Introdução / Motivação / Revisão Matemática

TMEC-001 Cálculo Numérico

Prof. Luciano K. Araki

Modelagem matemática

- Um modelo matemático pode ser definido, de forma geral, como uma fórmula ou equação que expressa características essenciais de um sistema ou processo físico em termos matemáticos.
- Em termos gerais, pode ser representado como

$$\begin{array}{c}\text{variável}\\\text{dependente}\end{array} = f\left(\begin{array}{c}\text{variáveis}\\\text{independentes}\end{array} \quad \text{parâmetros} \quad \begin{array}{c}\text{termos}\\\text{forçantes}\end{array}\right)$$

Modelagem matemática

- A expressão matemática pode variar desde uma única equação algébrica até um sistema de equações diferenciais. Exemplos:
  - Segunda Lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m}$$

  - Equação da difusão do calor:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q} = m\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

Modelagem matemática

- Características típicas de modelos matemáticos do mundo físico:
  - Descrição de um processo ou sistema natural em termos matemáticos.
  - Idealização e simplificação da realidade.
  - Produção de resultados que podem ser reproduzidos e, consequentemente, usados para propósitos de revisão.

Razões para o estudo de métodos numéricos

- São ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas. São capazes de lidar com um grande número de equações, não-linearidades e geometrias complexas.
- O uso inteligente de ferramentas comerciais depende do conhecimento da teoria básica fundamental dos métodos numéricos.

Revisão matemática

- Definição: Uma função f definida em um conjunto real X de números reais tem o limite L em x_0 escrito por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $x \in X$ e

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

Revisão matemática

- Definição: Seja f uma função definida em um conjunto X de números reais e $x_0 \in X$. Então, f é contínua em x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

A função f é contínua no conjunto X se ela for contínua para cada valor de X.

Revisão matemática

- Definição: Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência infinita de números reais ou complexos. A sequência em questão tem o limite x (converge para x) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número positivo inteiro $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ sempre que $n > N(\varepsilon)$. A notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{ou} \quad x_n \to x \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

significa que a sequência converge para x.

Revisão matemática

- Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0. A função f é diferenciável em x_0 se

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. O valor de $f'(x_0)$ é chamado de derivada de f em x_0. Uma função que tem uma derivada para cada valor do conjunto X é dita diferenciável em X.

Revisão matemática

- Definição: Seja E um conjunto e K um corpo. Vamos supor que em E esteja definida uma operação de adição

$$(x, y) \in E \times E \quad \rightarrow \quad x + y \in E$$

e que esteja definida uma operação entre os elementos de K e os elementos de E (chamada multiplicação por escalar):

$$(\alpha, x) \in K \times E \quad \rightarrow \quad \alpha x \in E$$

Revisão matemática

Então E é um K-espaço vetorial em relação a essas operações, se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

A1) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in E$

A2) $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E$

A3) $\exists \Theta \ (\text{vetor nulo}) \in E \mid x + \Theta = \Theta + x = x, \quad \forall x \in E$

A4) $\forall x \in E, \quad \exists - x \in E \mid x + (- x) = \Theta$

M1) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall x, y \in E$

Revisão matemática

M2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall x \in E$

M3) $(\alpha \beta)x = (\alpha \beta x), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall x \in E$

M4) $1x = x, \quad \forall x \in E$

Revisão matemática

- Definição: Seja E um espaço vetorial real. Sejam x, y elementos de E. Chama-se produto escalar (ou produto interno) de x por y − em símbolo (x,y) − qualquer função definida em $E \times E$ com valores em R, satisfazendo as seguintes propriedades:

  P1) $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in E$

  P2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \forall x, y, z \in E$

Revisão matemática

P3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall \lambda \in R, \quad \forall x, y \in E$

P4) $(x, x) \geq 0 \quad \text{e} \quad (x, x) = 0 \quad \text{se e somente se } x = \Theta \ (\text{vetor nulo})$

Um espaço vetorial real E em que está definido um produto escalar é chamado espaço vetorial eucilidiano real.

Revisão matemática

- Definição: Chama-se norma de um vetor x – em símbolo, $\|x\|$ – qualquer função definida em um espaço vetorial E, com valores em R, satisfazendo às seguintes condições:

N1) $\|x\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e somente se } x = \Theta \; (\text{vetor nulo})$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{para todo escalar } \lambda$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{desigualdade triangular})$

Um espaço vetorial E onde está definida uma norma é chamado de espaço vetorial normado.

Revisão matemática

Sejam $E = R^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$. Pode-se definir, então, como normas no R^n:

a) $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

b) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

c) $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$

Revisão matemática

- Definição: Duas normas $\|\bullet\|_a$ e $\|\bullet\|_b$ são equivalentes se existem constantes k_1 e k_2 tais que

$$k_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq k_2\|x\|_a, \quad \forall x \in E$$

Revisão matemática

- Definição: Chama-se norma de uma matriz A – em símbolo, $\|A\|$ – qualquer função definida no espaço vetorial das matrizes $n \times n$, com valores em R, satisfazendo as seguintes condições:

M1) $\|A\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|A\| = 0 \quad \text{se e somente se } A = \Theta \quad (\text{matriz nula})$

M2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \text{para todo escalar } \lambda$

M3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{desigualdade triangular})$

Revisão matemática

Seja A uma matriz $n \times n$. Definem-se:

a) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma linha)

b) $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma coluna)

c) $\|A\|_{E1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ (norma euclediana)

Aproximações e erros de arredondamento

- Algarismos significativos:
  - O conceito de algarismo significativo foi desenvolvido para designar formalmente a confiabilidade de um valor numérico.
  - Algarismos significativos de um número são aqueles que podem ser usados com confiança. Correspondem ao número de algarismos corretos mais um estimado.

Aproximações e erros de arredondamento

- O conceito de algarismos significativos tem duas implicações importantes no estudo de métodos numéricos:
  - Os métodos numéricos fornecem resultados aproximados. É necessário, portanto, desenvolver critérios para especificar quanta confiança se tem no resultado aproximado.
  - Embora quantidades como π e 1/3 representem quantidades específicas, elas não podem ser expressas exatamente por um número limitado de algarismos.

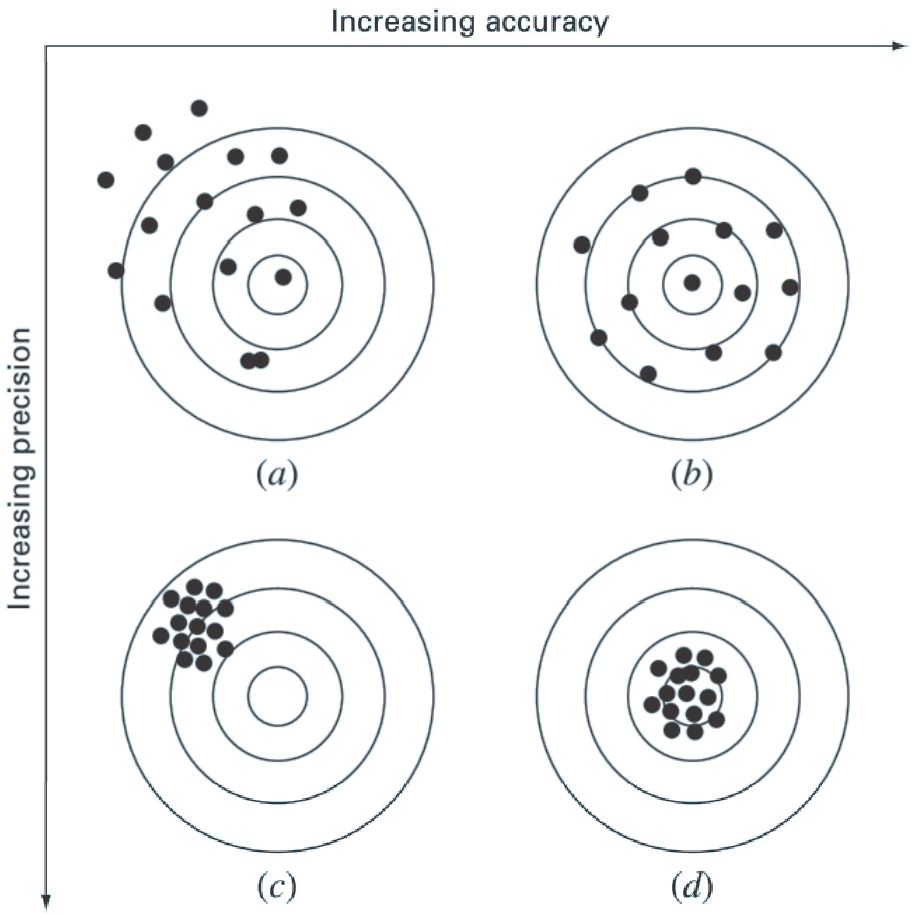
Aproximações e erros de arredondamento

– Como os computadores mantêm apenas um número finito de algarismos significativos, tais números jamais podem ser representados exatamente.

– A omissão dos algarismos significativos remanescentes é chamada de erro de arredondamento.

Aproximações e erros de arredondamento

- Acurácia e precisão:



  - A acurácia se refere a quão próximo o valor calculado ou medido está do valor verdadeiro.
  - A precisão se refere a quão próximos os valores individuais ou medidos estão uns dos outros.

Aproximações e erros de arredondamento

- Erros numéricos são causados pelo uso de aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas. Incluem erros de truncamento e erros de arredondamento.

  – Erros de truncamento resultam quando são feitas aproximações para representar procedimentos matemáticos exatos.

Aproximações e erros de arredondamento

– Erros de arredondamento aparecem quando números com uma quantidade limitada de algarismos significativos são usados para representar números exatos.

– A relação entre o resultado exato ou verdadeiro e a aproximação pode ser formulada como

$$\text{valor verdadeiro} = \text{aproximação} + \text{erro}$$

Aproximações e erros de arredondamento

– Tem-se, assim:

- Valor exato do erro (E_t):

$$E_t = \text{valor verdadeiro} - \text{aproximação}$$

- Erro relativo verdadeiro (ε_t):

$$\varepsilon_t = \frac{\text{erro verdadeiro}}{\text{valor verdadeiro}}$$

- Aproximação do erro relativo verdadeiro (ε_a):

$$\varepsilon_a = \frac{\text{erro aproximado}}{\text{aproximação}} \approx \frac{\text{aproximação atual} - \text{aproximação anterior}}{\text{aproximação atual}}$$

Aproximações e erros de arredondamento

- Representação dos números no computador
  - A unidade fundamental na qual a informação é armazenada é chamada palavra, entidade que consiste de uma sequência de dígitos binários (bits).
  - Os números são tipicamente armazenados em uma ou mais palavras.
  - Um mesmo número pode ser expresso em diferentes bases ou sistemas numéricos, bem como em diferentes notações.

Aproximações e erros de arredondamento

– Representação geral de um número em qualquer base:

$$Z_\alpha = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0 , b_1 b_2 \ldots b_n$$

sendo $\alpha \in N$ a base em que o número Z está representado, os dígitos a representam a parte inteira do número e os dígitos b a parte fracionária.

Aproximações e erros de arredondamento

- Representação inteira:
  - A abordagem mais direta é chamada de método dos valores com sinal e utiliza o primeiro bit de uma palavra para indicar o sinal, com 0 para positivo e 1 para negativo. Os bits restantes são usados para armazenar o número.

Aproximações e erros de arredondamento

- Representação em ponto flutuante:
  - As quantidades fracionárias são representadas tipicamente em computadores usando-se a forma de ponto flutuante. Nessa abordagem o número é expresso como uma parte fracionária, chamada de mantissa ou significando, e uma parte inteira, chamada de expoente ou característica, como em

$$m \times \alpha^{e}$$

sendo m a mantissa, α a base do sistema numérico empregado e e o expoente.

Aproximações e erros de arredondamento

– A mantissa normalmente encontra-se normalizada, ou seja, apresenta o algarismo dominante nulo:

$$\frac{1}{\alpha} \leq m < 1$$

– Divisão da palavra de 32 bits para a representação em ponto flutuante:

- 1 bit: sinal do expoente;
- 7 bits: módulo do expoente;
- 1 bit: sinal da mantissa;
- 23 bits: módulo da mantissa.

Aproximações e erros de arredondamento

– Exemplo: Criar um conjunto de números hipotéticos em ponto flutuante para uma máquina que armazena informação usando palavras de 7 bits. Usar o primeiro bit para o sinal do número, os próximos três para o sinal e o módulo do expoente e os últimos três para o módulo da mantissa.

– Solução: O menor número positivo é dado por:

01**11100**, sendo:

Aproximações e erros de arredondamento

- 0: sinal do número (+);
- 1: sinal do expoente (–);
- **11**: módulo do expoente;
- **100**: módulo da mantissa.

– Para o expoente, tem-se $(\mathbf{11})_2 = 1x2^2 + 1x2^1 = (3)_{10}$

– Para a mantissa, apesar de haver valores que eventualmente sejam menores (001, 010, 011), tais valores não estão normalizados e por isso são descartados.

– Para $(\mathbf{100})_2 = 1x2^{-1} + 0x2^{-2} + 0x2^{-3} = (0,5)_{10}$

Aproximações e erros de arredondamento

– Dessa forma, tem-se que o menor número positivo possível é $0,5 \times 2^{-3} = 0,0625$ no sistema decimal.

– Os próximos valores exatos representados nessa máquina são:

- 01**11101** = $(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3})\ \times2^{-3} = (0,078125)_{10}$;
- 01**11110** = $(1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3})\ \times2^{-3} = (0,093750)_{10}$;
- 01**11111** = $(1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 1\times2^{-3})\ \times2^{-3} = (0,109375)_{10}$;
- 01**10100** = $(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 0\times2^{-3})\ \times2^{-2} = (0,125000)_{10}$;
- 01**10101** = $(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3})\ \times2^{-2} = (0,156250)_{10}$;
- 01**10110** = $(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 0\times2^{-3})\ \times2^{-2} = (0,187500)_{10}$.

Aproximações e erros de arredondamento

– O maior valor representado nessa máquina é dado por 0011111 = $(1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3})\ x2^{3} = (7)_{10}$.

- Aspectos da representação em ponto flutuante que são significativos com relação a erros de arredondamento em um computador:
  – Existe apenas um número finito de quantidades que podem ser representadas dentro do intervalo, ou seja, o grau de precisão é limitado.

Aproximações e erros de arredondamento

– Existe um intervalo limitado de quantidades que podem ser representadas.

– Números maiores que o maior valor representável originam o erro de *overflow*.

– Por sua vez, caso as quantidades estejam entre o valor nulo e o primeiro valor possível de ser representado, tem-se o chamado *underflow*.

Aproximações e erros de arredondamento

- Operações aritméticas comuns:
  - Soma: deve-se deslocar a vírgula da mantissa do menor dos termos para a esquerda um número de posições igual à diferença entre os expoentes dos valores somados. Exemplo:

$$0{,}1551\times10^{1}+0{,}4381\times10^{-1}=$$

$$=0{,}1551\times10^{1}+0{,}004381\times10^{1}=$$

$$=0{,}159481\times10^{1}\approx0{,}1594\times10^{1}\quad(\text{se usado truncamento})$$

Aproximações e erros de arredondamento

– Subtração: deve-se proceder de forma semelhante à soma; nota-se, contudo, que dependendo dos valores envolvidos, há a necessidade de normalização do resultado. Exemplo:

$$
\begin{aligned}
&36{,}41 - 26{,}86 = \\
&= 0{,}3641 \times 10^{2} - 0{,}2686 \times 10^{2} = \\
&= 0{,}0955 \times 10^{2} \approx 0{,}9550 \times 10^{1}
\end{aligned}
$$

Neste caso, foi adicionado um zero não significativo ao final da mantissa.

Aproximações e erros de arredondamento

– Ao se subtrair dois números muito próximos, a perda de algarismos significativos pode ser mais acentuada. Exemplo:

$$764{,}2 - 764{,}1 =$$

$$= 0{,}7642 \times 10^{3} - 0{,}7641 \times 10^{3} =$$

$$= 0{,}001 \times 10^{3} \approx 0{,}1000 \times 10^{0}$$

Neste caso, três dos quatro algarismos da mantissa são não significativos.

Aproximações e erros de arredondamento

- Perda de algarismos significativos:
  - Eventualmente, torna-se necessário realizar manipulações matemáticas para se evitar e/ou reduzir a perda de algarismos significativos.
  - Exemplo: empregando-se truncamento e 4 algarismos significativos, deseja-se avaliar a seguinte expressão, com x pequeno:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

Aproximações e erros de arredondamento

Supondo-se $x = 0{,}1000 \times 10^{-1}$

Tem-se $x^2 = x\,x = 0{,}1000 \times 10^{-3}$

E $x^2 + 1 = 0{,}1000 \times 10^{-3} + 1 = 0{,}1000 \times 10^{-3} + 0{,}1000 \times 10^{1} =$

$$= 0{,}10001 \times 10^{1} \approx 0{,}1000 \times 10^{1}$$

Assim $\sqrt{x^2 + 1} = 0{,}1000 \times 10^{1}$

E por fim:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0{,}0000 \times 10^{0}$$

Aproximações e erros de arredondamento

– Manipulação de y:

$$y = \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1^2}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Nesse caso, $x^2 = x\,x = 0{,}1000\times 10^{-3}$

e $\quad y = \sqrt{x^2+1}+1 = 0{,}2000\times 10^{1}$

Assim: $y = 0{,}5000\times 10^{-5}$

Solução real: $y \approx 0{,}499988\times 10^{-5}$

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Série de Taylor:
  - A série de Taylor fornece um meio para prever o valor da função em um ponto em termos da função e suas derivadas em outro ponto.
  - Se a função f e suas n + 1 primeiras derivadas forem contínuas em um intervalo contendo a e x, então o valor da função em x é dado por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

– O resto é definido por

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

– Uma formulação alternativa para o resto pode ser obtida empregando-se o teorema do valor médio para a integral

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+a)^{n+1}$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

– Em geral, é conveniente simplificar a série de Taylor definindo um tamanho de passo $h = x - a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

– No caso do uso da série de Taylor, os erros de truncamento são da ordem de $n + 1$, ou seja,

$$R_n = O\left(h^{n+1}\right)$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Teorema de Leibniz: Seja uma série infinita

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots$$

  – Estritamente alternada;
  – Em que cada termo é menor, em módulo, do que o termo precedente;
  – O limite dos termos é zero

Então a série possui soma finita.

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Ordens de convergência
  - Para encontrar a resposta aproximada de um problema por um procedimento numérico, um código deve gerar uma sequência de números que se aproxime da resposta correta. Matematicamente deseja-se que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

em que a sequência $\{x_n\}$ converge para o número real x, se dado $\varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in Z^+$ tal que $\left| x - x_n \right| < \varepsilon,\, n \geq n_0$

Erros de truncamento e séries de Taylor

– Além de ser necessário um procedimento numérico que apresente uma sequência convergente, é importante saber, se possível *a priori*, qual a rapidez com que tal procedimento levará a uma resposta aproximada suficientemente precisa.

– Define-se, então, o conceito de ordem de convergência como indicador de uma sequência lenta ou rápida.

Erros de truncamento e séries de Taylor

– Exemplo: A equação

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

define o número irracional e (constante de Euler). Se for utilizada a sequência

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

em um computador, $x_1 = 2$. Prosseguindo-se os cálculos, verifica-se que para $n = 1000$ tem-se o valor $x_{1000} = 2{,}716924$.

Erros de truncamento e séries de Taylor

Nota-se, assim, que a série possui convergência lenta, uma vez que o erro de x_{1000}, quando comparado ao valor exato é de aproximadamente 0,00136...

– Exemplo: Considerando-se a sequência

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

Verifica-se que ao se realizar os cálculos em um computador, $x_1 = 2$ e $x_4 = 1{,}414216$. Assim, a resposta aproximada calculada por esta sequência se aproxima rapidamente do valor exato da resposta esperada, isto é, 1,41421356...

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Grande “O” e pequeno “o”
  - Uma técnica bastante comum de se verificar a rapidez com que uma sequência converge para um determinado valor é conhecida como metodologia do grande “O” e do pequeno “o”.
  - Avalia-se a taxa de convergência de uma sequência qualquer a partir da comparação direta com outra sequência cuja taxa de convergência é conhecida.

Erros de truncamento e séries de Taylor

– Sejam $\{x_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ duas sequências diferentes, de características matemáticas semelhantes, em que se conhece a taxa de convergência de $\{\alpha_n\}$. Para avaliar a taxa de convergência de $\{x_n\}$, consideram-se duas possibilidades:

1. $x_n = O(\alpha_n)$

   se houver constantes c_1 e c_2 tal que $|x_n| \leq c_1 |\alpha_n|$, quando $n \geq c_2$. Então, se $\alpha_n \neq 0$ para todo n, então $\left|\dfrac{x_n}{\alpha_n}\right|$ permanece limitada quando $n \to \infty$.

Erros de truncamento e séries de Taylor

2. $x_n = o(\alpha_n)$

   significa que $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_n}{\alpha_n} \right) = 0.$

Neste caso, pode-se afirmar que:

– Se $x_n = O(\alpha_n)$, então x_n converge para zero pelo menos tão rapidamente quanto α_n.

– Se $x_n = o(\alpha_n)$, então x_n converge para zero mais rapidamente que α_n.

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Estabilidade e condicionamento
  - O condicionamento de um problema matemático se relaciona com sua sensibilidade a variações em seus valores de entrada.
  - Diz-se que um cálculo é numericamente instável se as incertezas dos valores de entrada são brutalmente aumentadas pelo método numérico.
  - O número de condicionamento pode ser definido como uma razão entre erros relativos:

$$\textit{número de condicionamento} = \frac{\tilde{x}\, f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

– O número de condicionamento fornece uma medida da extensão pela qual uma incerteza em x é ampliada por $f(x)$.

– Exemplo: Calcular e interpretar o número de condicionamento para

$$f(x) = \tan x, \quad \text{para} \quad \tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \tan x, \quad \text{para} \quad \tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}01\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Erros de truncamento e séries de Taylor

- Para a função dada, o número de condicionamento é calculado como

$$\textit{número de condicionamento} = \frac{\tilde{x}\sec^2\tilde{x}}{\tan\tilde{x}}$$