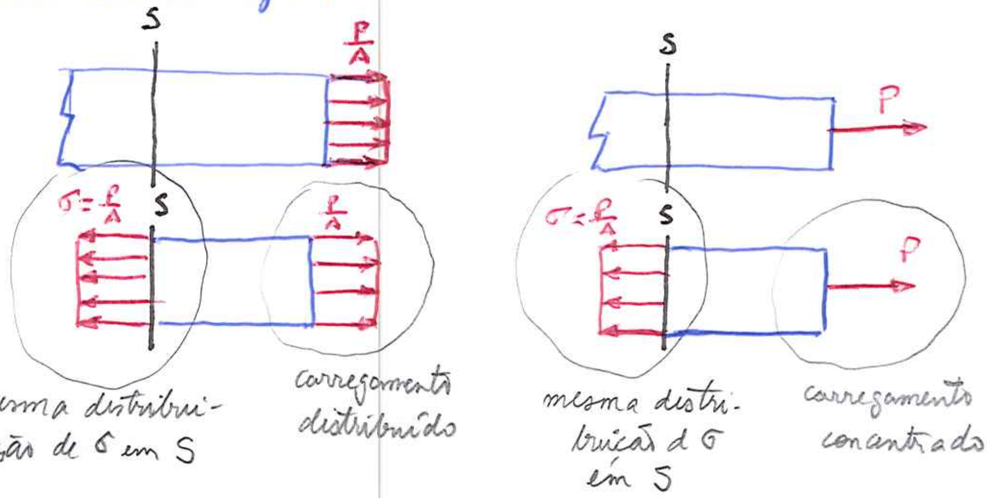
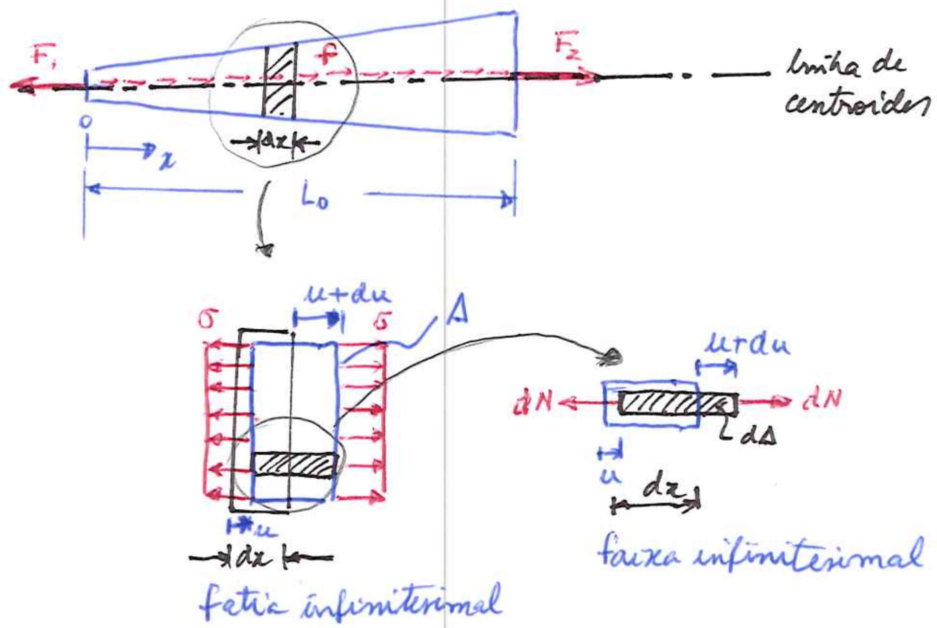
4.1. PRINCÍPIO DE SAINT-VENANT

A tensão e a deformação produzidas em pontos de um corpo suficientemente distantes da região de aplicação da carga serão iguais à tensão e à deformação produzidas por quaisquer carregamentos mecanicamente equivalentes aplicados ao corpo dentro da mesma região.



4.2. DEFORMAÇÃO DE BARRA AXIALMENTE CARREGADA



Analisando a faixa infinitesimal:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Tanto a distribuição de σ_x como a de ε_x na seção transversal são uniformes. Portanto:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Da lei de Hooke:

$$\frac{N}{A} = E\frac{du}{dx}$$

ou

$$du = \frac{N}{EA}dx$$

que é o deslocamento relativo entre as duas faces da fatia (alongamento ou encurtamento da fatia da direção x).

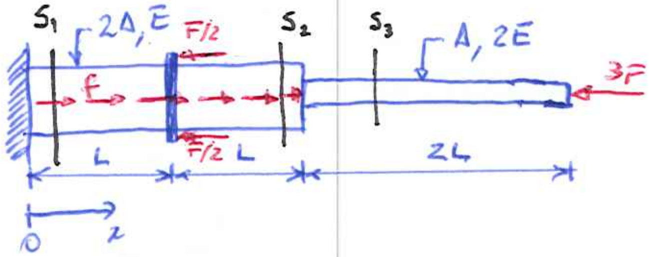
Para obter o deslocamento relativo entre as duas extremidades da barra, basta integrar du ao longo da mesma:

$$\Delta u = \int_0^{L_0} \frac{N}{EA}dx$$

Caso em que a força axial distribuída é nula e a seção transversal é ~~são~~ uniformes num trecho de comprimento L_0.

$$\Delta u = \frac{NL_0}{EA}$$

Exemplo 4.1: Determine o deslocamento axial da extremidade livre da barra axialmente carregada abaixo.



São dados

$E = 200$ GPa $\quad F = 10$ kN

$A = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^2 $\quad f = 5$ kN/m

$L = 1$ m

Solução:

Forças normais trecho-a-trecho:

$$N_1 = f(2L - x) - 4F$$

$$N_2 = f(2L - x) - 3F$$

$$N_3 = -3F$$

Deslocamento da extremidade livre:

$$u = \Delta u = \int_0^{4L} \frac{N}{EA}dx = \int_0^{L} \frac{N_1}{E_1A_1}dx + \int_L^{2L} \frac{N_2}{E_2A_2}dx + \int_{2L}^{4L} \frac{N_3}{E_3A_3}dx$$

$$= \int_0^L \frac{f(2L-x)-4F}{2EA}\,dx + \int_L^{2L} \frac{f(2L-x)-3F}{2EA}\,dx + \int_{2L}^{4L} \frac{-3F}{2EA}\,dx$$

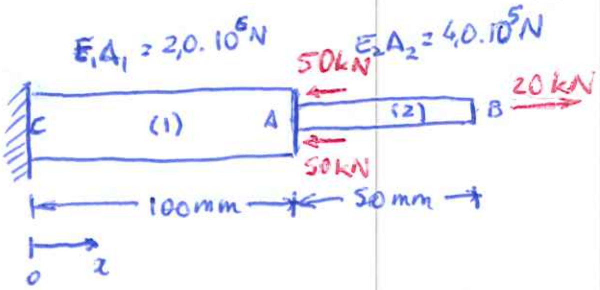
$$= \int_0^{2L} \frac{f(2L-x)}{2EA}\,dx - \int_0^{L} \frac{2F}{EA}\,dx - \int_L^{4L} \frac{3F}{2EA}\,dx = \frac{fL^2}{EA} - \frac{13}{2}\frac{FL}{EA}$$

Substituindo os valores:

$$u = \frac{5\cdot 10^3 \cdot 1^2}{200\cdot 10^9 \cdot 1{,}0\cdot 10^{-4}} - \frac{13}{2}\cdot\frac{10\cdot 10^3\cdot 1}{200\cdot 10^9\cdot 1{,}0\cdot 10^{-4}}$$

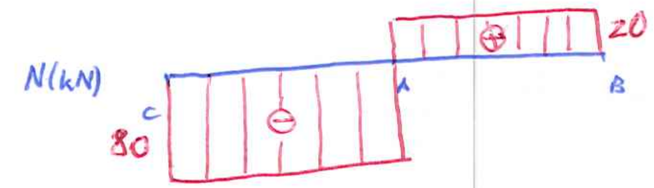
$$u = -3{,}0\cdot 10^{-3}\,m \quad \text{ou} \quad -3{,}0\,mm \;\blacksquare$$

<u>Exemplo 4.2</u> Determine os deslocamentos nos pontos A e B da barra axialmente carregada abaixo.



<u>Solução</u>

Diagrama de força normal:



Deslocamento de A:

$$u_A = \Delta u_1 = \int_0^{L_1} \frac{N}{EA}\,dx = \frac{N_1L_1}{E_1A_1} = \frac{-80\cdot 10^3\cdot 0{,}100}{2{,}0\cdot 10^6} = -0{,}004\,m \text{ ou } -4\,mm$$

Deslocamento de B:

$$u_B = \Delta u_1 + \Delta u_2 = \Delta u_1 + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{N}{EA}\,dx = \Delta u_1 + \frac{N_2L_2}{E_2A_2} =$$

$$= -0{,}004 + \frac{20\cdot 10^3\cdot 0{,}050}{4{,}0\cdot 10^5} = -0{,}0015\,m \text{ ou } -1{,}5\,mm$$

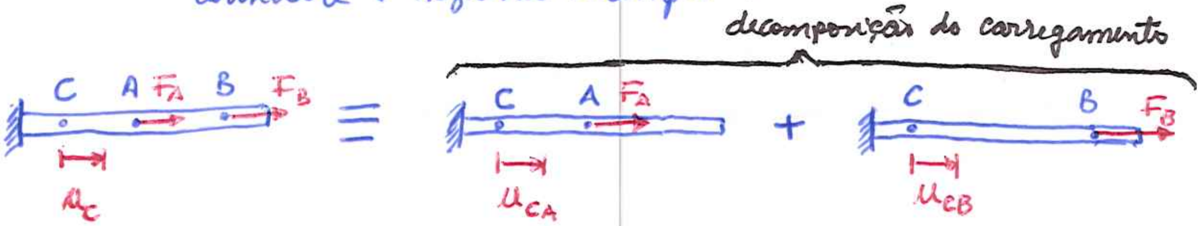
Resposta:

$u_A = -4\,mm$ (desloca-se para a esquerda)

$u_B = -1{,}5\,mm$ (desloca-se para a esquerda) $\blacksquare$

4.3. O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Considere o seguinte exemplo:



u_C - deslocamento axial de C causado por F_A e F_B

u_{CA} - deslocamento axial de C causado por F_A

u_{CB} - deslocamento axial de C causado por F_B

O princípio da superposição permite escrever:

$$u_C = u_{CA} + u_{CB}$$

Condições de validade do princípio da superposição:

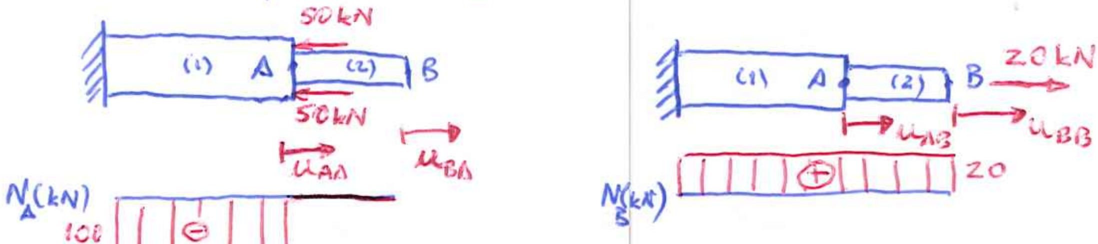
1. Deve haver uma relação linear entre força e deslocamento no sólido.

2. O carregamento do sólido não afeta ou afeta minimamente a sua configuração geométrica.

Exemplo 4.3. Repita o Exemplo 4.2 utilizando o princípio da superposição.

Solução:

Decomposição do carregamento:



$$u_{AA} = \Delta u_{1A} = \frac{N_{1A} L_1}{E_1 A_1} = \frac{-100 \cdot 10^3 \cdot 0{,}100}{2{,}0 \cdot 10^6}$$

$$u_{AA} = -0{,}005 \text{ m}$$

$$u_{BA} = \Delta u_{1A} + \Delta u_{2A} = \Delta u_{1A} + \frac{N_{2A} L_2}{E_2 A_2} = -0{,}005 + \frac{0 \cdot 0{,}050}{4{,}0 \cdot 10^5}$$

$$u_{BA} = -0{,}005 \text{ m}$$

$$u_{AB} = \Delta u_{1B} = \frac{N_{1B} \cdot L_1}{E_1 A_1} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,100}{2,0 \cdot 10^6}$$

$$u_{AB} = +0,001\ m$$

$$u_{BB} = \Delta u_{1B} + \Delta u_{2B} = \Delta u_{1B} + \frac{N_{2B} L_2}{E_2 A_2} = 0,001 + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,050}{4,0 \cdot 10^5}$$

$$u_{BB} = +0,0035\ m$$

Aplicando o princípio da superposição:

$$u_A = u_{AA} + u_{AB} = -0,005 + 0,001$$

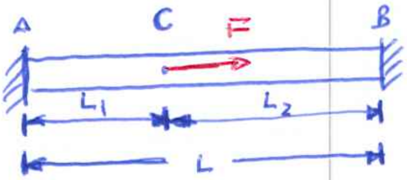
$$u_A = -0,004\ m \quad \text{ou} \quad -4\ mm$$

$$u_B = u_{BA} + u_{BB} = -0,005 + 0,0035$$

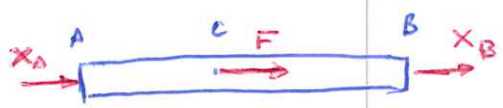
$$u_B = -0,0015\ m \quad \text{ou} \quad -1,5\ mm \ \blacksquare$$

4.4 BARRA AXIALMENTE CARREGADA E ESTATICAMENTE INDETERMINADA

Considere o seguinte exemplo, no qual deseja-se determinar as reações:



O diagrama de corpo livre da barra é:



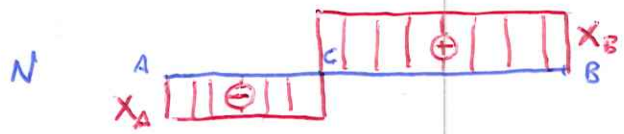
Equação de equilíbrio de forças:

$$X_A + X_B = -F \qquad (1)$$

que é a única equação disponível, considerando o equilíbrio da barra. Como são duas forças incógnitas, há necessidade de mais uma equação. Esta outra equação é obtida observando que o deslocamento relativo entre A e B é nulo, porque A e B são apoios. Esta equação será denominada de equação de compatibilidade:

$$u_{A/B} = 0$$

Para determinar $u_{A/B}$, obtém-se primeiro o diagrama de força normal da barra:



$$u_{A/B} = \Delta u_1 + \Delta u_2 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2}$$

Como $N_1 = -X_A$ e $N_2 = X_B$ e $E_1 A_1 = E_2 A_2 = EA$, neste caso:

$$u_{A/B} = \frac{-X_A L_1}{EA} + \frac{X_B L_2}{EA} = 0$$

ou

$$X_B = \frac{L_1}{L_2} X_A \quad (2)$$

Levando a equação (2) na (1):

$$X_A + \frac{L_1}{L_2} X_A = -F$$

e

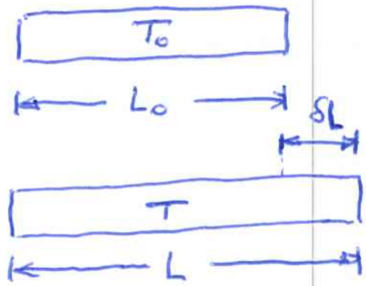
$$X_A = -\frac{L_1}{L} F$$

$$X_B = \frac{-L_2}{L} F$$

Ficam, portanto, determinadas as reações ∎

4.5 TENSÃO TÉRMICA

Os materiais sólidos também se deformam pela ação da variação térmica. Numa barra estaticamente carregada isto leva a desenvolver tensões térmicas.



$$\delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

onde :

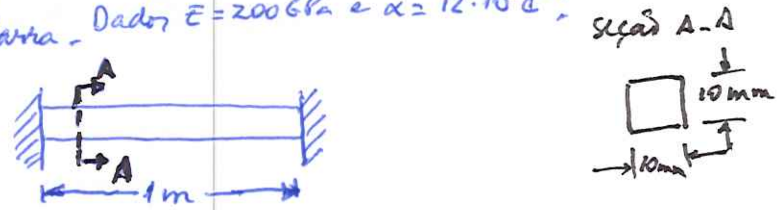
L_0 é o comprimento à temperatura T_0

L é o comprimento à temperatura T

$\Delta T = T - T_0$

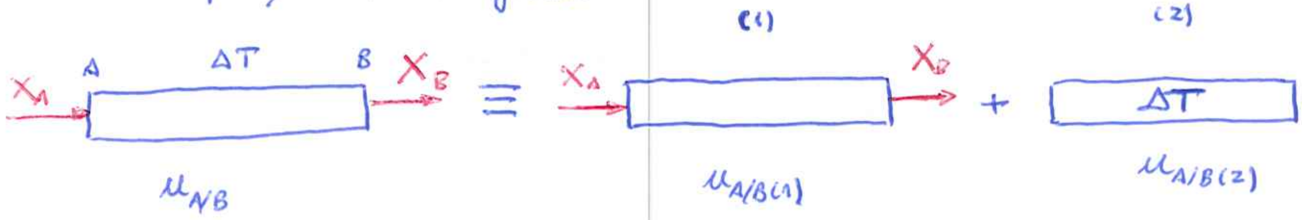
α é coeficiente linear de dilatação térmica. Suas unidades SI são $1/°C$ ou $1/K$.

Exemplo 4.4: A barra abaixo cabe exatamente entre os dois suportes na temperatura de 30°C. Se a temperatura passar a 60°C, determine a tensão térmica normal desenvolvida na barra. Dados $E = 200\,GPa$ e $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$.



Solução

Decomposição dos "carregamentos"



$u_{A/B(1)}$:

$$u_{A/B(1)} = \frac{N_1 L}{EA} = \frac{X_B L_0}{EA}$$

$u_{A/B(2)}$:

$$u_{A/B(2)} = \alpha L_0 \Delta T$$

Equação de compatibilidade:

$$u_{A/B} = 0$$

$$\frac{L_0 X_B}{EA} + \alpha L_0 \Delta T = 0$$

$$X_B = -\alpha E A \Delta T = N$$

Tensão normal na seção transversal da barra:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-\alpha E A \Delta T}{A} = -\alpha E \Delta T = -12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{9} \cdot (60-30)$$

$$\sigma = -72\,MPa$$ ∎

EXERCÍCIOS SUGERIDOS: 4.1, 4.4, 4.8, 4.17, 4.19, 4.25, 4.28, 4.33, 4.37, 4.42, 4.43, 4.45, 4.52, 4.58, 4.70, 4.72, 4.74, 4.76