12.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão estudadas algumas teorias que explicam a falha de um material sólido restritas ao estado plano de tensão. As teorias aplicadas ao estado triplo de tensão será estudada na disciplina Mecânica dos Sólidos II.

A falha é um fenômeno associado à formação de micro-trincas, no caso de material frágil, ou de micro-regiões de escoamento do material, no caso de material dútil, a qual, uma vez iniciada, propaga-se progressivamente por toda a peça, tornando-a inapta para a função estabelecida em projeto e um potencial risco à integridade física de pessoas, ecossistemas e equipamentos. Conhecer o início desse processo é fundamental para poder-se evitá-lo. Por isso as teorias de falha procuram estabelecer as condições que dão início à falha do material.

No projeto de uma peça, procura-se estabelecer uma margem de segurança em relação à condição de início de falha por meio do, assim chamado, coeficiente de segurança.

Como já comentado, o fenômeno de falha do material é diferente para o material dútil e o frágil. Portanto, há teorias de falha específicas para cada um dos dois tipos de material. Para os materiais frágeis estudaremos a teoria da máxima tensão normal; para os materiais dúteis estudaremos as teorias da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção.

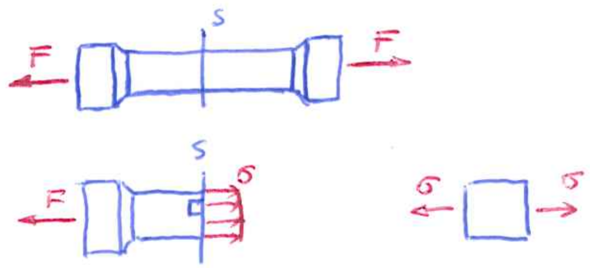
FRÁGIL
- máxima tensão normal

DÚTIL
- máxima tensão de cisalhamento
- máxima energia de distorção

12.2. TEORIA DA MÁXIMA TENSÃO DE CISALHAMENTO. CRITÉRIO DE TRESCA

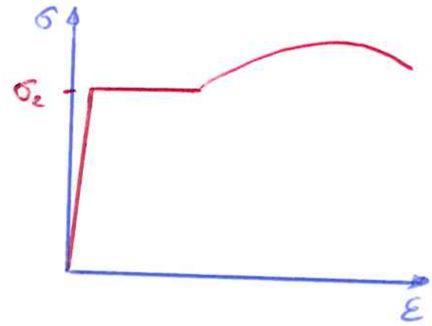
Esta teoria estabelece que o escoamento do material ocorre pelo deslizamento das partículas dispostas ao longo do plano de máxima tensão de cisalhamento na vizinhança do ponto, quando a tensão de cisalhamento atinge um determinado valor crítico τ_e.

A tensão de cisalhamento crítica pode ser obtida do ensaio de tração. Como o corpo de prova nesse ensaio está sujeito ao estado uniaxial de tensão:



Tem-se assim $\sigma_{máx} = \sigma$ e $\sigma_{mín} = 0$ e, portanto, a tensão máxima absoluta é:

$$\tau_{\substack{máx\\abs}} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} = \frac{\sigma}{2}$$



Logo, no limite de escoamento a tensão de cisalhamento máxima absoluta observada é:

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

que é a tensão de cisalhamento crítica para o material. No ponto do material onde a tensão de cisalhamento máxima absoluta atingir esse valor, dá-se início à falha.

<u>Exemplo 12.1</u>: O estado de tensão num ponto crítico de uma peça tem tensões principais $\sigma_1 = 5\sigma$, $\sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = -3\sigma$, com $\sigma > 0$. Determine o valor limite de falha para σ pela teoria da tensão de cisalhamento máxima (ou pelo critério de Tresca).

<u>Solução</u>:

Tensão de cisalhamento máxima no ponto:

$$\sigma_{máx} = 5\sigma$$

$$\sigma_{mín} = -3\sigma$$

$$\tau_{máx} = \frac{5\sigma - (-3\sigma)}{2} = 4\sigma$$

Pelo critério de Tresca, a falha ocorre quando:

$$\tau_{máx} = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

ou seja,

$$4\sigma = \frac{\sigma_e}{2}$$

$$\text{ou } \sigma = \frac{\sigma_e}{8}$$

que é o limite de falha no ponto crítico da peça em questão ∎

12.3. O HEXÁGONO DE TRESCA

Se tomarmos as tensões principais de um ponto submetido ao estado plano de tensão numa ordem qualquer, a tensão de cisalhamento máxima absoluta será dada por:

$$\tau_{\substack{máx\\abs}} = máx\left\{\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1-\sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2}\right\}$$

Fazendo, por exemplo, $\sigma_3 = 0$, para garantir o estado plano de tensão, então:

$$\tau_{\substack{máx\\abs}} = máx\left\{\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1|}{2}, \frac{|\sigma_2|}{2}\right\}$$

Segundo o critério de Tresca, para que não haja falha num ponto, é necessário que $\tau_{\substack{máx\\abs}} < \frac{\sigma_e}{2}$, ou seja,

$$\sigma_e > máx\left\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\right\}$$

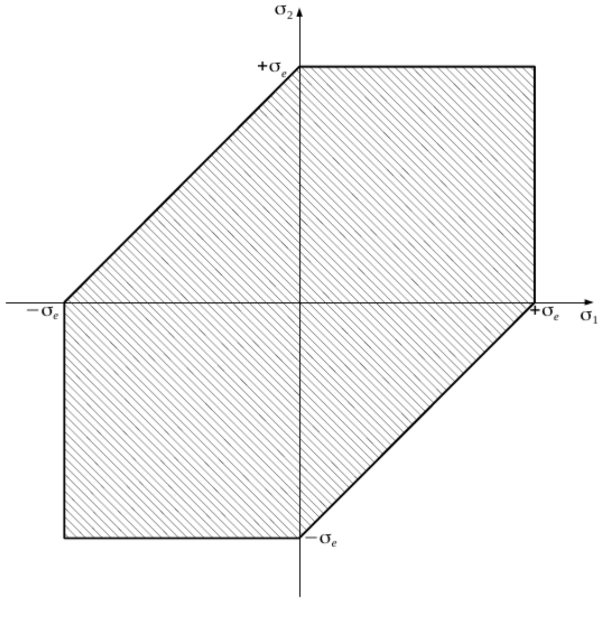
Isto equivale a dizer que, para que não ocorra falha, é necessário que as tensões principais no ponto verifiquem simultaneamente:

$$|\sigma_1-\sigma_2| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e < \sigma_1-\sigma_2 < +\sigma_e$$

$$|\sigma_1| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e < \sigma_1 < +\sigma_e$$

$$|\sigma_2| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e < \sigma_2 < +\sigma_e$$

Estas três desigualdades delimitam uma região no plano cartesiano $\sigma_1 \times \sigma_2$, denominada de hexágono de Tresca. Se, ao plotar o ponto de coordenadas (σ_1, σ_2) correspondente a um estado plano de tensão, este se encontrar no interior do hexágono de Tresca, não há falha. Ao contrário, isto é, fora e sobre o contorno do hexágono, há falha.



Exemplo 12.2: Avalie a pressão crítica de um reservatório de pressão cilíndrico de parede fina constituído de material dútil pela teoria da máxima tensão de cisalhamento.

Solução:

Na parede do reservatório as tensões principais são:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \quad e \quad \sigma_3 = 0$$

A tensão de cisalhamento máxima absoluta é:

$$\tau_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{\sigma_1 - 0}{2}$$

Na condição crítica, pelo critério de Tresca:

$$\tau_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{\sigma_e}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$$

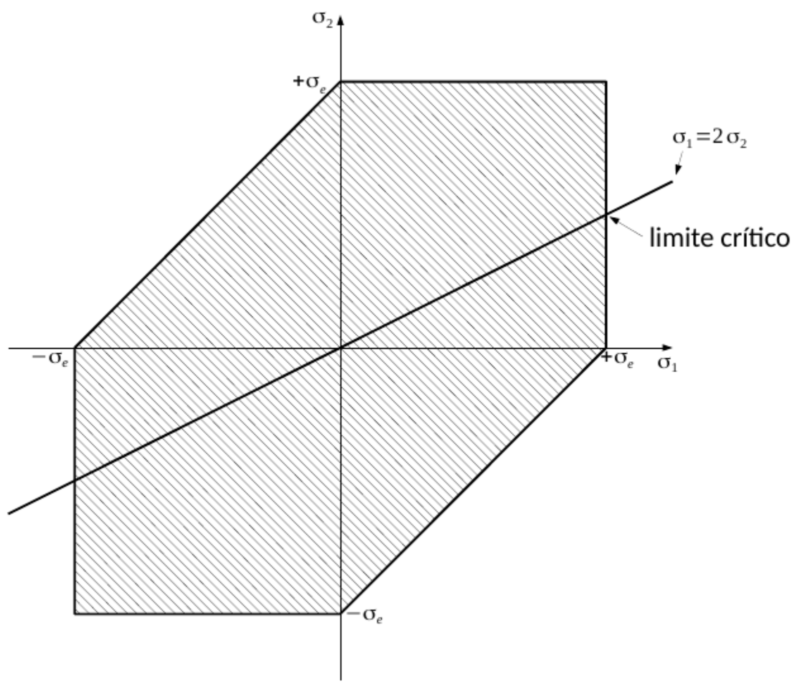
ou $\sigma_1 = \sigma_e$

$$p_c \frac{r}{t} = \sigma_e$$

ou

$$p_c = \sigma_e \frac{t}{r}$$

Segue abaixo esta mesma análise pelo hexágono de Tresca. Na figura está plotada a reta $\sigma_1 = 2\sigma_2$ correspondente ao estado de tensão plano na parede do reservatório. A interseção desta com a fronteira indica a situação crítica pelo critério de Tresca. No presente caso, a tensão crítica é $\sigma_1 = \sigma_e$, e a pressão crítica é $p_c = \sigma_e \frac{t}{r}$, como se esperava, pois ambas abordagens são equivalentes.



12.4 TEORIA DA MÁXIMA ENERGIA DISTORCIONAL - CRITÉRIO DE VON MISES

Esta teoria estabelece que o escoamento do material ocorre pelo deslizamento das partículas quando a densidade de energia distorcional no ponto atingir um valor limite característico do material.

Não entraremos em detalhes sobre a densidade de energia distorcional. Apenas nos limitaremos a expressá-la em termos das tensões principais no ponto para o material elástico linear isotrópico. Sejam σ_1, σ_2 e σ_3 as tensões principais. Define-se a densidade de energia distorcional como:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{6E_y}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]$$

Para o estado plano de tensão, em que uma das tensões principais é nula, por exemplo $\sigma_3=0$, tem-se:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E_y}\left(\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2\right)$$

Para o estado uniaxial de tensão, em que apenas uma das tensões principais não é nula, por exemplo σ_1, tem-se:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E_y}\sigma_1^2$$

O valor crítico da densidade de energia distorcional pode ser obtido do ensaio de tração, no qual as partículas estão sob estado uniaxial de tensão. Assim, no limiar do escoamento $\sigma_1 = \sigma_e$ e

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E_y}\sigma_e^2$$

é a densidade de energia distorcional crítica.

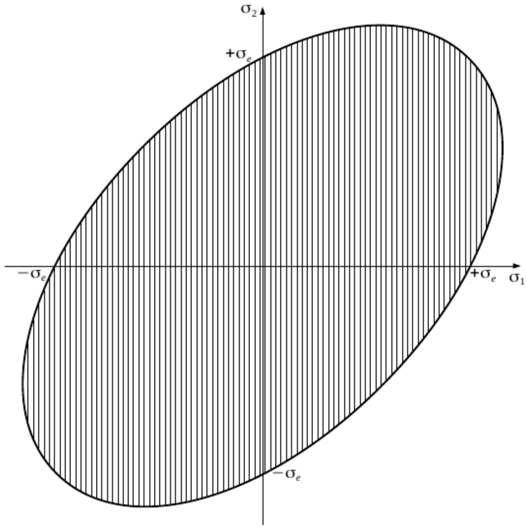
Segundo esta teoria, basta comparar a densidade de energia de distorção do material num ponto com o valor acima. Se o ponto estiver sob estado plano de tensão:

$$\frac{1+\nu}{3E_y}\left(\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2\right) = \frac{1+\nu}{3E_y}\sigma_e^2$$

ou

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2 = \sigma_e^2$$

que é a condição de falha num ponto sob estado plano de tensão. Esta última equação é a equação de uma elipse inclinada a 45° no plano cartesiano $\sigma_1 \times \sigma_2$, denominada elipse de von Mises. Todo par (σ_1, σ_2) que estiver no



interior da elipse de von Mises não falham, conforme esta teoria. Do contrário, fora ou sobre a elipse, falham.

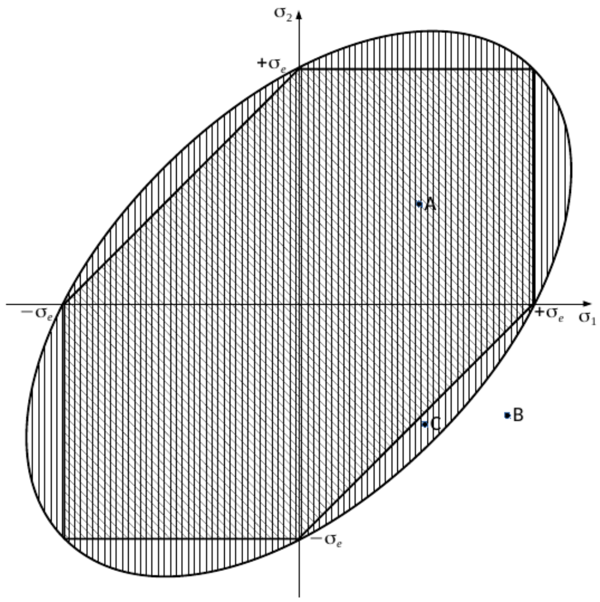
Define-se a tensão de von Mises, a tensão normal de um estado uniaxial de tensão equivalente no qual a densidade de energia de deformação distorcional é igual ao de um estado de tensão qualquer. Por exemplo, para um ponto sob estado plano de tensão qualquer:

$$\frac{1+\nu}{3E_y}\sigma_{vm}^2 = \frac{1+\nu}{3E_y}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

$$\text{ou} \quad \sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Sob estado plano de tensão o material falha sempre $\sigma_{vm} \geq \sigma_e$, e não falha se $\sigma_{vm} < \sigma_e$. Portanto, a tensão de von Mises torna-se um parâmetro fácil de verificar a falha do material num ponto. Basta compará-la com a tensão de escoamento do material. Muitos "softwares" de análise de tensão dão a opção de representar o mapa de cores indicando o nível da tensão de von Mises na peça, facilitando identificar falhas na peça.

Vale a pena comparar as duas teorias de falha para material dútil. Ao representar o hexágono de Tresca e a elipse de von Mises num mesmo plano cartesiano $\sigma_1 \times \sigma_2$, observa-se que o hexágono de Tresca está inscrito na elipse de von Mises, conforme a figura abaixo. Logo, todo estado de tensão que falha pelo critério de von Mises falha também pelo critério de Tresca. Porém, a recíproca não é verdadeira. Observe na figura os três estados planos de tensão dados pelos pontos A, B e C. O ponto A não apresenta falha pelos dois critérios; o ponto B apresenta falha pelos dois critérios; e o ponto C apresenta falha pelo critério de Tresca, mas não pelo critério de von Mises.



Exemplo 12.3: Repita o exemplo 12.2 agora empregando a teoria da máxima densidade de energia distorcional.

Solução:

Na parede do reservatório as tensões principais são:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \quad e \quad \sigma_3 = 0$$

A tensão equivalente de von Mises aí é:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1$$

Na condição crítica, pelo critério de von Mises:

$$\sigma_{vm} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1 = \sigma_e$$

ou $$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_e$$

$$p_c \frac{r}{t} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_e$$

ou $$p_c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_e \frac{t}{r} \cong 1{,}155\,\sigma_e \frac{t}{r}$$

Ou seja, a pressão crítica é 15,5% maior que a obtida pelo critério de Tresca.

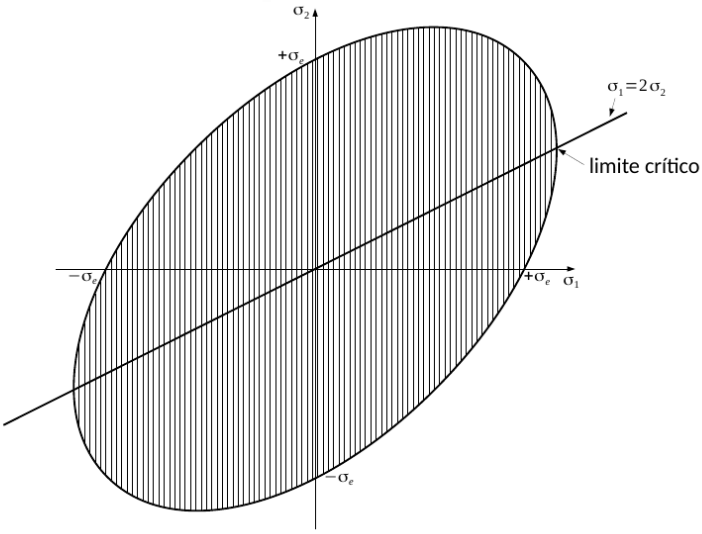
Segue abaixo esta mesma análise pela elipse de von Mises. Na figura está plotada a reta $\sigma_1 = 2\sigma_2$ correspondente ao estado de tensão plano na parede do reservatório. A interseção desta com a fronteira indica a situação crítica pelo critério de von

Mises. Substituindo $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$ na equação da elipse de von Mises, obtém-se:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_e$$

e chega-se também à pressão crítica:

$$p_c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_e \frac{t}{r} \blacksquare$$



12.5 TEORIA DA MÁXIMA TENSÃO NORMAL. CRITÉRIO DE RANKINE

Esta teoria estabelece que as camadas de átomos do material se separam pela ação de tensão normal na superfície de interface entre as camadas. Quando a tensão aí atinge um determinado valor crítico dá-se início à separação e uma micro-trinca se forma e propaga velozmente pelo material. Por isso é uma falha abrupta. Ao contrário da falha dútil, a frágil caracteriza-se por exibir nenhuma ou quase nenhuma deformação plástica, ou seja, não dá sinal de que o material irá falhar.

O valor crítico da tensão normal pode ser obtido do ensaio de tração do material. Esta teoria considera que a falha ocorre quando a tensão normal de tração ou compressão atinge o valor crítico. Logo, considerando as tensões principais num ponto (σ_1, σ_2 e σ_3) numa ordem qualquer, deve-se comparar o módulo delas à tensão normal de ruptura sob tração (σ_{rt}) e sob compressão (σ_{rc}). Para que o material não falhe segundo esta teoria se requer verificar simultaneamente:

$$-\sigma_{rc} < \sigma_1 < +\sigma_{rt}$$

$$-\sigma_{rc} < \sigma_2 < +\sigma_{rt}$$

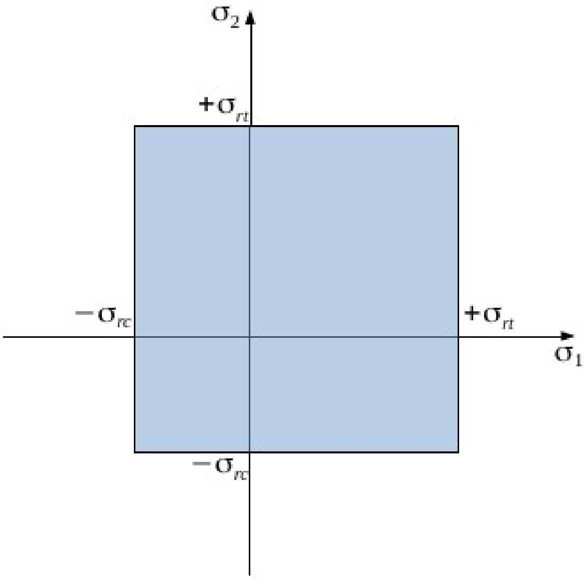
$$-\sigma_{rc} < \sigma_3 < +\sigma_{rt}$$

Para o <u>estado plano de tensão</u>, supondo, por exemplo, que σ_3 seja nula, se requer apenas estas duas desigualdades:

$$-\sigma_{rc} < \sigma_1 < \sigma_{rt}$$

$$-\sigma_{rc} < \sigma_2 < \sigma_{rt}$$

Postas estas 2 últimas desigualdades num par de eixos coordenados ($\sigma_1 \times \sigma_2$) resulta num quadrado de lado $\sigma_{rc}+\sigma_{rt}$ envolvendo a origem, conforme a figura abaixo. O estado de tensão que leve a um ponto no interior desse quadrado não falha e, ao contrário, aquele que leva a um ponto fora dele falha.



<u>Exemplo 12.3</u>: Avalie o torque crítico a que um eixo cilíndrico maciço de raio c <u>submetido</u> à torção pura sofre. O material é frágil e as tensões de ruptura à tração e à compressão são iguais.

<u>Solução</u>: No ponto crítico do eixo as tensões principais são:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{T}{I_0}c$$

Pelo critério de Rankine deve-se ter falha quando

$$\sigma_1 = \frac{T}{I_0}c = \sigma_{rt}$$

$$\sigma_2 = \frac{T}{I_0}c = \sigma_{rc}$$

ou seja: $$\frac{T}{I_0}c = \sigma_{rt}$$

$$T_c = \sigma_{rt}\frac{I_0}{c} \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 10.65, 10.66, 10.71, 10.72, 10.73, 10.74, 10.80, 10.81, 10.83, 10.84, 10.88, 10.92, 10.93.