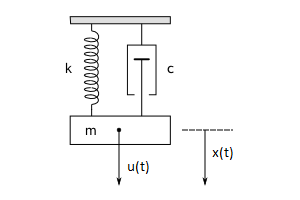
**Aula de Sistemas de EDOs**

Exemplo 7.8) A equação de movimento livre de um sistema de segunda ordem com suas condições iniciais formula o seguinte PVI:

**Sistema Massa-Mola-Amortecedor**

http://2.bp.blogspot.com/-I0Rj-MjFvB0/ThiPhPR2wnI/AAAAAAAAAX8/6xuXCJaUGkw/s1600/mma.png

 (7.84)

Tomando ; ;  (frequência natural do sistema), pede-se apresentar a solução x(t) e  para  s numericamente tal que ETL < 10-6 em uma tabela para sistema subamortecido,  (razão de amortecimento), e na forma gráfica para sistema subamortecido, , com amortecimento crítico, , e sistema com superamortecimento, .

**Solução**

1. O PVI equivalente à Eq. (7.84) como um sistema de EDOs de 1ª ordem é dado por:

 (7.85)

1. A solução da Eq. (7.85) é possível de ser obtida utilizando um dos métodos numéricos para solução de EDOs apresentados neste capítulo. Neste exemplo, usa-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem de passo adaptativo, que foi implementado em um programa computacional (programa do livro). Usa-se um passo externo de tempo  apenas para reduzir o tamanho da tabela de resultados numéricos e também para obter os pontos que são representados graficamente. No entanto, o método de passo adaptativo, dentro desse intervalo de 5 s utiliza quantos passos forem necessários para manter a precisão da solução dentro de uma tolerância desejada, i.e., tal que ETL < 10-6 neste exemplo, conforme foi discutido na seção 7.3.5.
2. Para , a solução é mostrada na forma da Tabela 7.5 e graficamente nas Figs. 7.9 a 7.11 para , , e .

**main.f90**

! program amortecimento

! use msflib ! biblioteca que contem o comando systemqq

! logical chamada

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (nelmax=100)

dimension tp(nelmax)

external fcn,rkqc

common /const/ ht2

open(1,file='inpaula.txt')

open(2,file='x1.txt')

open(3,file='x-all.txt')

open(4,file='x2.txt')

!

! integrador de EDO's com passo adaptativo - RK 4a/5a ordem

! integrador de EDO's com passo fixo - RK 4a ordem e For. Euler

!

read(1,\*)iflag

write(\*,\*)'iflag=',iflag

read(1,\*)n,tau0

write(\*,\*)'n=',n,'tau0=',tau0

read(1,\*) tend,dtau

write(\*,\*)'tend=',tend,'dtau=',dtau

!

! initial values

!

read(1,\*)(tp(l),l=1,n)

write(\*,\*)(tp(l),l=1,n)

! initial time

time=tau0

k=0

write(3,\*) ' Table of results'

write(3,\*)'-----------------------------'

write(3,\*)' Passo Nr time T(i) '

write(3,\*)'-----------------------------'

write(3,\*)k,time,(tp(l),l=1,n)

write(2,\*)time,tp(1)

write(4,\*)time,tp(2)

ht2=dtau/100

!

! beginning of time loop

!

50 k=k+1

tendi=time+dtau

write(\*,\*)'-------------time=',tendi

if(iflag.eq.0) then ! RK-adaptativo

call odeint(tp,n,time,tendi,1.e-6,ht2,1.e-20,id1,id2,nelmax,fcn,rkqc)

endif

if(iflag.eq.1) then ! RK-passo fixo

kk=0

500 kk=kk+1

tant=time

auxtime=time+ht2

if(tendi.le.auxtime) then

time=tendi

hdif=tendi-tant

else

time=auxtime

hdif=ht2

endif

call rk4ord(tp,n,tant,hdif,fcn,nelmax)

if (time.lt.tendi) goto 500

endif

if(iflag.eq.2) then ! Forward Euler

call fore(n,fcn,time,tp,tendi,nelmax)

endif

write(3,\*)k,tendi,(tp(l),l=1,n)

write(2,\*)tendi,tp(1)

write(4,\*)tendi,tp(2)

if (tendi.lt.tend) then

time=tendi

goto 50

endif

close(2)

close(3)

close(4)

call system('notepad x-all.txt') ! listagem de todas as variaveis

call system('wgnuplot dados.gnu') ! gráfico geral

stop

end

!\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

subroutine fcn(n,t,fi,f,nelmax)

implicit real \*8 (a-h,o-z)

dimension fi(nelmax),f(nelmax)

! Exemplo 7.8 do livro - sistema sub-, critico e superamortecido

zeta=0.1

w\_n=0.1

f(1)=fi(2)

f(2)=w\_n\*\*2\*(-fi(1)-2\*zeta\*fi(2)/w\_n)

return

end

!\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

!234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

subroutine fore(n,fcn,time,fi,tend,nelmax)

!

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (nd1=100)

dimension fi(nelmax),f(nd1)

common /const/ ht2

external fcn

k=0

50 k=k+1

tant=time

auxtime=time+ht2

if(tend.le.auxtime) then

time=tend

hdif=tend-tant

else

time=auxtime

hdif=ht2

endif

call fcn(n,tant,fi,f,nelmax)

do 100 i=1,n

fi(i)=fi(i)+hdif\*f(i)

100 continue

if (time.lt.tend) goto 50

return

end

!------------------------------------------------------------------

**inpaula.txt**

0 ! iflag = 0 (RK-adaptativo), 1 (RK-fixo), 2 (Forward Euler)

2 0. ! n = numero de equacoes, tau0 = tempo inicial

500. 5. ! tend = tempo final, dtau = passo de tempo externo

100. 0. ! tp0(i) = valores iniciais (i=1,n)

**dados.gnu**

set data style linespoints

set grid

set xlabel 't(s)'

set ylabel 'x(t) e xlinha(t)'

set title 'Resposta de sistema de segunda ordem'

plot 'x1.txt','x2.txt'

pause -1

**ode.f90**

subroutine odeint(ystart,nvar,x1,x2,eps,h1,hmin,nok,nbad,nd,derivs,rkqc)

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (maxstp=10000,nmax=100,two=2.0,zero=0.0,tiny=1.d-30)

parameter (nd1=100)

common /path/ kmax,kount,dxsav

dimension ystart(nd),yscal(nd1),y(nd1),dydx(nd1)

external derivs,rkqc

x=x1

h=sign(h1,x2-x1)

nok=0

nbad=0

kount=0

do 11 i=1,nvar

y(i)=ystart(i)

11 continue

if (kmax.gt.0) xsav=x-dxsav\*two

do 16 nstp=1,maxstp

call derivs(nvar,x,y,dydx,nd)

do 12 i=1,nvar

yscal(i)=abs(y(i))+abs(h\*dydx(i))+tiny

12 continue

if ((x+h-x2)\*(x+h-x1).gt.zero) h=x2-x

call rkqc(y,dydx,nvar,x,h,eps,yscal,hdid,hnext,derivs,nd)

if (hdid.eq.h) then

nok=nok+1

else

nbad=nbad+1

endif

if ((x-x2)\*(x2-x1).ge.zero) then

do 14 i=1,nvar

ystart(i)=y(i)

14 continue

return

endif

if (abs(hnext).lt.hmin) then

write(\*,\*) 'stepsize small',hmin

stop

endif

h=hnext

16 continue

write(\*,\*) 'too many steps',nstp

stop

end

!234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

**Rk.f90**

subroutine rkqc(y,dydx,n,x,htry,eps,yscal,hdid,hnext,derivs,nd)

!

! fifth-order RK

!

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (nmax=100, pgrow=-.20,pshrnk=-.25,fcor=1.d0/15.,one=1., safety=.9, errcon=6.e-4,nd2=100)

external derivs

dimension y(nd),dydx(nd),yscal(nd),ytemp(nd2),ysav(nd2),dysav(nd2)

xsav=x

do 11 i=1,n

ysav(i)=y(i)

dysav(i)=dydx(i)

11 continue

h=htry

1 hh=0.5\*h

call rk4(ysav,dysav,n,xsav,hh,ytemp,derivs,nd)

x=xsav+hh

call derivs(n,x,ytemp,dydx,nd)

call rk4(ytemp,dydx,n,x,hh,y,derivs,nd)

x=xsav+h

if (x.eq.xsav) then

write(\*,\*) 'stepsize not significant in rkqc',x

stop

endif

call rk4(ysav,dysav,n,xsav,h,ytemp,derivs,nd)

errmax=0.

do 12 i=1,n

ytemp(i)=y(i)-ytemp(i)

dummy=abs(ytemp(i)/yscal(i))

errmax=max(errmax,dummy)

12 continue

errmax=errmax/eps

if(errmax.gt.one) then

h=safety\*h\*(errmax\*\*pshrnk)

goto 1

else

hdid=h

if (errmax.gt.errcon) then

hnext=safety\*h\*(errmax\*\*pgrow)

else

hnext=4.d0\*h

endif

endif

do 13 i=1,n

y(i)=y(i)+ytemp(i)\*fcor

13 continue

return

end

!---------------------------------------------------------------------

subroutine rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs,nd)

!

! rk4

!

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (nmax=100,nd3=100)

dimension y(nd),dydx(nd),yout(nd),yt(nd3),dyt(nd3),dym(nd3)

external derivs

hh=h\*.5

h6=h/6

xh=x+hh

do 11 i=1,n

yt(i)=y(i)+hh\*dydx(i)

11 continue

call derivs(n,xh,yt,dyt,nd)

do 12 i=1,n

yt(i)=y(i)+hh\*dyt(i)

12 continue

call derivs(n,xh,yt,dym,nd)

do 13 i=1,n

yt(i)=y(i)+h\*dym(i)

dym(i)=dyt(i)+dym(i)

13 continue

call derivs(n,x+h,yt,dyt,nd)

do 14 i=1,n

yout(i)=y(i)+h6\*(dydx(i)+dyt(i)+2\*dym(i))

14 continue

return

end

**rk4ord.f90**

subroutine rk4ord(y,n,x,h,derivs,nd)

!

! rk4

!

implicit real \*8 (a-h,o-z)

parameter (nd3=100)

dimension y(nd),dydx(nd3),yt(nd3),dyt(nd3),dym(nd3)

external derivs

hh=h\*.5

h6=h/6

xh=x+hh

call derivs(n,x,y,dydx,nd)

do 11 i=1,n

yt(i)=y(i)+hh\*dydx(i)

11 continue

call derivs(n,xh,yt,dyt,nd)

do 12 i=1,n

yt(i)=y(i)+hh\*dyt(i)

12 continue

call derivs(n,xh,yt,dym,nd)

do 13 i=1,n

yt(i)=y(i)+h\*dym(i)

dym(i)=dyt(i)+dym(i)

13 continue

call derivs(n,x+h,yt,dyt,nd)

do 14 i=1,n

y(i)=y(i)+h6\*(dydx(i)+dyt(i)+2\*dym(i))

14 continue

return

end

Exemplo 7.9) Aos trabalhos de Lotka (1925) e Volterra (1926, 1931) é atribuído o modelo usado para descrever a dinâmica de sistemas biológicos em que duas espécies interagem, uma como predador e a outra como presa. As populações das duas espécies, a predadora e sua presa são representadas por populações  e , respectivamente. Uma lei exponencial (Malthus, 1798), i.e., , A > 0, determina a taxa de natalidade da presa e sua taxa de mortalidade depende da interação com o predador, i.e., , B > 0. Assim, a taxa de variação da população da presa ao longo do tempo é dada por:

 (7.86)

Assumindo que os predadores dependem da presa para sobreviver, sua taxa de natalidade pode ser expressa por , D > 0, e sua taxa de mortalidade como , C > 0. Portanto, a taxa de variação da população de predadores ao longo do tempo é dada por:

 (7.87)

As Equações (7.86) e (7.87) juntamente com o estabelecimento de condições iniciais definem o seguinte PVI:

 (7.88)

Admitindo que A = 2; B = 2; C = 1, e D = 1, com as condições iniciais  e , apresente a solução do PVI formulado pela Eq. (7.88) para  numericamente na forma de uma tabela, e também graficamente, tal que ETL < 10-6.