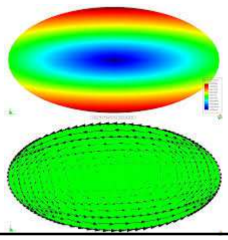
VIII. FORMULAÇÃO EM TORÇÃO

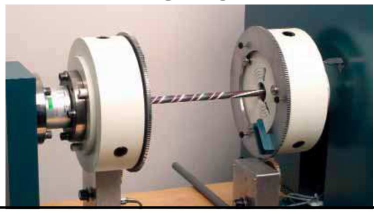
Prof. Dr. Julio Almeida

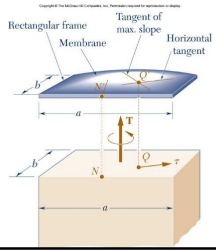
Universidade Federal do Paraná

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

PGMEC



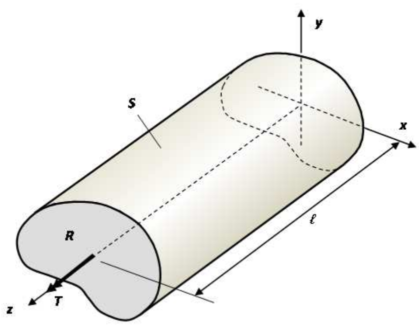




1

PREMISSAS

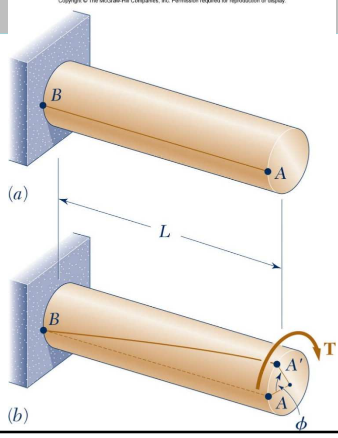
- cada secção rotaciona como um corpo rígido em torno do seu eixo central



2

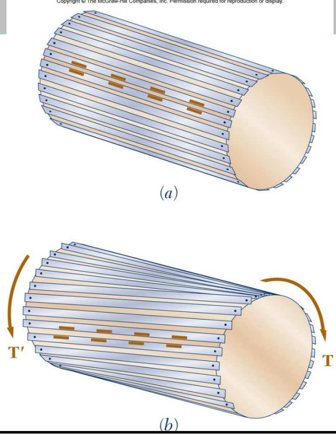
PREMISSAS

- pela teoria das pequenas deformações, a quantidade de rotação é função <u>linear</u> da coordenada axial



PREMISSAS

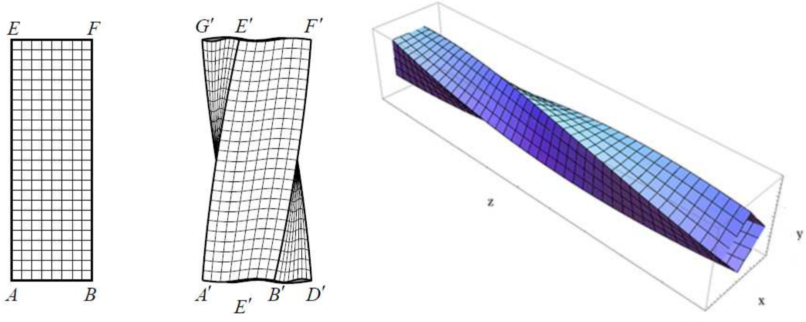
- devido a simetria e no caso de secções circulares, a secção permanece plana após a deformação



ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

PREMISSAS

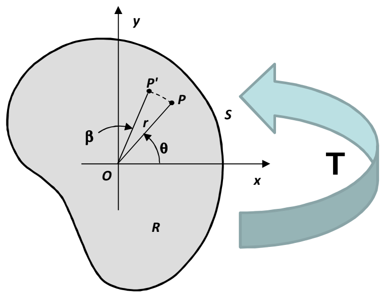
- para secções transversais não circulares, devido aos deslocamentos de <u>empenamento</u>, as secções não permanecem planas quando deformadas



5

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

SECÇÃO TRANSVERSAL TÍPICA



....

O = centro de torção

6

DEFORMAÇÕES EM TORÇÃO

$$u = -\alpha yz$$

$$\mathrm{v} = \alpha xz$$

$$w = w(x, y)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad e_y = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = 0 \qquad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

α = ângulo de torção por unidade de comprimento

DEFORMAÇÕES EM TORÇÃO

$$u = -\alpha yz$$

$$\mathrm{v} = \alpha xz$$

$$w = w(x, y)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right) = 0$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)$$

TENSÕES DE TORÇÃO

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)$$

→ observar que tanto tensões quanto deformações são funções das coordenadas "x" e "y" apenas

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

- supondo forças de corpo nulas:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)\right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)\right]$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right) \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -\mu\alpha$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right) \Rightarrow \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \mu\alpha$$

Logo:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu\alpha$$

FUNÇÃO TENSÃO DE PRANDTL (ϕ)

- visando reduzir o par acoplado entre a equação de equilíbrio e a equação de compatibilidade, pode se considerar (<u>ϕ = função tensão</u>):

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\mu\alpha$$

Equação de *Poisson*

CONDIÇÕES DE CONTORNO

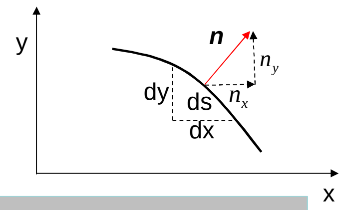
em S:

$$\vec{T}_x^{\,n} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0$$

$$\vec{T}_y^{\,n} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = 0$$

$$\vec{T}_z^{\,n} = \boxed{\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y} + \sigma_z n_z = 0$$

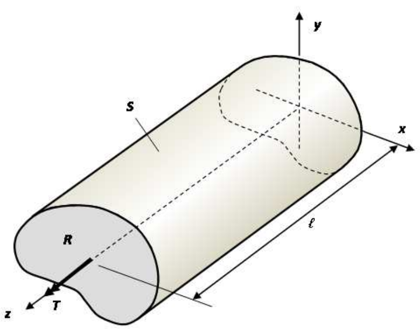
$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0$$



....

dφ/ds = 0 ⇒ a função tensão deve ser uma constante ao redor da superfície S.

CONDIÇÕES DE CONTORNO - EXTREMIDADES



$$n_x = n_y = 0$$

$$n_z = \pm 1$$

$$\vec{T}_x^{\,n} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0$$

$$\vec{T}_y^{\,n} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = 0$$

$$\vec{T}_z^{\,n} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = 0$$

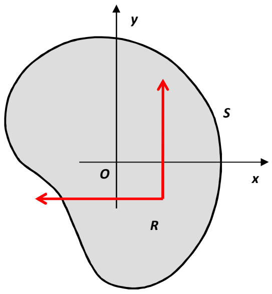
$$T_x^{\,n} = \pm \tau_{zx}$$

$$T_y^{\,n} = \pm \tau_{zy}$$

$$T_z^{\,n} = 0$$

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

ESFORÇOS EXTERNOS



$$P_x = P_y = P_z = 0$$

$$M_x = M_y = 0$$

$$T = M_z = \iint (xT_y^{\ n} - yT_x^{\ n})dxdy$$

$$T = \iint (x\left(\frac{-\partial\phi}{\partial x}\right) + y\frac{\partial\phi}{\partial y})dxdy$$

15

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

ESFORÇOS EXTERNOS

Pelo Teorema de Green:

$$\Rightarrow \iint (x\frac{\partial\phi}{\partial x})dxdy = \cancel{\oint_S x\phi\vec{n}_x dS} - \iint_R \phi dxdy$$

$$\Rightarrow \iint (y\frac{\partial\phi}{\partial y})dxdy = \cancel{\oint_S y\phi\vec{n}_y dS} - \iint_R \phi dxdy$$

$$\boxed{T = 2\iint_R \phi dxdy}$$

16

FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTO

$$\tau_{xz}\vec{n}_x + \tau_{yz}\vec{n}_y = 0$$

....

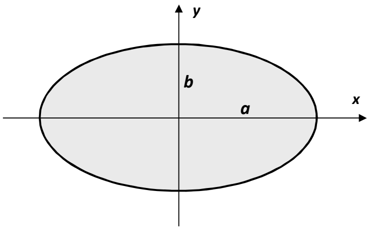
RIGIDEZ TORCIONAL

$$T = \alpha J$$

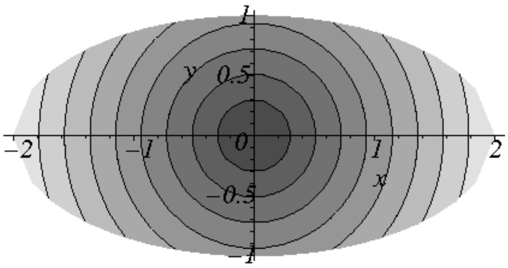
$$J = \mu \iint_R \left(x^2 + y^2 + \frac{x}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{y}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial x} \right) dxdy$$

EXEMPLO 01

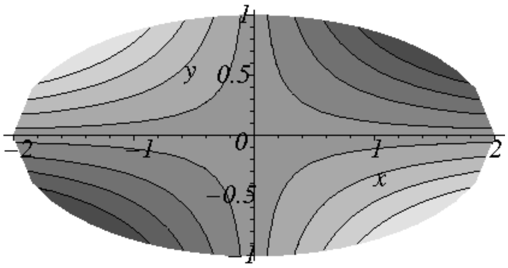
Determinar o campo de deslocamento e as tensões correspondentes a uma secção elíptica em torção.



EXEMPLO 01 - resultados



contorno da função tensão

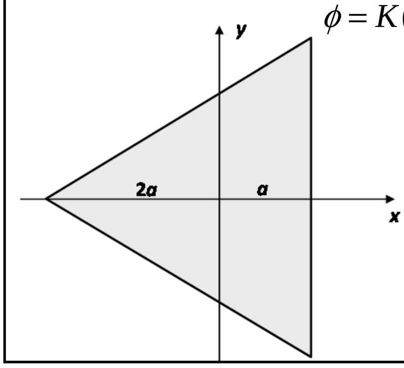


contorno dos deslocamentos

EXEMPLO 02

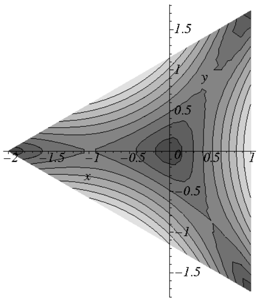
Determinar o campo de deslocamento e as tensões correspondentes a uma secção triangular equilátera. Supor a função tensão na forma:

$$\phi = K(x-\sqrt{3}y+2a)(x+\sqrt{3}y+2a)(x-a)$$

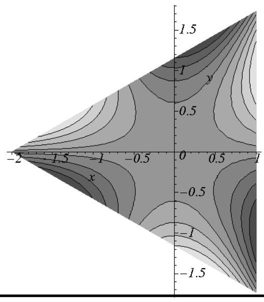


ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

EXEMPLO 02 - resultados



contorno da função tensão

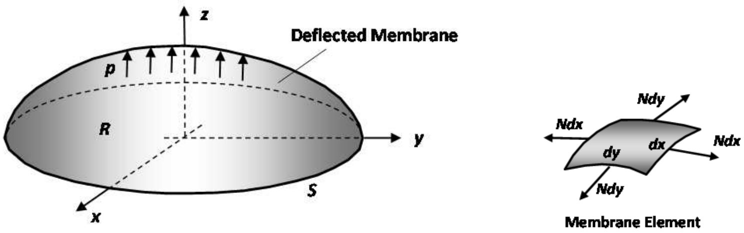


contorno dos deslocamentos

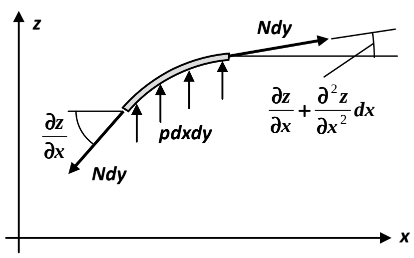
ANALOGIA DA MEMBRANA

A tensão cisalhante em qualquer ponto de uma secção transversal em torção é equivalente ao valor negativo da inclinação de uma membrana medido na direção normal à linha de contato que passa pelo ponto de análise (*Prandlt* – 1903).

ANALOGIA DA MEMBRANA



Static Deflection of a Stretched Membrane



Equilibrium of Membrane Element

ANALOGIA DA MEMBRANA

Eq. membrana

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{N}$$

$$z = 0 \ \text{em} \ S$$

$$V = \iint_R z\,dx\,dy$$

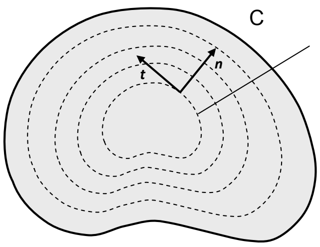
Eq. torção

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\mu\alpha$$

$$\phi = 0 \ em \ S$$

$$T = 2\iint_R \phi\,dx\,dy$$

ANALOGIA DA MEMBRANA



L $: z = c$

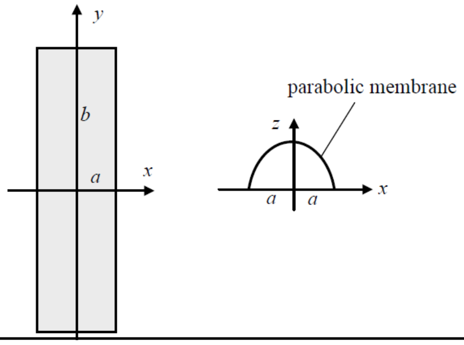
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \ \Rightarrow \tau_{zn} = 0$$

$$\therefore \ \tau = \tau_{zt} = -\frac{dz}{dn}$$

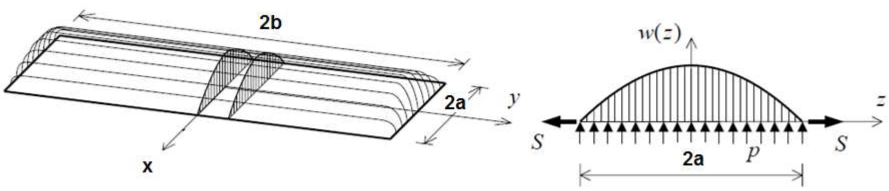
A <u>máxima</u> tensão ocorre no contorno correspondente à <u>máxima inclinação</u> da membrana deformada.

EXEMPLO 03

Empregando a analogia da membrana, desenvolva uma solução aproximada para o problema de torção de uma secção retangular, conforme figura. Negligenciar os efeitos de extremidade em y = ± b.



EXEMPLO 03 - continuação



BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Berrocal, L.O., *Elasticidad*, McGrawHill (1998).

Beer, F. P., Johnston, E.R., *Resistência dos Materiais – 4ªEd.*, McGrawHill (2006).

Saad, M. H., *Elasticity – Theory, Applications and Numerics*, Elsevier (2005).