Equações Diferenciais Ordinárias

TMEC-001 Cálculo Numérico

Prof. Luciano K. Araki

Introdução

- Equações que são compostas por uma função desconhecida e suas derivadas são chamadas equações diferenciais.
- Essa classe de equações desempenha papel fundamental na engenharia, uma vez que muitos fenômenos físicos são formulados matematicamente em termos de taxas de variação (expressas por derivadas).

Introdução

- Exemplos de Equações Diferenciais:
  - Segunda Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

  - Lei de Fourier (condução de calor em sólidos):

$$q_x = -k\,A\frac{dT}{dx}$$

Introdução

– Difusão de calor em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=m\,c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

– Sistema massa-mola com amortecimento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+k\,x=0$$

Introdução

- As equações diferenciais que envolvem uma única variável independente são chamadas de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

- Caso a equação diferencial envolva duas ou mais variáveis independentes, tem-se uma equação diferencial parcial (EDP).

Introdução

- As equações diferenciais também são classificadas quanto à sua ordem: uma equação diferencial que apresenta derivada mais alta igual à primeira derivada é uma equação de primeira ordem.
- Caso a derivada mais elevada seja uma segunda derivada, a equação é de segunda ordem; e assim por diante.

Introdução

- Em muitos casos, equações de ordem superior podem ser reduzidas a um sistema de equações de primeira ordem.
- Por exemplo, considerando-se o modelo matemático para o sistema massa-mola com amortecimento e definindo-se:

$$y = \frac{dx}{dt}$$

Introdução

- Nesse caso:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- E a equação original pode ser expressa como:

$$m\frac{dy}{dt} + cy + k\,x = 0$$

Introdução

- Neste caso, o par de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} y = \dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{dy}{dt} + cy + k\,x = 0 \end{cases}$$

- É equivalente à equação original de segunda ordem.

Introdução

- As técnicas de solução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e parciais (EDPs) são distintas.

- Nesta disciplina, apenas técnicas utilizadas para EDOs serão abordadas.

Introdução

- Os métodos apresentados a seguir são destinados à solução de EDOs da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

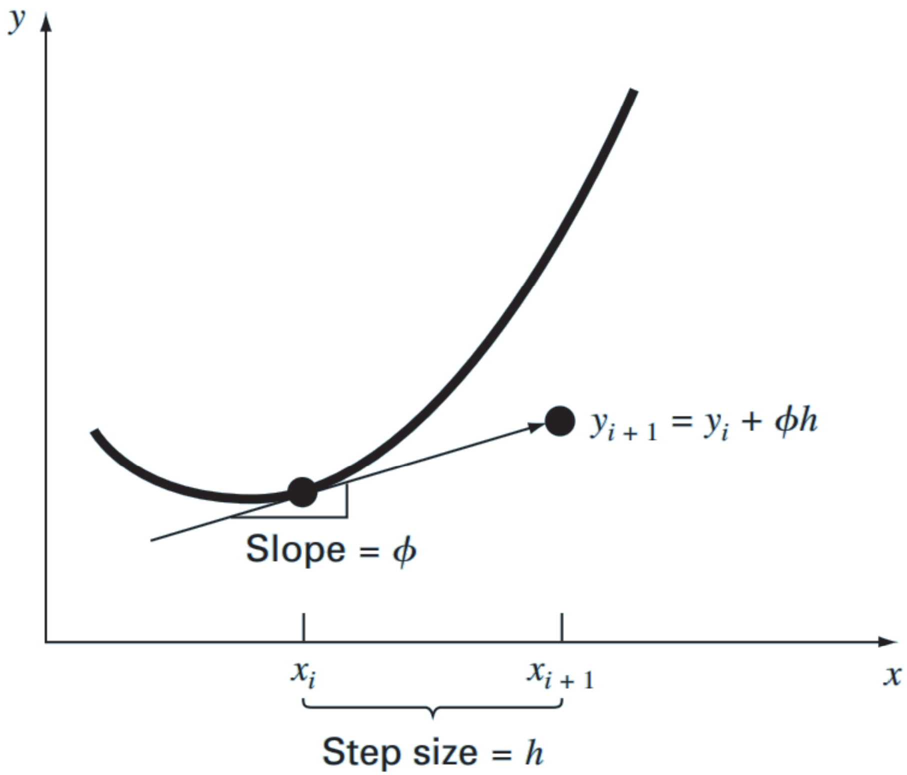
- Para esse tipo de equação, uma proposta de solução pode apresentar a forma geral

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Introdução

- Tal expressão corresponde a:

valor novo = valor antigo + inclinação x passo



Método de Euler

- Método de Euler ou Euler-Cauchy
  - A primeira derivada fornece uma estimativa direta da inclinação em x_i:

$$\phi = f\left(x_i, y_i\right)$$

  - em que $f\,(x_i,\, y_i)$ é a equação diferencial calculada em x_i e y_i.

Método de Euler

– Substituindo-se a estimativa na equação geral obtém-se

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

- Análise de erro para o método de Euler:
  – A solução numérica de EDOs envolve dois tipos de erros, citados a seguir:

Método de Euler

– Erros de truncamento ou de discretização causados pela natureza das técnicas usadas para aproximar os valores de y.
– Erros de arredondamento causados pelo número limitado de algarismos significativos que podem ser representados por um computador

– Os erros de truncamento são compostos por duas partes: a primeira é o erro de truncamento local, que resultad a aplicação do método em questão em um único passo.

Método de Euler

– A segunda é o erro de truncamento propagado, que resulta das aproximações produzidas durante os passos anteriores.

– A soma das duas componentes é o erro de truncamento total ou global.

– Pode ser mostrado que o erro de truncamento global para o método de Euler é O(h), ou seja, proporcional ao tamanho do passo. Assim:

Método de Euler

- O erro pode ser reduzido diminuindo-se o tamanho do passo.
- O método fornecerá previsões livres de erros se a função subjacente (isto é, a solução da equação diferencial) for linear, porque, para uma reta, a segunda derivada é nula.

– Apesar de sua ineficiência, a simplicidade do método de Euler torna-o uma opção extremamente atrativa para muitos problemas de engenharia. Como ele é muito fácil de se programar, a técnica é particularmente útil para análises rápidas.

Método de Euler

- Exemplo 01: Utilize o método de Euler para integrar numericamente a equação:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

de $x = 0$ a $x = 2$, com tamanho de passo de 0,5. A condição inicial é: $x = 0$, $y = 1$. Repita a operação utilizando passo de 0,25. A solução exata é dada pela equação:

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$$

Método de Euler

- Solução: Empregando-se a fórmula geral do método de Euler,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

  - Para h = 0,5:
  - Primeiro passo:

$$y(0{,}5) = y(0) + f(0;1) \cdot 0{,}5$$

    - Sendo:

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ f(0;1) = -2 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 - 20 \cdot 0 + 8{,}5 = 8{,}5 \end{cases}$$

Método de Euler

- Assim:

$$y(0{,}5) = 1 + 8{,}5 \cdot 0{,}5 = 5{,}25$$

– Segundo passo:

$$y(1{,}0) = y(0{,}5) + f(0{,}5; 5{,}25) \cdot 0{,}5$$

- Sendo:

$$\begin{cases} y(0{,}5) = 5{,}25; \\ f(0{,}5; 5{,}25) = -2 \cdot (0{,}5)^3 + 12 \cdot (0{,}5)^2 - 20 \cdot 0{,}5 + 8{,}5 = 1{,}25 \end{cases}$$

Método de Euler

- Assim:

$$y(1{,}0) = 5{,}25 + 1{,}25 \cdot 0{,}5 = 5{,}875$$

– Terceiro passo:

$$y(1{,}5) = y(1{,}0) + f(1{,}0;5{,}875) \cdot 0{,}5$$

- Sendo:

$$\begin{cases} y(1{,}0) = 5{,}875; \\ f(1{,}0;5{,}875) = -2 \cdot (1{,}0)^3 + 12 \cdot (1{,}0)^2 - 20 \cdot 1{,}0 + 8{,}5 = -1{,}5 \end{cases}$$

Método de Euler

- Assim:

$$y(1{,}5) = 5{,}875 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 5{,}125$$

– Quarto passo:

$$y(2{,}0) = y(1{,}5) + f(1{,}5; 5{,}125) \cdot 0{,}5$$

- Sendo:

$$\begin{cases} y(1{,}5) = 5{,}125; \\ f(1{,}5; 5{,}125) = -2 \cdot (1{,}5)^3 + 12 \cdot (1{,}5)^2 - 20 \cdot 1{,}5 + 8{,}5 = -1{,}25 \end{cases}$$

Método de Euler

- Assim:

$$y(2{,}0) = 5{,}125 - 1{,}25 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$$

- Observa-se, assim, que a solução numérica obtida ao se empregar o método de Euler com passo h = 0,5 para x = 2 é igual a 4,5.

- Na sequência, será apresentada a tabela mostrando os valores reais (verdadeiros de y) e os numéricos obtidos com passos h = 0,5 e h = 0,25.

Método de Euler

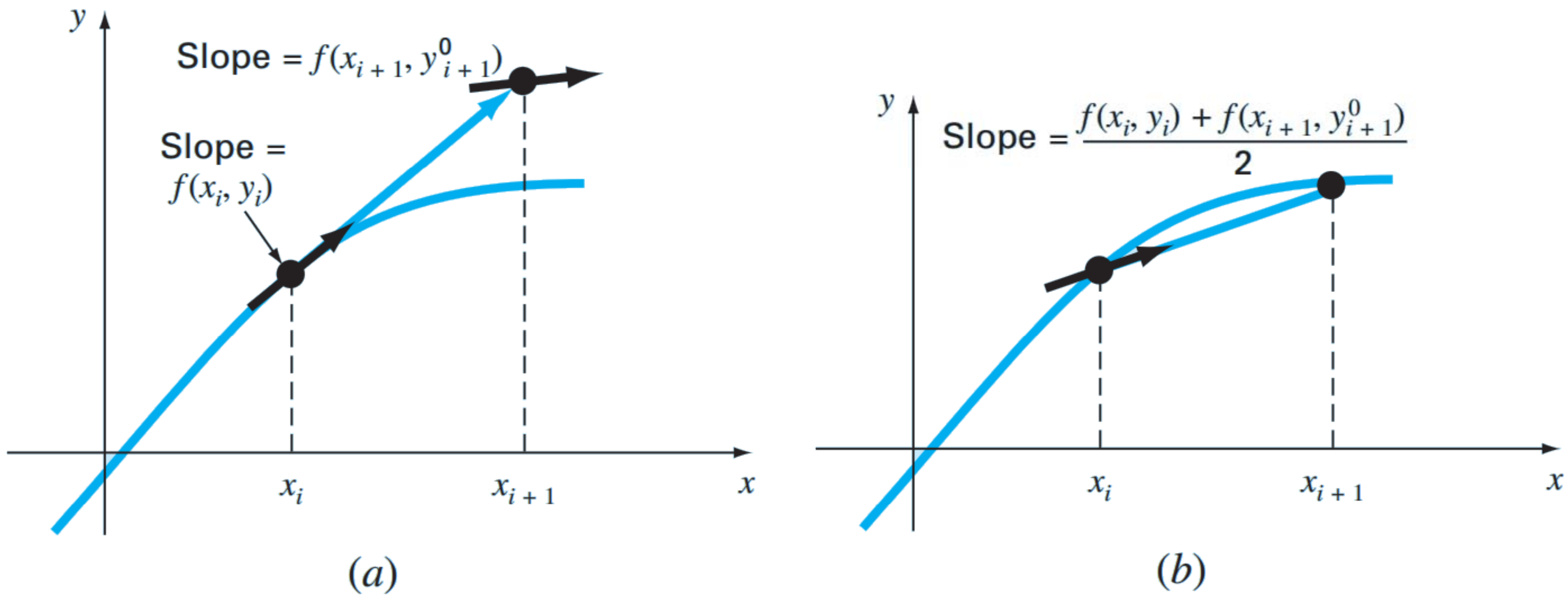
x	y (verdadeiro)	y (h = 0,5)	y (h = 0,25)
0,00	1,000000	1,000000	1,000000
0,25	2,560547		3,125000
0,50	3,218750	5,250000	4,179688
0,75	3,279297		4,492188
1,00	3,000000	5,875000	4,343750
1,25	2,591797		3,968750
1,50	2,218750	5,125000	3,554688
1,75	1,998047		3,242188
2,00	2,000000	4,500000	3,125000

Método de Heun

- Método de Heun
  - Um método de melhorar a estimativa da inclinação envolve a determinação de duas derivadas para o intervalo: uma no ponto inicial e outra no ponto final.
  - Na sequência, é feita uma média para as duas derivadas para se obter uma estimativa melhorada da inclinação no intervalo todo.
  - Tal abordagem é chamada de método de Heun.

Método de Heun

- Método de Heun: (a) Preditor; (b) Corretor



Método de Heun

– No caso do método de Euler, a inclinação no início do intervalo é usada para se obter a estimativa do próximo ponto por extrapolação linear:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

– No método de Heun, esta expressão é chamada de equação preditora.

Método de Heun

– A equação preditora fornece uma estimativa de y_{i+1} que permite, então, avaliar a inclinação na extremidade final do intervalo

$$y'_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)$$

– As duas inclinações podem ser então combinadas, para se obter uma inclinação média no intervalo

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}$$

Método de Heun

– A expressão anterior é, então, usada para extrapolar linearmente de y_i a y_{i+1}, usando-se o método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2} h$$

– Tal expressão é chamada de equação corretora.

Método de Heun

- Sucintamente, tem-se:
  - Preditor:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

  - Corretor:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}h$$

Método de Heun

– Como a equação corretora apresenta y_{i+1} em ambos os lados da igualdade, a mesma pode ser empregada de forma iterativa.

– Nesse caso, o processo iterativo não converge necessariamente para a resposta verdadeira, mas convergirá para uma estimativa com erro de truncamento finito.

Método de Heun

- Exemplo 02: Utilize o método de Heun para integrar numericamente a equação:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

de x = 0 a x = 2, com tamanho de passo de 0,5. A condição inicial é: x = 0, y = 1. Repita a operação utilizando passo de 0,25. A solução exata é dada pela equação:

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$$

Método de Heun

- Solução:
  - Considerando-se h = 0,5
  - Primeiro passo:
    - Preditor:

$$y^0(0{,}5) = y(0) + f(0;1)\cdot 0{,}5$$

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ f(0;1) = -2\cdot 0^3 + 12\cdot 0^2 - 20\cdot 0 + 8{,}5 = 8{,}5 \end{cases}$$

$$y^0(0{,}5) = 1 + 8{,}5\cdot 0{,}5 = 5{,}25$$

Método de Heun

- Corretor:

$$y(0,5) = y(0) + \frac{f(0;1) + f(0,5;5,25)}{2} \cdot 0,5$$

– Sendo:

$$f(0,5;5,25) = -2 \cdot (0,5)^3 + 12 \cdot (0,5)^2 - 20 \cdot (0,5) + 8,5 = 1,25$$

– Assim:

$$y(0,5) = 1 + \frac{8,5 + 1,25}{2} \cdot 0,5 = 3,4375$$

Método de Heun

– Segundo passo:

- Preditor:

$$y^0(1{,}0) = y(0{,}5) + f(0{,}5; 3{,}4375) \cdot 0{,}5$$

$$\begin{cases} y(0{,}5) = 3{,}4375; \\ f(0{,}5; 3{,}4375) = -2 \cdot (0{,}5)^3 + 12 \cdot (0{,}5)^2 - 20 \cdot 0{,}5 + 8{,}5 = 1{,}25 \end{cases}$$

$$y^0(1{,}0) = 3{,}4375 + 1{,}25 \cdot 0{,}5 = 4{,}0625$$

Método de Heun

- Corretor:

$$y(1{,}0) = y(0{,}5) + \frac{f(0{,}5;3{,}4375) + f(1{,}0;4{,}0625)}{2} \cdot 0{,}5$$

– Sendo:

$$f(1{,}0;4{,}0625) = -2\cdot(1{,}0)^3 + 12\cdot(1{,}0)^2 - 20\cdot(1{,}0) + 8{,}5 = -1{,}5$$

– Assim:

$$y(1{,}0) = 3{,}4375 + \frac{1{,}25 - 1{,}5}{2} \cdot 0{,}5 = 3{,}375$$

Método de Heun

x	y (verdadeiro)	y (h = 0,5)	y (h = 0,25)
0,00	1,000000	1,000000	1,000000
0,25	2,560547		2,589844
0,50	3,218750	3,437500	3,273438
0,75	3,279297		3,355469
1,00	3,000000	3,375000	3,093750
1,25	2,591797		2,699219
1,50	2,218750	2,687500	2,335938
1,75	1,998047		2,121094
2,00	2,000000	2,500000	2,125000

Método de Heun

- Nota-se que o método de Heun é um método de segunda ordem, ou seja, o erro global é $O(h^2)$. Assim, o erro decresce a uma taxa mais rápida do que a observada no caso do método de Euler, que é um método de primeira ordem.

Métodos de Runge-Kutta

- Os métodos de Runge-Kutta (RK) alcançam a acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior.
- Há muitas variações, mas todas podem ser postas na forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_{i,} y_i, h)h$$

Métodos de Runge-Kutta

- $\phi(x_i, y_i, h)$ é chamada função incremento, que pode ser interpretada como uma representação da inclinação em um intervalo.
- A função incremento pode ser escrita na forma geral

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$

- sendo os valores de a's constantes.

Métodos de Runge-Kutta

- Os valores de k's, por sua vez, são avaliados através de relações do tipo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\ldots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}
$$

- Sendo os valores de p's e q's constantes.

Métodos de Runge-Kutta

- Observa-se, também, que os valores de k's são obtidos por relações de recorrência, ou seja, k_1 é usado para se avaliar k_2, que é empregado para o cálculo de k_3 e assim por diante.

- O método de Euler, na realidade, corresponde ao método RK de primeira ordem ($n = 1$).

Métodos de Runge-Kutta

- Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem:
  - Procura-se, neste caso, uma expressão do tipo

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

  - No qual

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Os valores de a_1, a_2, p_1 e q_{11} são calculados igualando-se a expressão de y_{i+1} à expansão em série de Taylor até os termos de segundo grau. Ao se fazer isso, deduzem-se três equações para o cálculo das quatro constantes desconhecidas:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 q_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Métodos de Runge-Kutta

- Observa-se, assim ,que existe um número infinito de métodos RK de segunda ordem.
- Deve-se, então, arbitrar o valor para uma das constantes, de modo a se determinar os demais valores.
- São apresentadas a seguir, três das versões mais frequentemente usadas dos métodos RK de segunda ordem.

Métodos de Runge-Kutta

– Método de Heun com um único corretor (a_2 = ½)

- Neste caso, tem-se

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h$$

- Sendo:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Método do ponto médio ($a_2 = 1$)

- Neste caso, tem-se

$$y_{i+1} = y_i + k_2\,h$$

- Sendo:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Método de Ralston (a_2 = 2/3)

- Ralston (1962) e Ralston e Rabinowitz (1978) determinaram que a escolha a_2 = 2/3 fornece um limitante mínimo para o erro de truncamento par aos algoritmos RK de segunda ordem. Neste caso, tem-se

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2 \right) h$$

- Sendo:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4} h, y_i + \frac{3}{4} k_1 h \right)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Exemplo: Utilize os métodos do ponto médio e de Ralston para integrar numericamente a equação

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

de x = 0 a x = 2, com passos h = 0,5 e h = 0,25. Compare os resultados com o método de Heun sem iteração do corretor.

Empregue como valor inicial: para x = 0, y = 1.

Métodos de Runge-Kutta

– Método do ponto médio (h = 0,5)

- Primeiro passo:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0;1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8{,}5 = 8{,}5$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5; 1 + \frac{1}{2}8{,}5 \cdot 0{,}5\right) = f(0{,}25; 3{,}125) =$$

$$= -2(0{,}25)^3 + 12(0{,}25)^2 - 20(0{,}25) + 8{,}5 = 4{,}21875$$

$$y(0{,}5) = y(0) + k_2 h = 1 + 4{,}21875 \cdot 0{,}5 = 3{,}109375$$

Métodos de Runge-Kutta

- Segundo passo:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0{,}5;\ 3{,}109375) = -2(0{,}5)^3 + 12(0{,}5)^2 - 20(0{,}5) + 8{,}5 = 1{,}25$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0{,}5 + \frac{1}{2}0{,}5;\ 3{,}109375 + \frac{1}{2}1{,}25 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f(0{,}75;\ 3{,}886719) = -2(0{,}75)^3 + 12(0{,}75)^2 - 20(0{,}75) + 8{,}5 = -0{,}59375$$

$$y(1{,}0) = y(0{,}5) + k_2 h = 3{,}109375 - 0{,}59375 \cdot 0{,}5 = 2{,}8125$$

- Demais valores serão apresentados na sequência.

Métodos de Runge-Kutta

– Método de Ralston (h = 0,5)

- Primeiro passo:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0;1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8{,}5 = 8{,}5$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{3}{4}0{,}5; 1 + \frac{3}{4}8{,}5 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f(0{,}375; 3{,}1875) =$$

$$= -2(0{,}375)^3 + 12(0{,}375)^2 - 20(0{,}375) + 8{,}5 = 2{,}582031$$

$$y(0{,}5) = y(0) + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h = 1 + \left(\frac{1}{3}8{,}5 + \frac{2}{3}2{,}582031\right)0{,}5 = 3{,}277344$$

Métodos de Runge-Kutta

- Segundo passo:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0{,}5;\ 3{,}277344) = -2(0{,}5)^3 + 12(0{,}5)^2 - 20(0{,}5) + 8{,}5 = 1{,}25$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) = f\left(0{,}5 + \frac{3}{4}0{,}5;\ 3{,}277344 + \frac{3}{4}1{,}25 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f(0{,}875;\ 4{,}242190) =$$

$$= -2(0{,}875)^3 + 12(0{,}875)^2 - 20(0{,}875) + 8{,}5 = -1{,}152344$$

$$y(1{,}0) = y(0{,}5) + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h =$$

$$= 3{,}277344 + \left[\frac{1}{3}1{,}25 + \frac{2}{3}(-1{,}152344)\right]0{,}5 = 3{,}101563$$

Métodos de Runge-Kutta

– Comparação entre os métodos (h = 0,5)

x	y (verdadeiro)	y (Heun)	y (ponto médio)	y (Ralston)
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,5	3,218750	3,437500	3,109375	3,277344
1,0	3,000000	3,375000	2,812500	3,101563
1,5	2,218750	2,687500	1,984375	2,437656
2,0	2,000000	2,500000	1,750000	2,140625

Métodos de Runge-Kutta

– Comparação entre os métodos (h = 0,25):

x	y (verdadeiro)	y (Heun)	y (ponto médio)	y (Ralston)
0,00	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,25	2,560547	2,589844	2,545898	2,568115
0,50	3,218750	3,273438	3,191406	3,232910
0,75	3,279297	3,355469	3,241211	3,299072
1,00	3,000000	3,093750	2,953125	3,024414
1,25	2,591797	2,699219	2,538086	2,619873
1,50	2,218750	2,335938	2,160156	2,249512
1,75	1,998047	2,121094	1,936523	2,030518
2,00	2,000000	2,125000	1,937500	2,033208

Métodos de Runge-Kutta

- Métodos de Runge-Kutta de Quarta Ordem
  - Os métodos RK mais populares são os de quarta ordem (RK-4).
  - Assim como nas abordagens de segunda ordem, existe um número infinito de versões.
  - A versão mais comumente usada é:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Sendo:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Métodos de Runge-Kutta

– Exemplo: Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para integrar

$$f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

Utilizando passo h = 0,5, para x = 0 a x = 2. A condição inicial é $y(0) = 1$. Analogamente, integre

$$f(x,y) = 4e^{0{,}8x} - 0{,}5y$$

Usando h = 0,5 e h = 0,25 com $y(0) = 2$, de x = 0 a x = 0,5.

Métodos de Runge-Kutta

- Primeira função, passo h = 0,5:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) = f\left(0; 1\right) = -2\left(0\right)^3 + 12\left(0\right)^2 - 20\left(0\right) + 8{,}5 = 8{,}5$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5; 1 + \frac{1}{2}8{,}5 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f\left(0{,}25; 3{,}125\right) = -2\left(0{,}25\right)^3 + 12\left(0{,}25\right)^2 - 20\left(0{,}25\right) + 8{,}5 =$$

$$= 4{,}21875$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5; 1 + \frac{1}{2}4{,}21875 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f\left(0{,}25; 2{,}054688\right) = -2\left(0{,}25\right)^3 + 12\left(0{,}25\right)^2 - 20\left(0{,}25\right) + 8{,}5 = 4{,}21875$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) = f\left(0 + 0{,}5; 1 + 4{,}21875 \cdot 0{,}5\right) = f\left(0{,}5; 3{,}109375\right) =$$

$$= -2\left(0{,}5\right)^3 + 12\left(0{,}5\right)^2 - 20\left(0{,}5\right) + 8{,}5 = 1{,}25$$

$$y\left(0{,}5\right) = y\left(0\right) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h =$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\left(8{,}5 + 2 \cdot 4{,}21875 + 2 \cdot 4{,}21875 + 1{,}25\right) \cdot 0{,}5 = 3{,}21875$$

- Nota-se que o resultado é idêntico à solução exata. Isto ocorre pois a solução analítica é um polinômio de quarto grau, de modo de o método RK-4 fornece resultados exatos.

Métodos de Runge-Kutta

- Segunda função, passo h = 0,5:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0;\ 2) = 4e^{0,8\cdot(0)} - 0,5(2) = 3$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0,5;\ 2 + \frac{1}{2}3 \cdot 0,5\right) = f(0,25;\ 2,75) =$$
$$= 4e^{0,8\cdot(0,25)} - 0,5(2,75) = 3,510611$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0,5;\ 2 + \frac{1}{2}3,510611 \cdot 0,5\right) =$$
$$= f(0,25;\ 2,877653) = 4e^{0,8\cdot(0,25)} - 0,5(2,877653) = 3,446785$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right) = f\left(0 + 0{,}5;\ 2 + 3{,}446785 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f\left(0{,}5;\ 3{,}723393\right) = 4e^{0{,}8(0{,}5)} - 0{,}5\left(3{,}723393\right) = 4{,}105602$$

$$y\left(0{,}5\right) = y\left(0\right) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h =$$

$$= 2 + \frac{1}{6}\left(3 + 2 \cdot 3{,}510611 + 2 \cdot 3{,}446785 + 4{,}105602\right) \cdot 0{,}5 = 3{,}751700$$

- A solução verdadeira é igual a 3,751521, de modo que o erro cometido é igual a 0,000179.

Métodos de Runge-Kutta

- Segunda função, passo h = 0,25:
  - Primeiro passo:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0;\ 2) = 4e^{0,8\cdot(0)} - 0,5(2) = 3$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0,25;\ 2 + \frac{1}{2}3\cdot 0,25\right) =$$

$$= f(0,125;\ 2,375) = 4e^{0,8\cdot(0,125)} - 0,5(2,375) = 3,233184$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}0,25;\ 2 + \frac{1}{2}3,233184\cdot 0,25\right) =$$

$$= f(0,125;\ 2,404148) = 4e^{0,8\cdot(0,125)} - 0,5(2,404148) = 3,218610$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) = f(0 + 0{,}25;\ 2 + 3{,}218610 \cdot 0{,}25) =$$

$$= f(0{,}25;\ 2{,}804653) = 4e^{0{,}8(0{,}25)} - 0{,}5(2{,}804653) = 3{,}483285$$

$$y(0{,}25) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h =$$

$$= 2 + \frac{1}{6}(3 + 2 \cdot 3{,}233184 + 2 \cdot 3{,}218610 + 3{,}483285) \cdot 0{,}25 =$$

$$= 2{,}807786$$

– Tem-se, então, o segundo passo.

Métodos de Runge-Kutta

– Segundo passo

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f(0{,}25;\ 2{,}807786) = 4e^{0{,}8\cdot(0{,}25)} - 0{,}5(2{,}807786) = 3{,}481718$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f\left(0{,}25 + \frac{1}{2}0{,}25;\ 2 + \frac{1}{2}3{,}481718 \cdot 0{,}25\right) =$$

$$= f(0{,}375;\ 3{,}243001) = 4e^{0{,}8\cdot(0{,}375)} - 0{,}5(3{,}243001) = 3{,}777935$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) =$$

$$= f\left(0{,}25 + \frac{1}{2}0{,}25;\ 2{,}807786 + \frac{1}{2}3{,}777935 \cdot 0{,}25\right) =$$

$$= f(0{,}375;\ 3{,}280028) = 4e^{0{,}8\cdot(0{,}375)} - 0{,}5(3{,}280028) = 3{,}759421$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) = f(0{,}25 + 0{,}25;\ 2{,}807786 + 3{,}759421 \cdot 0{,}25) =$$

$$= f(0{,}50;\ 3{,}747715) = 4e^{0{,}8(0{,}5)} - 0{,}5(3{,}747715) = 4{,}093441$$

$$y(0{,}5) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h =$$

$$= 2 + \frac{1}{6}(3{,}481718 + 2 \cdot 3{,}777935 + 2 \cdot 3{,}759421 + 3{,}747715) \cdot 0{,}25 =$$

$$= 3{,}751605$$

- A solução verdadeira é igual a 3,751521, de modo que o erro cometido é igual a 0,000084.

Métodos de Runge-Kutta

- Sistemas de EDO's
  - Muitos problemas práticos em engenharia exigem a solução de um sistema simultâneo de EDO's ao invés de uma única equação. Tais sistemas podem ser representados da forma geral por

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Métodos de Runge-Kutta

– A solução do sistema exige que sejam conhecidas n condições iniciais no valor inicial de x.

– Todos os métodos utilizados para uma única equação podem ser estendidos para sistemas de equações simultâneas. Em cada caso, o procedimento para resolver um sistema de equações envolve simplesmente a aplicação da técnica de passo único em todas as equações para cada passo, antes de prosseguir para o próximo passo.

Métodos de Runge-Kutta

- Exemplo: Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dy_1}{dx} = -0{,}5y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0{,}3y_2 - 0{,}1y_1$$

Suponha que em $x = 0$, $y_1 = 4$ e $y_2 = 6$. Integre até $x = 2$ usando passo $h = 0{,}5$.

Métodos de Runge-Kutta

– Primeiro passo:

- Primeiros coeficientes:

$$k_{1,1} = f_1\left(x_i, y_{1i}, y_{2i}\right) = f_1\left(0;\ 4;\ 6\right) = -0{,}5 \cdot 4 = -2$$

$$k_{1,2} = f_2\left(x_i, y_{1i}, y_{2i}\right) = f_2\left(0;\ 4;\ 6\right) = 4 - 0{,}3 \cdot 6 - 0{,}1 \cdot 4 = 1{,}8$$

- Segundos coeficientes:

$$k_{2,1} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h;\ y_{1i} + \frac{1}{2}k_{1,1}h;\ y_{2i} + \frac{1}{2}k_{1,2}h \right) =$$

$$= f_1\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5;\ 4 + \frac{1}{2}\left(-2\right) \cdot 0{,}5;\ 6 + \frac{1}{2}1{,}8 \cdot 0{,}5 \right) =$$

$$= f_1\left(0{,}25;\ 3{,}5;\ 6{,}45\right) = -0{,}5 \cdot 3{,}5 = -1{,}75$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_{2,2} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h;\ y_{1i} + \frac{1}{2}k_{1,1}h;\ y_{2i} + \frac{1}{2}k_{1,2}h \right) =$$

$$= f_2\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5;\ 4 + \frac{1}{2}(-2)\cdot 0{,}5;\ 6 + \frac{1}{2}1{,}8\cdot 0{,}5 \right) =$$

$$= f_2(0{,}25;\ 3{,}5;\ 6{,}45) = 4 - 0{,}3\cdot 6{,}45 - 0{,}1\cdot 3{,}5 = 1{,}715$$

- Terceiros coeficientes:

$$k_{3,1} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h;\ y_{1i} + \frac{1}{2}k_{2,1}h;\ y_{2i} + \frac{1}{2}k_{2,2}h \right) =$$

$$= f_1\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5;\ 4 + \frac{1}{2}(-1{,}75)\cdot 0{,}5;\ 6 + \frac{1}{2}1{,}715\cdot 0{,}5 \right) =$$

$$= f_1(0{,}25;\ 3{,}5625;\ 6{,}42875) = -0{,}5\cdot 3{,}5625 = -1{,}78125$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_{3,2} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h;\ y_{1i} + \frac{1}{2}k_{2,1}h;\ y_{2i} + \frac{1}{2}k_{2,2}h\right) =$$

$$= f_2\left(0 + \frac{1}{2}0{,}5;\ 4 + \frac{1}{2}(-1{,}75)\cdot 0{,}5;\ 6 + \frac{1}{2}1{,}715\cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f_2(0{,}25;\ 3{,}5625;\ 6{,}42875) = 4 - 0{,}3\cdot 6{,}42875 - 0{,}1\cdot 3{,}5625 = 1{,}715125$$

- Quartos coeficientes

$$k_{4,1} = f_1(x_i + h;\ y_{1i} + k_{3,1}h;\ y_{2i} + k_{3,2}h) =$$

$$= f_1(0 + 0{,}5;\ 4 + (-1{,}78125)\cdot 0{,}5;\ 6 + 1{,}715125\cdot 0{,}5) =$$

$$= f_1(0{,}5;\ 3{,}109375;\ 6{,}857563) = -0{,}5\cdot 3{,}109375 = -1{,}554688$$

Métodos de Runge-Kutta

$$k_{4,2} = f_2\left(x_i + h;\ y_{1i} + k_{3,1}h;\ y_{2i} + k_{3,2}h\right) =$$

$$= f_2\left(0 + 0{,}5;\ 4 + (-1{,}78125)\cdot 0{,}5;\ 6 + \frac{1}{2}1{,}715125\cdot 0{,}5\right) =$$

$$= f_2\left(0{,}5;\ 3{,}109375;\ 6{,}857593\right) =$$

$$= 4 - 0{,}3\cdot 6{,}857593 - 0{,}1\cdot 3{,}109375 = 1{,}631794$$

- Assim:

$$y_1(0{,}5) = y_1(0) + \frac{1}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right)h =$$

$$= 4 + \frac{1}{6}\left[-2 + 2\cdot(-1{,}75) + 2\cdot(-1{,}78125) - 1{,}554688\right]\cdot 0{,}5 =$$

$$= 3{,}115234$$

Métodos de Runge-Kutta

$$y_2(0{,}5) = y_2(0) + \frac{1}{6}\left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right)h =$$

$$= 6 + \frac{1}{6}\left[1{,}8 + 2\cdot 1{,}715 + 2\cdot 1{,}715125 + 1{,}631794\right]\cdot 0{,}5 = 6{,}857670$$

– Assim, a solução ao fim do primeiro passo é:

$$\begin{cases} y_1(0{,}5) = 3{,}115234 \\ y_2(0{,}5) = 6{,}857670 \end{cases}$$

Métodos de Runge-Kutta

– Tabela de resultados:

x	y_1	y_2
0,0	4,000000	6,000000
0,5	3,115234	6,857670
1,0	2,426171	7,632106
1,5	1,889523	8,326886
2,0	1,471577	8,946865

Métodos de Runge-Kutta

- Equações diferenciais ordinárias de ordem superior
  - Na engenharia, é comum que sejam encontradas equações diferenciais de ordem m escritas na forma

$$u^{(m)} = f\left(x, u, u', u'', \ldots, u^{(m-1)}\right)$$

  - Por exemplo: $u''' = f\left(x, y, y', y''\right) = x^2 + y^2 + \sin\left(x + y\right) - y''$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

Métodos de Runge-Kutta

– Nesses casos, pode-se transformar a equação de ordem m em um sistema de m equações de ordem 1, por meio de mudanças de variáveis:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = u \\
&z_1' = u' = z_2 \\
&z_2' = u'' = z_3 \\
&z_3' = u''' = z_4 \\
&\ldots \\
&z_{m-1}' = u^{(m-1)} = z_m \\
&z_m' = u^{(m)} = f\left(x, u, u', \ldots, u^{(m-1)}\right)
\end{aligned}
$$