Capítulo 5.

TERMOELASTICIDADE LINEAR 1D PERMANENTE

Neste capítulo, o modelo matemático é composto por duas equações diferenciais:

1ª) problema térmico; e

2ª) problema elástico.

Consideraremos:

- coordenadas cartesianas unidimensionais;
- regime permanente;
- propriedades constantes;
- condições de contorno do tipo Dirichlet; e
- malhas uniformes.

5.1 MODELO MATEMÁTICO

5.1.1 Problema Térmico

$$\frac{d^2T}{dX^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} T(0) &= T_0 \\ T(L) &= T_L \end{aligned}\right\} \quad \text{condições de contorno de Dirichlet} \tag{5.2}$$

Este problema é um caso simplificado daquele apresentado na seção 3.1. Para isso, basta considerar que

$$S = -\frac{\dot{q}}{k} = \text{constante} \tag{5.3}$$

onde

$\dot{q}$ = taxa de geração de calor por unidade de volume (W/m^3)

k = condutividade térmica do sólido (W/m.K)

L = comprimento do domínio de cálculo (m)

Este problema pode representar, por exemplo, a condução de calor numa barra metálica através da qual passa uma corrente elétrica que dissipa calor por efeito Joule.

5.1.2 Problema Elástico

Será considerado um estado unidimensional de tensões (N/m^2 = Pa) isto é,

$$[\sigma] = [\sigma_x] \tag{5.4}$$

Portanto,

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \tag{5.5}$$

onde σ_x, σ_y e σ_z são as tensões nas direções *X*, *Y* e *Z*, respectivamente. Neste caso, as deformações (ε) (adimensionais) são dadas por

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x] \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0 \tag{5.7}$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} \tag{5.9}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \tag{5.10}$$

com u, v e w representando os deslocamentos (m) nas direções X, Y e Z, respectivamente.

Para este problema unidimensional, as equações de equilíbrio estático (balanço de forças) se resumem a

$$\frac{d\sigma_x}{dX} = 0 \tag{5.11}$$

A partir da lei de Hooke para materiais isotrópicos, homogêneos e elásticos, com efeito térmico, obtém-se

$$\sigma_x = E\,(\,\varepsilon_x - \alpha\theta) \tag{5.12}$$

onde

E = módulo de elasticidade, módulo elástico ou módulo de Young (N/m^2)

α = coeficiente de expansão térmica (K^{-1})

θ = diferença de temperatura em relação a um valor de referência (K)

$$\theta = T - T_0 \tag{5.13}$$

Com as Eqs. (5.8) e (5.12) em (5.11), pode-se obter a equação do deslocamento (u) na direção X:

$$\frac{d^2u}{dX^2} - \alpha\frac{dT}{dX} = 0 \tag{5.14}$$

O modelo matemático é fechado considerando-se as seguintes condições de contorno de Dirichlet:

$$u(0) = u(L) = 0 \tag{5.15}$$

O problema termoelástico consiste em resolver a Eq. (5.14). Mas como ela depende da temperatura, primeiro é necessário resolver a Eq. (5.1). Caso seja de interesse, posteriormente, pode-se obter a tensão (σ_x) e a deformação (ε_x) a partir das Eqs. (5.12) e (5.8). As equações da teoria da elasticidade linear tridimensional, com efeito térmico, podem ser obtidas no apêndice C do livro de Huebner *et al*. (2001).

5.1.3 Variáveis de Interesse

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ T\text{, a partir da Eq. (5.1)} \\[2em] \bullet\ u\text{, a partir da Eq. (5.14)} \end{array}\right\}\text{ variáveis primárias}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varepsilon_x\text{, a partir da Eq. (5.8)} \\ \bullet\ \sigma_x\text{, a partir da Eq. (5.12)} \\ \bullet\ F_0 \text{ e } F_L \end{array}\right\}\text{ variáveis secundárias}$$

onde F_0 e F_L são as forças que atuam em $X = 0$ e $X = L$, na direção X, dadas por

$$F_0 = (\sigma_x)_0 \, A_x \tag{5.16}$$

$$F_L = (\sigma_x)_L \, A_x \tag{5.17}$$

onde A_x é a área da seção transversal à direção X do sólido, que é considerada constante.

5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para $L = 1$, a solução analítica do problema térmico, Eqs. (5.1) e (5.2), resulta em

$$T = T_0 + (T_L - T_0)\, X + \frac{\dot{q}}{2k}(1 - X)\, X \tag{5.18}$$

ou, com a definição da Eq. (5.13),

$$\theta = (T_L - T_0)\, X + \frac{\dot{q}}{2k}(1 - X)\, X \tag{5.19}$$

Com a Eq. (5.19), a solução analítica do problema elástico, Eqs. (5.14) e (5.15), resulta em

$$u = \frac{\alpha X}{6}\left[3\left(T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right)(X - 1) - \frac{\dot{q}}{k}(X^2 - 1) \right] \tag{5.20}$$

Deve-se notar que mesmo se $\dot{q} = 0$, $u \neq 0$ se $T_0 \neq T_L$. Com a Eq. (5.20) em (5.8),

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha}{6}\left[3\left(T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right)(2X - 1) - \frac{\dot{q}}{k}(3X^2 - 1) \right] \tag{5.21}$$

Com as Eqs. (5.19) e (5.21) em (5.12), obtém-se σ_x. E, com as Eqs. (5.16) e (5.17),

$$F_L = F_0 = \frac{E\alpha A_x}{6}\left[3\, (T_0 - T_L) - \frac{\dot{q}}{2k} \right] \tag{5.22}$$

5.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A discretização do problema térmico, Eq. (5.1), pode ser vista na seção 3.1.4. Entretanto, deve-se considerar que

$$S_0 = -\frac{\dot{q}}{k}, \qquad S_1 = S_2 = 0 \tag{5.23}$$

A discretização do problema elástico, Eq. (5.14), pode ser obtida com a substituição das aproximações numéricas dadas na Eq. (2.26), para a derivada de 1ª ordem de *T*, e na Eq. (2.38), para a derivada de 2ª ordem de *u*. Isso resulta em

$$\frac{(u_W + u_E - 2u_P)}{h^2} - \alpha\,\frac{(T_E - T_W)}{2h} = 0 \tag{5.24}$$

ou

$$2\,u_P = u_W + u_E - \frac{\alpha}{2}(T_E - T_W)\,h \tag{5.25}$$

ou, ainda,

$$a_P\, u_P \quad = \quad a_W\, u_W \quad + \quad a_E\, u_E \quad + \quad b_P \tag{5.26}$$

A Eq. (5.26) é válida para a variável u em cada nó P interno da malha, isto é, P = 2, 3, ..., N-1. Por comparação com a Eq. (5.25), nota-se que seus coeficientes e termos fontes são dados por

$$\left.\begin{array}{l} a_P \;=\; 2, \qquad a_W \;=\; a_E \;=\; 1, \qquad b_P \;=\; -\dfrac{\alpha}{2}(T_E - T_W)\, h \\[2ex] W \;=\; P \;-\; 1, \qquad E \;=\; P \;+\; 1 \end{array}\right\} \tag{5.27}$$

sendo que a Fig. 3.2 também se aplica aqui.

No caso dos dois contornos, isto é, P = 1 e P = N, para que sejam satisfeitas as condições de contorno da Eq. (5.15), deve-se usar

$$a_P \;=\; 1, \qquad a_W \;=\; a_E \;=\; b_P \;=\; 0 \tag{5.28}$$

Após a obtenção da solução numérica de u, isto é, após a solução do sistema de Eqs. (3.16) ou (4.31), a deformação (ε_x) pode ser obtida pela aproximação numérica da Eq. (5.8). No caso dos nós internos da malha (P = 2, 3, ..., N-1), pode-se usar a aproximação dada na Eq. (2.26), o que resulta em

$$(\varepsilon_x)_P \;=\; \frac{(u_E - u_W)}{2h} \qquad (P = 2, 3, ..., N\text{-}1) \tag{5.29}$$

Para manter a mesma ordem (2ª) de aproximação da Eq. (5.29), deve-se usar no contorno esquerdo a Eq. (2.29),

$$(\varepsilon_x)_1 \;=\; \frac{(4u_2 - 3u_1 - u_3)}{2h} \tag{5.30}$$

e no contorno direito, a Eq.(2.32), isto é,

$$(\varepsilon_x)_N \quad = \quad \frac{(3u_N + u_{N-2} - 4u_{N-1})}{2h} \tag{5.31}$$

A tensão pode ser obtida com a substituição da Eq. (5.13) em (5.12). A discretização desta última resulta em

$$(\sigma_x)_P \quad = \quad E\,[\,(\varepsilon_x)_P \quad - \quad \alpha\,(T_P - T_0)\,] \tag{5.32}$$

E as forças podem ser obtidas com a Eq. (5.32) nas Eqs. (5.16) e (5.17).

5.3.1 Algoritmo de Solução

Um possível algoritmo para resolver o problema termoelástico apresentado neste capítulo é o seguinte:

1) Ler os dados do problema: $T_0, T_L, \dot{q}, k, L, N, \alpha, E, A_x$.
2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter *h* da Eq. (2.4).
3) Calcular os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e os termos fontes (b_P), do sistema de equações do problema térmico, com as Eqs. (3.14), (3.19) e (3.20).
4) Resolver o problema térmico (T_P) com o método *TDMA*, descrito na seção 3.2.1.
5) Calcular os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e os termos fontes (b_P), do sistema de equações do problema elástico, com as Eqs. (5.27) e (5.28).
6) Resolver o problema elástico (u_P) com o método *TDMA*.
7) Calcular as deformações (ε_x) com as Eqs. (5.29) a (5.31).
8) Calcular as tensões (σ_x) com a Eq. (5.32).
9) Calcular as forças nos contornos com as Eqs. (5.16) e (5.17).
10) Gravar os resultados de interesse.
11) Visualizar os campos de $T, u, \varepsilon_x, \sigma_x$ *versus X*.

5.4 EXERCÍCIOS

Exercício 5.1

Implemente um programa computacional para resolver, analiticamente e numericamente, o problema termoelástico 1Dp do capítulo 5. Adote o algoritmo descrito na seção 5.3.1.

Use os seguintes dados: T_0 = 20 °C T_L = 30 °C $\dot{q}$ = 5x10^4 W/m^3

$k = 401$ W/m.K $L = 1$ m $N = 21$ nós

$\alpha = 16\text{x}10^{-6}$ K^{-1} $E = 110\text{x}10^{9}$ N/m $A_x = 10^{-4}$ m^2

Resultados a apresentar:

1) Um gráfico de T_P *versus* X_P com as soluções analítica e numérica.
2) Um gráfico de u_P *versus* X_P com as soluções analítica e numérica.
3) Um gráfico de $(\varepsilon_x)_P$ *versus* X_P com as soluções analítica e numérica.
4) Um gráfico de $(\sigma_x)_P$ *versus* X_P com as soluções analítica e numérica.
5) Soluções analítica e numérica de F_0.

Exercício 5.2

Através de uma estimativa de erro *a priori*, determine as ordens verdadeiras e assintóticas do erro de truncamento das seguintes equações diferenciais discretizadas:

1) Eq. (3.11), da seção 3.1, para os dados do exercício 5.1
2) Eq. (5.24)
3) Eq. (5.29)
4) Eq. (5.32)