T um tensor. Na base $\{\vec{e}_i\}$ ele tem componentes:

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot T\vec{e}_j$$

e na base $\{\vec{e}_i'\}$:

$$T_{ij}' = \vec{e}_i' \cdot T\vec{e}_j' = Q_{mi}\vec{e}_m \cdot T(Q_{nj}\vec{e}_n)$$

$$= Q_{mi}Q_{nj}\,\vec{e}_m \cdot T\vec{e}_n$$

$$T_{ij}' = Q_{mi}Q_{nj}\,T_{mn}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

ou simplesmente:

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q]$$

Pré-multiplicando por $[Q]$ e pós-multiplicando por $[Q]^T$ a equação acima obtém-se:

$$[Q][Q]^T[T][Q][Q]^T = [Q][T]'[Q]^T$$

$$\text{ou} \qquad [T] = [Q][T]'[Q]^T$$

Exemplo Dado o tensor T na base $\{e_i\}$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Represente T na base $\{\vec{e}'_i\}$ que é obtida a partir de uma rotação de $\{\vec{e}_i\}$ em torno do eixo $\vec{e}_3$ de 90° no sentido anti-horário

Solução

$$[T]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Mostre que o traço de um tensor é invariante.

Solução:

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$$

Fazendo a contração de i com j:

$$tr\,T = T'_{ii} = Q_{mi} Q_{ni} T_{mn} = Q_{ni} Q^T_{im} T_{mn} = \delta_{nm} T_{mn} = T_{nn}$$

$$\therefore \quad tr\,T = T'_{ii} = T_{ii}$$

1.3.16 Generalização de Tensor

Tensor, no sentido generalizado, é um ente matemático cujas componentes observam determinadas regras de transformação de coordenadas:

Tensor de ordem zero (ou escalar): $v' = v$

Tensor de primeira ordem (ou vetor): $v'_i = Q_{mi} v_m$

Tensor de segunda ordem (ou tensor): $T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$

Tensor de terceira ordem: $T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr}$

Tensor de quarta ordem: $T'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} T_{mnrs}$

$\vdots$

Um tensor de ordem n associa a cada elemento da base $\{\vec{e}_i\}$ um tensor de ordem $n-1$.

<u>Exemplo</u>. Obtenha as componentes do tensor de 3ª ordem T na base $\{\vec{e}_i\}$ e a sua regra de transformação de coordenadas.

<u>Solução</u>: Seja T_i o tensor de 2ª ordem associado a $\vec{e}_i$:

$$T_i = T\vec{e}_i$$

$$T_i \vec{e}_k = T_{imk} \vec{e}_m$$

$$\vec{e}_j \cdot (T_i \vec{e}_k) = \vec{e}_j \cdot (T_{imk} \vec{e}_m) = T_{imk} \delta_{jm} = T_{ijk}$$

Portanto:

$$T_{ijk} = \vec{e}_j \cdot ((T\vec{e}_i)\vec{e}_k)$$

$$\begin{aligned} T'_{ijk} &= \vec{e}'_j \cdot ((T\vec{e}'_i)\vec{e}'_k) \\ &= Q\vec{e}_j \cdot ((TQ\vec{e}_i) Q\vec{e}_k) \\ &= Q_{nj}\vec{e}_n \cdot ((T Q_{mi}\vec{e}_m) Q_{rk}\vec{e}_r) \\ &= Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk}\, \vec{e}_n \cdot ((T\vec{e}_m)\vec{e}_r) \end{aligned}$$

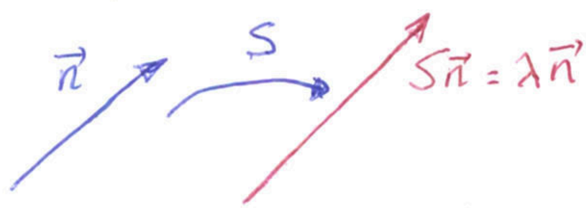
$$\therefore \quad T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr}$$

1.3.17. Auto-valores e auto-vetores de um tensor simétrico

Seja S um tensor simétrico. Podemos indagar sobre a existência de um escalar λ e um vetor $\vec{n}$ que verifiquem:

$$S\vec{n} = \lambda\vec{n}$$

ou seja, um vetor $\vec{n}$ que S leve a um vetor paralelo a $\vec{n}$.



Observe que, se $\vec{n}$ e λ verificam a equação acima, qualquer múltiplo de $\vec{n}$ (ou qualquer vetor paralelo a $\vec{n}$) também verifica:

$$S(\alpha\vec{n}) = \alpha S\vec{n} = \lambda(\alpha\vec{n})$$

O escalar e o vetor que satisfazem a equação acima denominam-se <u>auto-valor</u> e <u>auto-vetor</u> do tensor S.

Seja $\vec{n}$ um auto-vetor unitário, ou seja, $\|\vec{n}\| = 1$, então

$$S\vec{n} = \lambda\vec{n} = \lambda I\vec{n}$$

ou $$(S - \lambda I)\vec{n} = \vec{0}$$

$$(S-\lambda I)n_j\vec{e}_j = (S_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j\vec{e}_i = \vec{0}$$

Portanto,

$$(S_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$$

ou, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que este sistema não tenha uma única solução trivial ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$), o determinante da matriz $[S - \lambda I]$ deve ser nulo:

$$|S - \lambda I| = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

onde:

$$I_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{ii} = tr\, S$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{ii} S_{jj} - S_{ij} S_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left[(tr\, S)^2 - tr(S^2)\right]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}$$

A equação do 3º grau acima é chamada <u>equação característica do tensor S</u>. Suas raízes λ_1, λ_2 e λ_3 são <u>números reais</u> e são os auto-valores de S. I_1, I_2 e I_3 são chamados de <u>escalares invariantes</u> do tensor S.

Resolvendo a equação característica:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$$

ou $$\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

De onde se conclui que os escalares invariantes de S são dados também por:

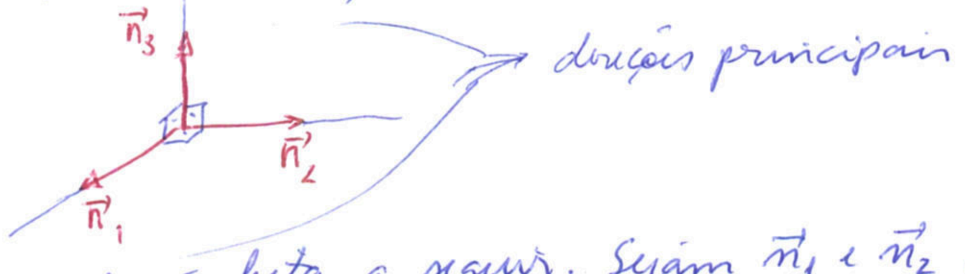
$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$$

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Direções principais de um tensor simétrico

Um tensor simétrico real tem sempre três auto-vetores mutuamente ortogonais. Tais auto-vetores definem três direções ortogonais chamadas direções principais.



A prova disto é feita a seguir. Sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ dois auto-vetores de um tensor simétrico S e λ_1 e λ_2 os seus respectivos auto-valores. Logo:

$$S\vec{n}_1=\lambda_1\vec{n}_1$$

e $$S\vec{n}_2=\lambda_2\vec{n}_2$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{n}_2$ a primeira equação acima e por $\vec{n}_1$ a segunda:

$$\vec{n}_2 \cdot S\vec{n}_1 = \vec{n}_1 \cdot S^T\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot S\vec{n}_2 = \lambda_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 \cdot S\vec{n}_2 = \vec{n}_2 \cdot S^T\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot S\vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

Logo, subtraindo a segunda equação acima da primeira:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

• Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

ou seja, os auto-vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais. Se $\lambda_3 \neq \lambda_1$ e $\lambda_3 \neq \lambda_2$, então $\vec{n}_3$, auto-vetor de λ_3, é ortogonal a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

• Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$. Sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ dois auto-vetores correspondentes a λ. Logo, $S\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_1$ e $S\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$. Além disso, qualquer combinação linear de ambos, $\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$ (α e β são quaisquer número real), também é auto-vetor de λ, pois:

$$S(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2) = \alpha S\vec{n}_1 + \beta S\vec{n}_2 = \alpha\lambda\vec{n}_1 + \beta\lambda\vec{n}_2 = \lambda(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2)$$

ou seja: $S(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2) = \lambda(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2)$

Como $\vec{n}_3$ correspondente ao auto-valor λ_3 é ortogonal a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, ele é ortogonal ao plano formado por $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Escolhidos quaisquer dois to-vetores de λ ortogonais entre si pode-se ter $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ mutuamente ortogonais, ou três direções principais mutuamente ortogonais.

• Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, então qualquer vetor é auto-vetor de S. Assim quaisquer três auto-vetores ortogonais definem três direções principais mutuamente ortogonais

Exemplo Determine os auto-valores e auto-vetores do tensor simétrico

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-25) = 0$$

As raízes são os auto-valores:

$$\lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = 5 \quad e \quad \lambda_3 = -5$$

• Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2 & 4 \\ 0 & 4 & -3-2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0\, n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} + 4 n_3^{(1)} = 0 \\ 4 n_2^{(1)} - 5 n_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} = 1$

Logo: $\quad n_2^{(1)} = n_3^{(1)} = 0 \quad e \quad n_1^{(1)} = \pm 1$

Portanto: $\quad \boxed{\vec{n}_1 = \pm \vec{e}_1}$

• Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_2 = 5}$:

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 3-5 & 4 \\ 0 & 4 & -3-5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3 n_1^{(2)} = 0 \\ -2 n_2^{(2)} + 4 n_3^{(2)} = 0 \\ 4 n_2^{(2)} - 8 n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(2)2} + n_2^{(2)2} + n_3^{(2)2} = 1$

Logo: $\quad n_1^{(2)} = 0 \quad e \quad n_2^{(2)} = 2 n_3^{(2)}$

Portanto: $\quad \vec{n}_2 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

• Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_3 = -5}$

$$\begin{bmatrix} 2+5 & 0 & 0 \\ 0 & 3+5 & 4 \\ 0 & 4 & -3+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(3)} \\ n_2^{(3)} \\ n_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 7 n_1^{(3)} = 0 \\ 8 n_2^{(3)} + 4 n_3^{(3)} = 0 \\ 4 n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(3)2} + n_2^{(3)2} + n_3^{(3)2} = 1$

Logo: $n_1^{(3)} = 0$ e $n_3^{(3)} = -2 n_1^{(3)}$

Portanto: $\boxed{\vec{n}_3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)}$

Exemplo: Determine as direções principais do tensor simétrico:

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

As raízes são os auto-valores:

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

- Auto-vetor correspondente a $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = 0 \\ 0\, n_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

e $(n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_3^{(1)})^2 = 1$

Logo $n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0$ e $n_3^{(1)} = \pm 1$

Portanto: $\boxed{\vec{n}_1 = \pm \vec{e}_3}$

- Auto-vetores correspondentes a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0\, n_1^{(2)} = 0 \\ 0\, n_2^{(2)} = 0 \\ n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

e $(n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_3^{(2)})^2 = 1$

Logo $n_1^{(2)}$ e $n_2^{(2)}$ são quaisquer e $n_3^{(2)} = 0$

Portanto: $\vec{n}_2 = \alpha \vec{e}_1 + \sqrt{1-\alpha^2}\, \vec{e}_2 \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq +1$

Observe que $\vec{n}_2$ pode ser qualquer vetor ortogonal a $\vec{n}_1$.

<u>A representação de um tensor num sistema coincidente com as as suas direções principais</u>

Como visto, qualquer tensor simétrico possui três direções principais mutuamente ortogonais coincidentes com as direções dos auto-vetores. Sejam $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ vetores unitários segundo as direções principais. Logo $\{\vec{n}_i\}$ forma uma base ortonormal definida positiva. As componentes do tensor simétrico S nessa base são:

$$S_{ij} = \vec{n}_i \cdot S\vec{n}_j = \vec{n}_i \cdot \underbrace{(\lambda_j \vec{n}_j)}_{\text{sem notação indicial}} = \underbrace{\lambda_j\, \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}_{\text{sem notação indicial}}$$

ou seja:

$$S_{ij} = \delta_{ij}\lambda_j$$

$$[S]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que as componentes da diagonal da matriz de um tensor simétrico real está compreendida no intervalo entre o mínimo e máximo auto-valores:

$$\lambda_3 \le \left\{ \begin{matrix} T'_{11} \\ \text{ou} \\ T'_{22} \\ \text{ou} \\ T'_{33} \end{matrix} \right\} \le \lambda_1$$

desde que se tome $\lambda_3 \le \lambda_2 \le \lambda_1$.

Este último resultado é importante para quando trabalharmos com os tensores de tensão e de deformação, pois as tensões e deformações normais nunca poderão exceder esses limites.

<u>Exemplo</u> Encontre uma base ortonormal definida positiva que corresponda às direções principais do tensor simétrico

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>Solução</u>:

Primeiramente vamos reordenar os auto-valores pela ordem decrescente:

$$\lambda_1 = 5 \quad : \quad \vec{n}_1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$
$$\lambda_2 = 2 \qquad \vec{n}_2 = \pm \vec{e}_1$$
$$\lambda_3 = -5 \qquad \vec{n}_3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$$

Para que a base orientada segundo as direções principais de S seja definida positiva, é necessário que:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{n}_3$$
$$\vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \vec{n}_1$$
$$\vec{n}_3 \times \vec{n}_1 = \vec{n}_2$$

Escolhendo $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ e $\vec{n}_2 = \vec{e}_1$ tem-se:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \times \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = \vec{n}_3$$

Portanto, forma-se uma base orientada segundo as direções principais de S definida positiva com

$$\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2e_2 + \vec{e}_3)$$

$\vec{n}_2 = \vec{e}_1$

$\vec{n}_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$