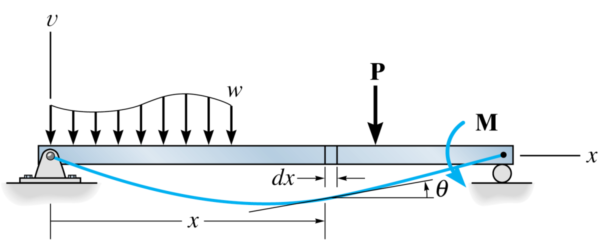
14.1. INTRODUÇÃO

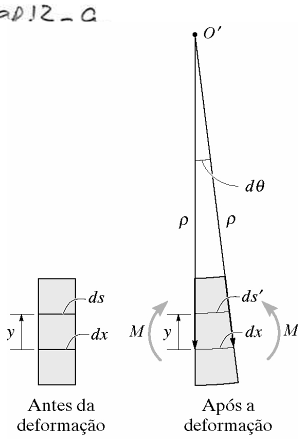
Quando submetidos à flexão, as vigas e os eixos sofrem curvatura e a linha de centróides, também chamada de linha elástica, se desloca transversalmente ao eixo geométrico dos mesmos. A esse deslocamento dá-se o nome de deflexão, que denotaremos por v. Além disto, as seções transversais giram ao redor do eixo neutro de flexão. A esse ângulo de inclinação dá-se o nome simplesmente de inclinação, que denotaremos por θ.

Neste capítulo, estudaremos como se relacionam os parâmetros cinemáticos da viga (curvatura, inclinação e deflexão) se relacionam com o momento fletor induzido na viga pelo carregamento. Veremos como obter a expressão da linha elástica deformada de uma viga a partir da expressão do momento fletor ao longo dela.

14.2 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA   slides 12.8 - 12.9   cap12_a



(a)



(b)

A figura acima mostra uma viga biapoiada submetida a um carregamento. Nela está representada a linha elástica deformada, a sua deflexão v e a sua inclinação θ. Uma fatia infinitesimal da viga (item (b) da figura) está detalhada, exibindo o centro de curvatura O', o raio de curvatura ρ, a inclinação relativa entre as duas faces $d\theta$, o comprimento ds' de um segmento material longitudinal posicionado na coordenada y e os momentos fletores em ambas as faces. O segmento material longitudinal da fatia disposto sobre a superfície neutra não se deforma. Logo, o arco que ele forma com a flexão tem comprimento:

$$dx = \rho \, d\theta$$

Já o segmento material longitudinal localizado na coordenada y indicada tem comprimento após a flexão: 14.2

$$ds' = (\rho - y)\, d\theta$$

Portanto, a deformação longitudinal que este elemento sofre com a flexão é:

$$\varepsilon_x = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho\, d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{-y}{\rho}$$

ou $$\frac{1}{\rho} = \frac{-\varepsilon_x}{y}$$

Ao inverso do raio de curvatura, dá-se o nome de curvatura.

Supondo que o material que constitui a viga seja linear elástico isotrópico homogêneo, temos, pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

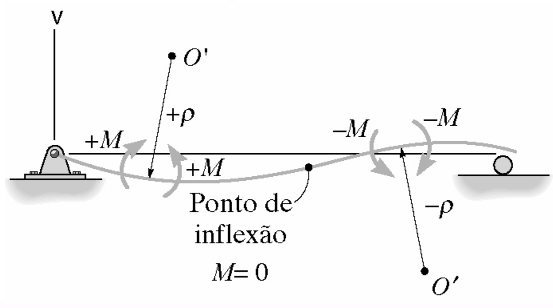
Como vimos no capítulo sobre flexão, a distribuição de tensão normal na seção transversal da viga é:

$$\sigma_x = \frac{-M}{I} y$$

Substituindo estas duas últimas equações na da curvatura, chegamos a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

ou seja, a curvatura numa seção da viga depende diretamente do momento fletor aí e inversamente da rigidez à flexão EI. Portanto, quanto maior o momento fletor na seção maior é a sua curvatura, quanto maior for a rigidez à flexão na seção menor é a sua curvatura, e vice-versa. Além disso, o sinal da curvatura segue o do momento. Momento positivo leva a curvatura positiva, isto é, concavidade voltada para cima; momento negativo leva a curvatura negativa, concavidade voltada para baixo; e momento nulo leva a ausência de curvatura na seção ou a uma inflexão na linha elástica aí. A figura abaixo ilustra isto. Slide 12.11



A curvatura da linha elástica pode ser dada em termos da deflexão v como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2}{dx^2}v}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^3}}$$

Considerando a aplicação da viga em engenharia, as deformações podem ser considera-das muito pequenas juntamente com a deflexão e a inclinação. A tangente da in-clinação da linha elástica é a derivada da deflexão ao longo da viga, ou seja:

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

Tendo isto em conta e que a inclinação é muito pequena, o denominador no se-gundo membro da expressão da curvatura acima pode ser tomado igual a um. Assim a curvatura fica expressa como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2}{dx^2}v = \frac{M}{EI}$$

ou

$$EI\frac{d^2}{dx^2}v = M$$

que é a equação diferencial da linha elástica de uma viga homogênea de material elástico linear isotrópico para pequenas deflexões.

Tendo em conta as relações diferenciais entre momento fletor M, força cor-tante V e carga distribuída W:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{d^2}{dx^2}M = \frac{dV}{dx} = -W$$

a equação diferencial da linha elástica pode ser ainda escrita como:

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}v\right) = V(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}v\right) = -W(x)$$

Em muitíssimos casos, a rigidez à flexão EI será uniforme e assim:

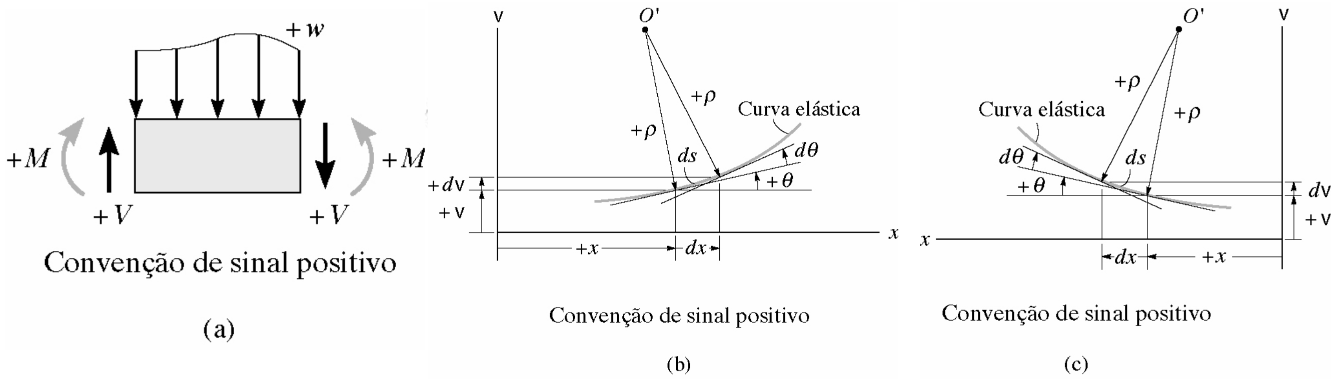
$$EI\frac{d^3}{dx^3}v = V(x)$$

$$EI\frac{d^4}{dx^4}v = -w(x) \qquad 14.4$$

A solução destas equações diferenciais são obtidas mediante integração sucessivas de ambos os membros, acrescidas das condições de apoio e continuidade da viga.

Convenção de sinal para v, θ e ρ

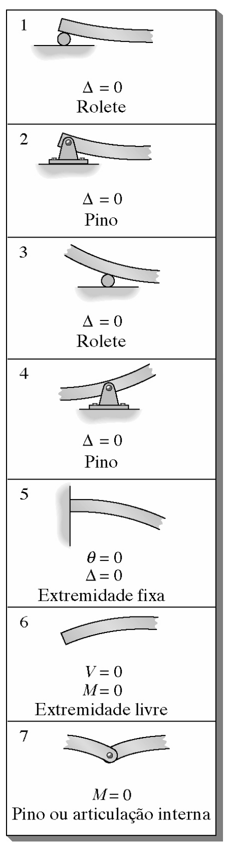
slides 12.16 - 12.18 cap12-a.ppt



Da figura acima, a deflexão é positiva quando orienta-se para cima e negativa, do contrário; a inclinação é positiva quando orienta-se no sentido antihorário e negativa, do contrário.

Condições de apoio e de continuidade

Conforme o tipo de apoio numa viga há uma condição específica para a deflexão, a inclinação, o momento fletor ou a força cortante aí. A tabela abaixo mostra as condições de apoio em alguns casos. Slide 12-20 cap12-a.ppt



Quando o carregamento numa viga sofre descontinuidade, não há uma única expressão que represente a deflexão ao longo de toda a viga. O número de expressões necessárias para representar a deflexão é igual ao número de descontinuidades do carregamento ao longo da viga. Nesses pontos de descontinuidade, deve-se empregar as condições de continuidade da linha elástica para a obtenção correta da solução em cada trecho entre descontinuidades sucessivas do carregamento. Essas condições decorrem do fato de que a linha elástica não pode "romper" (continuidade de deflexão) nem pode formar "dobras" (continuidade de inclinação).

não pode "romper"

não pode formar "bico"

Na viga abaixo, por exemplo, há descontinuidade de carregamento no ponto B. Portanto, a deflexão ao longo da viga é expressa por meio de duas expressões, uma entre A e B e outra entre B e C. Isto significa resolver duas equações diferenciais, uma para cada trecho. No ponto de descontinuidade de carregamento (ponto B) deve-se empregar as condições de continuidade de deflexão:

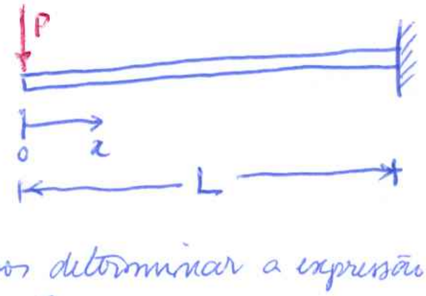
$$v(a_-) = v(a_+)$$

e de inclinação:

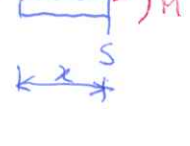
$$\theta(a_-) = \theta(a_+)$$

Do contrário, não é possível determinar a deflexão em toda a viga.

<u>Exemplo 14.1</u> A viga em balanço abaixo está sujeita à força vertical P na extremidade livre. Determine a expressão da deflexão ao longo da viga. A rigidez à flexão da viga é uniforme.



<u>Solução</u>: Primeiro vamos determinar a expressão do momento fletor ao longo da viga. Pelo método da seções:



$$M = -Px$$

Portanto, temos uma única expressão para descrever o momento fletor ao longo de toda a viga. Consequentemente temos apenas uma equação diferencial para resolver: 14.6

$$EI \frac{d^2}{dx^2} v = M = -Px$$

Integrando esta última duas vezes sucessivas:

1º $$EI \frac{d}{dx} v = -\frac{P}{2}x^2 + C_1$$

2º $$EI v = -\frac{P}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração que são obtidas da condição de apoio em $x = L$:

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

ou $$-\frac{P}{2} \cdot L^2 + C_1 = 0$$

ou $$C_1 = \frac{PL^2}{2}$$

$$v(L) = 0$$

ou $$-\frac{P}{6} L^3 + C_1 \cdot L + C_2 = 0$$

ou $$C_2 = -\frac{PL^3}{3}$$

Tem-se então:

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2 x - 2L^3)$$

A máxima deflexão ocorre em $x = 0$, onde:

$$\theta(0) = +\frac{PL^2}{2EI} \circlearrowleft \text{ (sentido anti-horário)}$$

$$v(0) = -\frac{PL^3}{3EI} \downarrow \text{ (para baixo)}$$

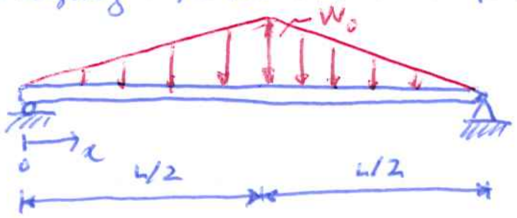
Para se ter uma idéia da ordem de grandeza de θ e v, suponha que a viga tenha rigidez à flexão de $1,7 \cdot 10^7 N \cdot m^2$, a força seja de 20kN e o comprimento da viga de 3m:

$$v(0) = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 1,7 \cdot 10^7} = -11 \text{ mm}$$

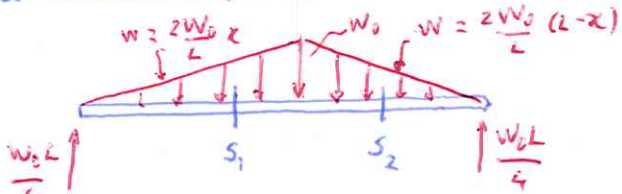
$$\theta(0) = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 1,7 \cdot 10^7} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

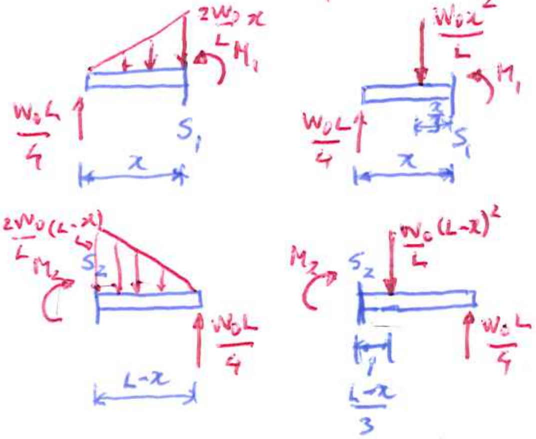
Valores bem pequenos se comparados às dimensões da viga ■

Exemplo 14.2: A viga simplesmente apoiada abaixo suporta um carregamento triangular distribuído. Determine a expressão da linha elástica e a deflexão máxima no vão. Considere que a rigidez à flexão EI é uniforme.



Solução: Expressão do momento fletor:





$$M_1 = \frac{w_0 L x}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L}$$

$$M_2 = \frac{w_0 L (L-x)}{4} - \frac{w_0}{3L}(L-x)^3$$

Resumindo:

$$M = M_1 = \frac{w_0 L x}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M = M_2 = \frac{w_0 L (L-x)}{4} - \frac{w_0}{3L}(L-x)^3, \quad \frac{L}{2} < x \leq L$$

Portanto, temos agora 2 expressões para representar o momento fletor ao longo da viga. Consequentemente temos 2 equações diferenciais a valores de apoio e de continuidade para resolver.

1ª Equação diferencial: $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

$$EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = M_1 = \frac{w_0 L x}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L}$$

Integrando esta última duas vezes sucessivas:

$$EI \frac{dv_1}{dx} = \frac{w_0 L}{8} x^2 - \frac{w_0 x^4}{12L} + C_1$$

$$EI v_1 = \frac{w_0 L}{24} x^3 - \frac{w_0}{60L} x^5 + C_1 x + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

2ª Equação diferencial : $\frac{L}{2} < x \leq L$

$$EI \frac{d^2}{dx^2} v_2 = M_2 = \frac{w_0 L (L-x)}{4} - \frac{w_0}{3L}(L-x)^3$$

Integrando esta última duas vezes sucessivas:

$$EI \frac{dv_2}{dx} = \frac{w_0 L x}{4}\left(L - \frac{x}{2}\right) - \frac{w_0 (L-x)^4}{12L} + C_3$$

$$EI\, v_2 = \frac{w_0 L x^2}{8}\left(L - \frac{x}{3}\right) - \frac{w_0 (L-x)^5}{60L} + C_3 x + C_4$$

Temos 4 constantes a determinar: C_1, C_2, C_3 e C_4, que são obtidas das condições de apoio e de continuidade.

Condições de apoio:

$$v(0) = v_1(0) = 0$$

$$\text{ou} \quad EI\, v_1(0) = C_2 = 0 \quad (1)$$

$$v(L) = v_2(L) = 0$$

$$\text{ou} \quad EI\, v_2(L) = \frac{w_0 L^4}{12} + L C_3 + C_4 = 0 \quad \text{ou} \quad L C_3 + C_4 = -\frac{w_0 L^4}{12} \quad (2)$$

Condição de continuidade:

$$v\left(\frac{L}{2}-\right) = v\left(\frac{L}{2}+\right)$$

$$\text{ou} \quad EI v_1\left(\frac{L}{2}\right) = EI v_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\frac{3}{640} w_0 L^4 + \frac{L}{2} C_1 + C_2 = \frac{49}{1920} w_0 L^4 + \frac{L}{2} C_3 + C_4$$

$$\frac{L}{2} C_1 + C_2 - \frac{L}{2} C_3 - C_4 = \frac{w_0 L^4}{48} \quad (3)$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}-\right) = \theta\left(\frac{L}{2}+\right)$$

$$\text{ou} \quad EI\theta_1\left(\frac{L}{2}\right) = EI\theta_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\frac{5}{192} w_0 L^3 + C_1 = \frac{19}{192} w_0 L^3 + C_3$$

$$C_1 - C_3 = \frac{7}{96} w_0 L^3 \quad (4)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1)-(4):

$$C_1 = \frac{-5}{192} w_0 L^3$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{-19}{192} w_0 L^3$$

$$C_4 = \frac{w_0 L^4}{64}$$

Tem-se, portanto:

$$v = v_1 = \frac{w_0 L}{24EI}x^3 - \frac{w_0}{60EIL}x^5 - \frac{5}{192EI}w_0 L^3 x \quad , \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v = v_2 = \frac{w_0 L x^2}{8EI}\left(L - \frac{x}{3}\right) - \frac{w_0}{60EIL}(L-x)^5 - \frac{19}{192EI}w_0 L^3 x + \frac{wL^4}{64} \quad , \quad \frac{L}{2} < x \le L$$

Máxima deflexão. Entre apoios a deflexão máxima ocorre onde a rotação é nula.

$$\theta = \theta_1 = \frac{w_0 L x^2}{8EI} - \frac{w_0 x^4}{12EIL} - \frac{5w_0 L^3}{192EI} \quad , \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow x_{máx} = \frac{L}{2}$$

$$\theta = \theta_2 = \frac{w_0 L x}{4EI}\left(L - \frac{x}{2}\right) + \frac{w_0 (L-x)^4}{12EIL} - \frac{19 w_0 L^3}{192EI} \quad , \quad \frac{L}{2} < x \le L$$

$$\theta_2 = 0 \Rightarrow x_{máx} = \frac{L}{2}$$

$$v_{máx} = v\left(\frac{L}{2}\right) = v_1\left(\frac{L}{2}\right) = v_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-w_0 L^4}{120EI} \quad \blacksquare$$

14.4. MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO

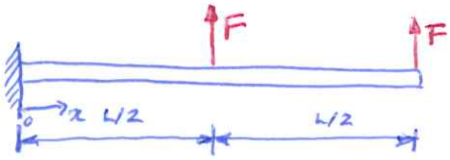
Sendo válidas as condições do princípio da superposição, este pode ser aplicado para obter a expressão da linha elástica de vigas ou eixos submetidos a carregamentos mais complexos. Para tanto, deve-se decompor o carregamento em outros mais elementares aplicados à mesma viga e somar as expressões da linha elástica de cada carregamento elementar para assim obter a expressão da deflexão da linha elástica do carregamento complexo. De forma esquemática:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{carregamento complexo} & = & \text{carregamento 1} & + & \text{carregamento 2} & + & \ldots & + & \text{carregamento } n \\ v & = & v_1 & + & v_2 & + & \ldots & + & v_n \end{array}$$

onde v_i é a expressão da deflexão da linha elástica da viga para o carregamento i.

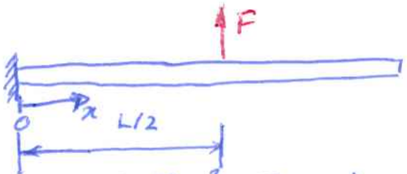
O método da superposição torna-se simples se se dispõe da expressão da deflexão da linha elástica para uma gama de carregamentos elementares. No final deste capítulo existe uma tabela com diversos carregamentos elementares e respectivas expressões de deflexão e inclinação para vigas em balanço e bi-apoiada.

Exemplo 14.3 Determine a expressão da deflexão da linha elástica para a viga em balanço abaixo. A rigidez à flexão é uniforme ao longo de toda a viga.



Solução: Decomposição do carregamento em dois outros elementares:

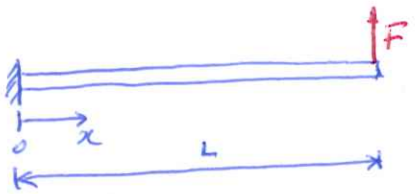
Carregamento 1:



Da tabela:

$$v_1 = \begin{cases} \dfrac{Fx^2}{6EI}\left(\dfrac{3L}{2} - x\right), & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{FL^2}{24EI}\left(3x - \dfrac{L}{2}\right), & \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

Carregamento 2:



Da tabela

$$v_2 = \frac{Fx^2}{6EI}(3L - x), \quad 0 \le x \le L$$

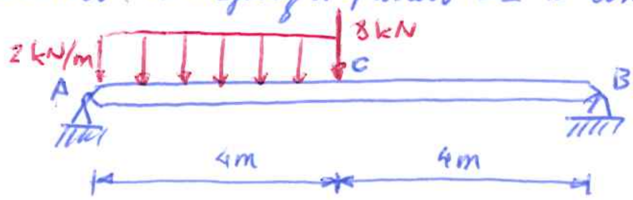
Pelo princípio da superposição: $v = v_1 + v_2$

O esquema abaixo auxilia na soma de v_1 com v_2 trecho-a-trecho:

	$0 \le x \le \frac{L}{2}$	$\frac{L}{2} < x \le L$
v_1	$\frac{Fx^2}{6EI}\left(\frac{3L}{2} - x\right)$	$\frac{FL^2}{24EI}\left(3x - \frac{L}{2}\right)$
v_2	$\frac{Fx^2}{6EI}(3L - x)$	$\frac{Fx^2}{6EI}(3L - x)$
v	$\frac{Fx^2}{12EI}(9L - 4x)$	$\frac{F}{48EI}(-L^3 + 6L^2x + 24Lx^2 - 8x^3)$

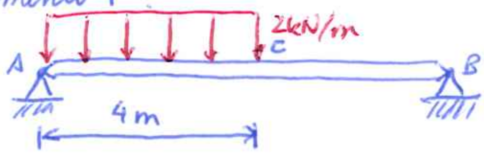
$$v = \begin{cases} \dfrac{Fx^2}{12EI}(9L - 4x), & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{F}{48EI}(-L^3 + 6L^2x + 24Lx^2 - 8x^3) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exemplo 14.4 Determine a deflexão no ponto C e a inclinação no ponto A da viga biapoiada abaixo. A rigidez à flexão EI é uniforme ao longo de toda viga e vale $7{,}0 \cdot 10^7\ N \cdot m^2$. 14.11



Solução: Decomposição do carregamento em dois outros elementares:

Carregamento 1:



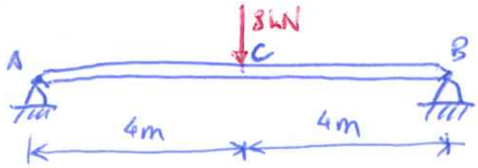
Da tabela:

$$(\theta_A)_1 = \frac{-q\left(\frac{L}{2}\right)^2}{24\,EIL}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 4\frac{L}{2}L + 4L^2\right) = \frac{-3qL^3}{128EI}$$

$$(v_C)_1 = \frac{-q\frac{L}{2}}{24EIL}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{L}{2}\right)^3L + 4\left(\frac{L}{2}\right)^2L^2 + 2\left(\frac{L}{2}\right)^2\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 4\frac{L}{2}L\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L\left(\frac{L}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{-5qL^4}{768EI}$$

Carregamento 2:



Da tabela:

$$(\theta_A)_2 = -\frac{F\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}}{6EIL}\left(L + \frac{L}{2}\right) = \frac{-FL^2}{16EI}$$

$$(v_C)_2 = \frac{-F\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}}{6EIL}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = -\frac{FL^3}{48EI}$$

Pelo princípio da superposição:

$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{-3qL^3}{128EI} - \frac{FL^2}{16EI} = \frac{-L^2}{128EI}(3qL + 8F)$$

$$= \frac{-8^2}{128 \cdot 7{,}0 \cdot 10^7}\left(3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot 10^3\right)$$

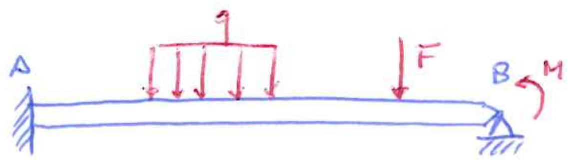
$$\theta_A = -8{,}0 \cdot 10^{-4}\ rad$$

$$v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{-5qL^4}{768EI} - \frac{FL^3}{48EI} = \frac{-L^3}{768EI}(5qL + 16F)$$

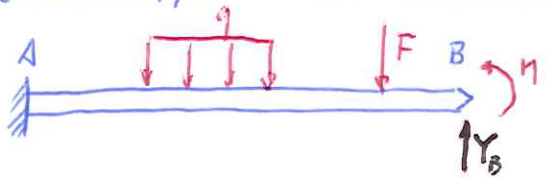
$$= \frac{-8^3}{768 \cdot 7{,}0 \cdot 10^7}\left(5 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 8 + 16 \cdot 8 \cdot 10^3\right)$$

$$v_C = -2{,}0 \cdot 10^{-3}\ m \text{ ou } -2{,}0\ mm$$ ∎

Considere abaixo, sem perda de generalidade, a viga transversalmente carregada. No apoio A, por se tratar de um engaste, há vínculos (ou restrições ao movimento) de translação e de rotação, sendo que do primeiro tipo só o de translação transversal à viga é realmente solicitado. No apoio B, por se tratar de um apoio articulado, há vínculos de translação horizontal e vertical, sendo que só este último é realmente solicitado. Somando o número total de vínculos realmente solicitados na viga, resultam 3 vínculos, ou 3 componentes reativas incógnitas. O equilíbrio de forças proporciona 2 equações: a resultante de componentes transversais à viga e a resultante de momentos. Tem-se com isto um sistema de equações algébricas com 2 equações e 3 incógnitas, ou seja, o sistema é indeterminado, havendo a necessidade de mais uma equação. Há entre os



apoios da viga 3-2=1 vínculo redundante que pode ser retirado sem comprometer a imobilidade da viga. Retirando 3-2=1 vínculo dos apoios, por exemplo o vínculo transversal em B, obtém-se a estrutura fundamental. Para tornar a estrutura fundamental compatível com a estrutura original, além do carregamento em vermelho na figura acima, é preciso acrescentar a força reativa que o vínculo retirado exercia no apoio B. Resulta assim a estrutura fundamental carregada (figura abaixo). Falta ainda, para terminar de compatibilizar ambas as estru-



turas, impor que a deflexão no ponto B da estrutura fundamental seja nula: $v_B = 0$. Esta equação, chamada equação de compatibilidade, é a que faltava para tornar o sistema algébrico determinado.

Podemos generalizar o que foi feito para este exemplo e propor o seguinte procedimento para solução do problema de vigas e eixos estaticamente indeterminados:

1º Determinar o grau de indeterminação estática g:

g = nº de vínculos solicitados − nº de equações de equilíbrio

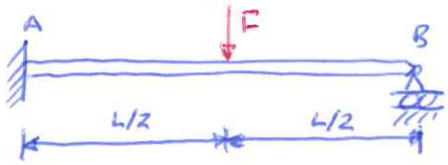
2º Obter a estrutura fundamental eliminando g vínculos dos apoios da estrutura original.

3º Carregar a estrutura fundamental com os carregamentos externos originais e com os esforços reativos exercidos pelos vínculos retirados.

4º Obter as g equações de compatibilidade (de deslocamento ou de rotação), uma para cada vínculo eliminado.

5º Resolver o sistema de equações algébricas formado pelas equações de equilíbrio e de compatibilidade.

Exemplo 14. : Determine as reações de apoio da viga abaixo. A rigidez à flexão é uniforme ao longo de toda a viga.



Solução: Grau de indeterminação estática:

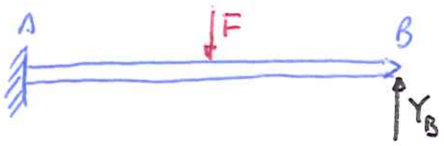
nº de vínculos: 2 em A (translação vertical e rotação) e 1 em B (translação vertical em B.

nº de equações de equilíbrio: 2 (resultante de componentes verticais e de momentos).

$$g = 2+1-2 = 1$$

Estrutura fundamental: vamos escolher, por exemplo, o vínculo vertical em B:

Carregamento da estrutura fundamental:

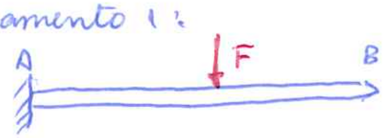


Equação de compatibilidade:

$$v_B = 0$$

Obtenção de v_B pelo princípio da superposição:

Carregamento 1:



$$v_{B1} = \frac{-F\left(\frac{L}{2}\right)^2}{6EI}\left(3L - \frac{L}{2}\right) = \frac{-5FL^3}{48EI}$$

Carregamento 2:

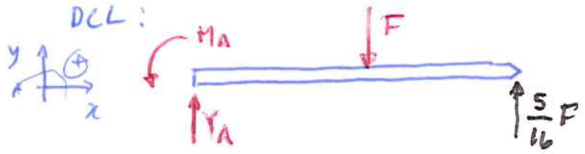
$$v_{B2} = \frac{Y_B L^3}{3EI}$$

Pelo princípio da superposição:

$$v_B = v_{B1} + v_{B2} = \frac{-5FL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} Y_B = 0$$

ou $Y_B = \frac{5}{16} F \uparrow$

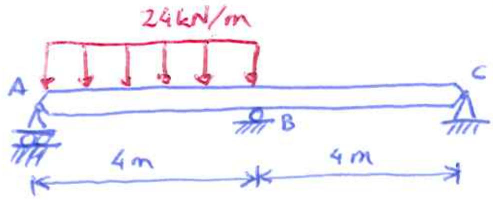
DCL:



$$R_x = Y_A + \frac{5}{16}F - F = 0 \rightarrow Y_A = \frac{11}{16}F \uparrow$$

$$M_{(A)} = M_A - F\frac{L}{2} + \frac{5}{16}FL = 0 \rightarrow M_A = \frac{3}{16}FL \circlearrowleft \quad \blacksquare$$

Exemplo 14: Determine as reações de apoio na viga carregada e apoiada conforme abaixo nas condições de operação normal e de ocorrência de um recalque vertical para baixo de 12 mm no apoio B. A viga tem rigidez à flexão uniforme de $1{,}6 \cdot 10^7 N \cdot m^2$.



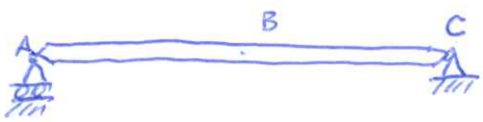
Solução: Grau de indeterminação estática:

nº de vínculos: 3 (translação vertical em cada apoio)

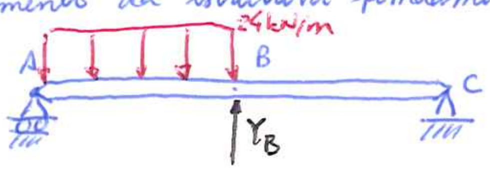
nº de equações de equilíbrio: 2 (resultante de componentes verticais e de momentos)

$g = 3 - 2 = 1$

Estrutura fundamental: vamos escolher, por exemplo, retirar o vínculo vertical em B:



Carregamento da estrutura fundamental:



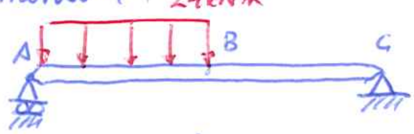
Equação de compatibilidade:

operação normal: $v_B = 0$

Operação com recalque: $v_B = -12 \cdot 10^{-3}$ m

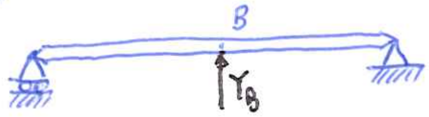
Obtenção de v_B pelo princípio da superposição:

Carregamento 1:



$$v_{B1} = \frac{-q\left(\frac{L}{2}\right)^2}{24EIL}\left(2\left(\frac{L}{2}\right)^3 - 6L\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4L^2 \cdot \frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 L\right) = \frac{-5qL^4}{768EI}$$

Carregamento 2:



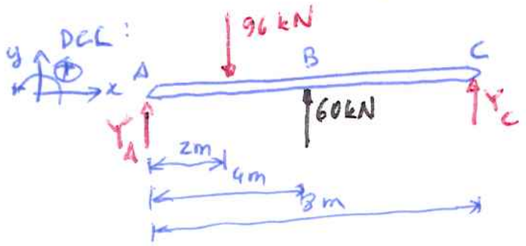
$$v_{B2} = \frac{Y_B \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}}{6EIL}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{L^3}{48EI} Y_B$$

Em operação normal:

$$v_{B1} + v_{B2} = 0 \Rightarrow \frac{-5qL^4}{768EI} + \frac{L^3}{48EI} Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{5qL}{16} = \frac{5 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 8}{16}$$

$$Y_B = 60 \text{ kN} \uparrow$$

DCL:



$$R_y = Y_A + Y_C + 60 - 96 = 0 \Rightarrow Y_A = 36 - Y_C = 36 - (-6) \Rightarrow Y_A = 42 \text{ kN} \uparrow$$

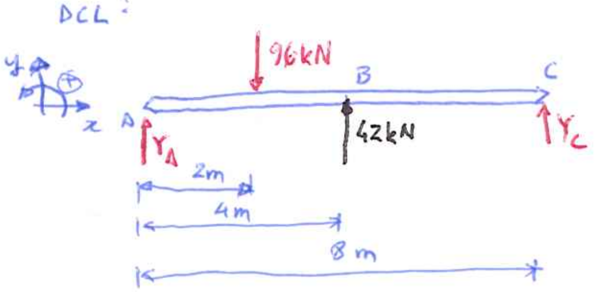
$$M_A = -96 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 8 Y_C = 0 \Rightarrow Y_C = -6 \text{ kN} \downarrow$$

Em operação com recalque:

$$v_{B1} + v_{B2} = v_B \Rightarrow \frac{-5qL^4}{768EI} + \frac{L^3}{48EI} Y_B = v_B \Rightarrow Y_B = \frac{5qL}{16} + \frac{48EI}{L^3} v_B$$

$$\Rightarrow Y_B = \frac{5 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 8}{16} + \frac{48 \cdot 1{,}6 \cdot 10^7}{8^3} \cdot (-12 \cdot 10^{-3}) = 42 \text{ kN} \uparrow$$

DCL:



$$M_A = -96\cdot 2 + 42\cdot 4 + 8Y_C \Rightarrow Y_C = 3\,kN \uparrow$$

$$R_y = Y_A + Y_C + 42 - 96 = 0 \Rightarrow Y_A = 54 - Y_C = 54 - 3 \Rightarrow Y_A = 51\,kN \uparrow \blacksquare$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 12.2, 12.4, 12.7, 12.9, 12.12, 12.14, 12.16, 12.19, 12.20, 12.89, 12.90, 12.91, 12.92, 12.93, 12.121, 12.122, 12.123, 12.124, 12.125, 12.126, 12.129, 12.130, 12.131.