Capítulo 3.

DIFUSÃO DE CALOR E DE QML 1D PERMANENTE

Neste capítulo serão abordados três tipos de problemas (Incropera e DeWitt, 1998):

- Difusão de calor em parede;
- Difusão de calor em aleta; e
- Difusão de QML (quantidade de movimento linear).

Eles serão tratados de forma unidimensional (1D) em regime permanente (p). Abreviaremos estes casos por 1Dp. Para a solução do sistema linear de equações, serão vistos dois tipos de *solver* (Maliska, 2004; Kreyszig, 1999):

- Gauss-Seidel (iterativo); e
- TDMA (direto).

Os problemas serão resolvidos para três tipos de condições de contorno (Incropera e DeWitt, 1998):

- Dirichlet;
- Neumann; e
- Robin.

Para a discretização do domínio de cálculo, serão empregadas:

- malhas uniformes; e
- coordenadas cartesianas.

3.1 DIFUSÃO DE CALOR EM PAREDE COM TEMPERATURA PRESCRITA

3.1.1 Modelo Matemático e Domínio de Cálculo

$$\frac{d^2T}{dX^2} = S_0 + S_1X + S_2X^2 = S \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} T(0) &= T_0 \\ T(L) &= T_L \end{aligned}\right\} \text{Condições de contorno (C.C.) de Dirichlet.} \qquad (3.2)$$

onde

T = temperatura (variável dependente)

X = coordenada espacial (variável independente)

S_0, S_1 e S_2 = constantes

S = termo fonte

L = comprimento do domínio de cálculo

T_0 = temperatura conhecida no contorno esquerdo, isto é, em $X = 0$

T_L = temperatura conhecida no contorno direito, isto é, em $X = L$

A Eq. (3.1) é uma equação do tipo Poisson onde:

- Se $S < 0$: há geração de calor (por exemplo: efeito Joule ou reações químicas exotérmicas); e
- Se $S > 0$: há absorção de calor (por exemplo: expansão gasosa ou reações químicas endotérmicas)

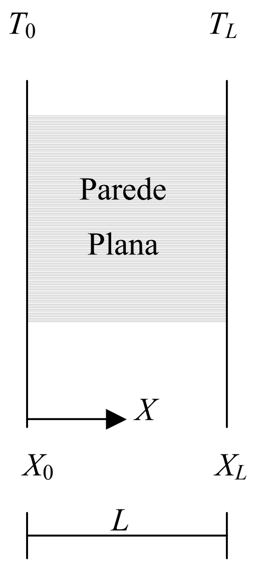

Figura 3.1 Domínio de cálculo e condições de contorno.

3.1.2 Variáveis de Interesse

Para o problema descrito, pretende-se obter soluções numéricas e analíticas para as seguintes variáveis:

- temperatura T, a partir da Eq. (3.1)

- temperatura média: $$T_m = \frac{1}{L}\int_0^L T\,dX \tag{3.3}$$

- Fluxo de calor (q'') em $X = 0$ e $X = L$, isto é,

$$q''_0 = -k\left(\frac{dT}{dX}\right)_0 \tag{3.4}$$

$$q''_L = -k\left(\frac{dT}{dX}\right)_L \tag{3.5}$$

onde k é uma constante que representa a condutividade térmica do material da parede, dada em W/m.K; T é a variável primária; T_m e q'' são variáveis secundárias, isto é, variáveis que dependem de T.

3.1.3 Soluções Analíticas

Considerando

$$T_0 = 0 \text{ e } T_L = L = k = 1 \tag{3.6}$$

as soluções analíticas para as variáveis de interesse são:

$$T = \left(1 - \frac{S_0}{2} - \frac{S_1}{6} - \frac{S_2}{12}\right)X + \frac{S_0}{2}X^2 + \frac{S_1}{6}X^3 + \frac{S_2}{12}X^4 \tag{3.7}$$

$$T_m = \frac{1}{2} - \frac{S_0}{12} - \frac{S_1}{24} - \frac{S_2}{40} \tag{3.8}$$

$$q_0'' \quad = \quad \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{6} + \frac{S_2}{12} - 1 \qquad (3.9)$$

$$q_L'' \quad = \quad -\left(1 + \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{4}\right) \qquad (3.10)$$

3.1.4 Discretização do Modelo Matemático

Com as aproximações numéricas: da Eq. (2.5) para S_0, S_1 e S_2; Eq. (2.6) para X; e Eq. (2.38) para λ_{CDS-2}^{ii} na Eq. (3.1), obtém-se

$$\frac{(T_W + T_E - 2T_P)}{h^2} \quad = \quad S_0 + S_1 X_P + S_2 X_P^2 \qquad (3.11)$$

ou

$$2T_P \quad = \quad T_W \quad + \quad T_E \quad - \quad (S_0 + S_1 X_P + S_2 X_P^2) h^2 \qquad (3.12)$$

ou, ainda,

$$a_P\, T_P \quad = \quad a_W\, T_W \quad + \quad a_E\, T_E \quad + \quad b_P \qquad (3.13)$$

Esta equação representa a forma discretizada do modelo matemático, dado na Eq. (3.1), para cada nó (P) interno da malha (P = 2, 3, ..., N-1), com N sendo o número total de nós da malha; onde, $W = P - 1$, $E = P + 1$, conforme a Fig. 3.2. Comparando-se as Eqs. (3.12) e (3.13), verifica-se que os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e o termo fonte (b_P) da Eq. (3.13) são dados por

$$a_P = 2, \quad a_W = a_E = 1, \quad b_P = -(S_0 + S_1 X_P + S_2 X_P^2) h^2 \qquad (3.14)$$

Para entender melhor o significado da Eq. (3.13), vamos aplicá-la a um domínio discretizado com apenas 5 nós, mostrado na Fig. 3.3. Isso resulta na seguinte matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

A matriz de coeficientes é do tipo quadrada, isto é, com N por N coeficientes. No caso do tipo de discretização usado sobre a Eq. (3.1), diferença central de 3 pontos, a matriz de coeficientes é denominada tridiagonal, ou seja, somente três diagonais possuem coeficientes não-nulos. A Eq. (3.15) pode ser reescrita como

$$[A][T] \;=\; [B] \tag{3.16}$$

onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes, $[T]$ é a matriz incógnita e $[B]$ é a matriz dos termos fontes. As matrizes $[T]$ e $[B]$ têm dimensão N por 1, isto é, elas são vetores. A solução do sistema (3.16) fornece a solução numérica da variável dependente (T).

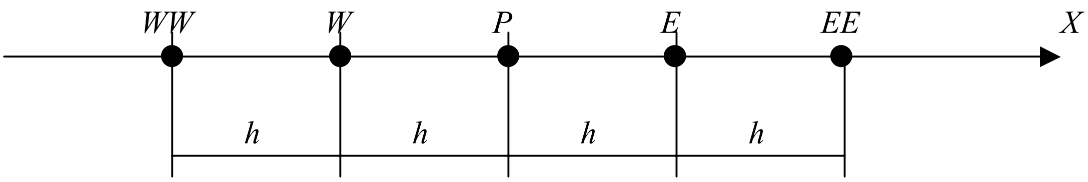

Figura 3.2 Nó genérico P e seus vizinhos WW, W, E e EE.

Na matriz $[A]$, o primeiro índice representa cada nó P da malha. O segundo índice representa os outros nós da malha que influenciam cada nó P. Da Eq. (3.13), nota-se que cada nó P é influenciado por apenas dois nós vizinhos (W e E), decorrente da aproximação numérica que foi usada, representada pela Eq. (2.38). Isso não ocorre nos contornos, conforme pode-se observar na Fig. 3.3.

Cada linha do sistema (3.15) representa a equação de cada nó P da malha, Eq. (3.13). No caso mais complexo, onde todos os nós j influenciariam cada nó k da malha, teríamos

$$\sum_{j=1}^{N} (a_{k,j} T_j) \;=\; b_k \qquad (k = 1, 2, 3, ..., N) \tag{3.17}$$

Neste caso, a matriz de coeficientes seria do tipo cheia. A correspondência entre a Eq. (3.17) e a Eq. (3.13) é

$$a_{k,j} = a_P, \quad a_{k,j-1} = -a_W, \quad a_{k,j+1} = -a_E, \quad b_k = b_P \tag{3.18}$$

com $a_{k,<j-1} = a_{k,>j+1} = 0$, para $j = k$.

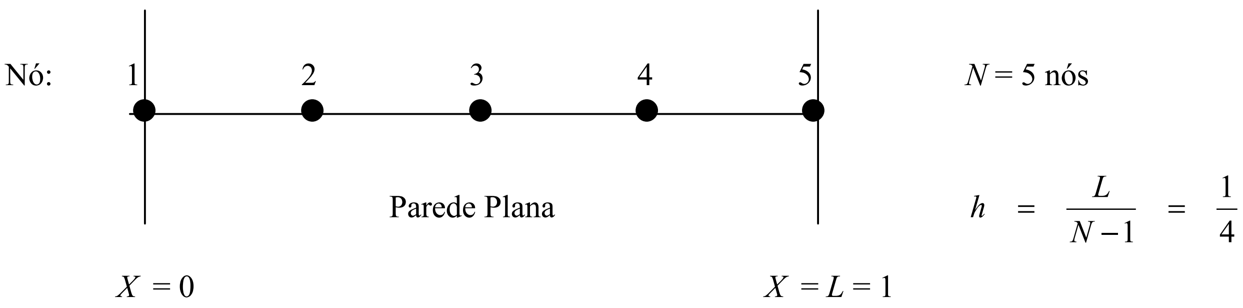

Figura 3.3 Exemplo de discretização do domínio de cálculo.

Em princípio, a Eq. (3.13) só é válida para os nós internos do domínio, isto é, todos os nós exceto os contornos. Se quisermos aplicar a Eq. (3.13) também aos contornos, como no sistema (3.15), deve-se determinar o valor dos coeficientes de tal forma que eles satisfaçam as condições de contorno. Nesta seção 3.1 estamos tratando com condições de contorno de Dirichlet, isto é, o valor da temperatura é conhecida nos contornos, conforme a Eq. (3.2). Portanto, para que a Eq. (3.13) satisfaça a Eq. (3.2), deve-se fazer:

- No contorno esquerdo ($X = 0$ e $P = 1$):

$$a_P = 1, \quad a_W = a_E = 0, \quad b_P = T_0 \tag{3.19}$$

Isso resulta em $T_P = T_0$.

- No contorno direito ($X = L$ e $P = N$):

$$a_P = 1, \quad a_W = a_E = 0, \quad b_P = T_L \tag{3.20}$$

Isso resulta em $T_P = T_L$.

Outra possibilidade é resolver o sistema de equações apenas para os nós internos, já que a solução é conhecida nos contornos. Neste caso, o sistema (3.15) se reduz a

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 - a_{21}T_1 \\ b_3 \\ b_4 - a_{45}T_5 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Se fosse empregada a aproximação λ^{ii}_{CDS-4}, dada pela Eq. (2.41), para discretizar a Eq. (3.1), a matriz de coeficientes seria do tipo pentadiagonal, isto é, haveria cinco diagonais não-nulas.

3.1.5 Discretização das Variáveis Secundárias

Com a solução numérica de T, a temperatura média T_m, definida na Eq. (3.3), pode ser obtida através da Eq. (2.44), ou seja,

$$T_m = \frac{h}{2L}\sum_{P=2}^{N}(T_W + T_P) \tag{3.22}$$

onde $W = P - 1$.

O Fluxo de calor ($q^{"}$) em X = 0, definido na Eq. (3.4), pode ser obtido por meio de duas aproximações numéricas do capítulo 2:

- com λ^{i}_{DDS}, Eq. (2.19): $$q_0^{"} = -k\frac{(T_E - T_P)}{h} \tag{3.23}$$

- com λ^{i}_{DDS-2}, Eq. (2.29): $$q_0^{"} = -k\frac{(4T_E - 3T_P - T_{EE})}{2h} \tag{3.24}$$

onde, conforme a Fig. 3.2,

$$P = 1, \quad E = P + 1 = 2, \quad EE = P + 2 = 3 \tag{3.25}$$

O Fluxo de calor ($q^{"}$) em $X = L$, definido na Eq. (3.5), pode ser obtido também com duas aproximações numéricas do capítulo 2:

- com λ^{i}_{UDS}, Eq. (2.23): $$q_L^{"} = -k\frac{(T_P - T_W)}{h} \tag{3.26}$$

- com λ^{i}_{UDS-2}, Eq. (2.32):

$$q''_L = -k\frac{(3T_P + T_{WW} - 4T_W)}{2h} \qquad (3.27)$$

onde, conforme a Fig. 3.2,

$$P = N, \quad W = P-1 = N-1, \quad WW = P-2 = N-2 \qquad (3.28)$$

3.1.6 Algoritmo de Solução

As soluções numéricas da variável dependente (*T*) no modelo matemático, dada nas Eqs. (3.1) e (3.2), e das variáveis secundárias T_m, q''_0 e q''_L, definidas nas Eqs. (3.3) a (3.5), podem ser obtidas com o seguinte algoritmo num programa computacional:

1. Ler os dados do problema: S_0, S_1, S_2, T_0, T_L, k, L e N.
2. Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter h da Eq. (2.4).
3. Calcular os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e os termos fontes (b_P) do sistema de equações, conforme a Eq. (3.14), para P = 2, 3, ..., N-1.
4. Calcular os coeficientes e termos fontes dos contornos, P = 1 e P = N, com as Eqs. (3.19) e (3.20).
5. Resolver T_P com o método TDMA, descrito na próxima seção.
6. Obter T_m com a Eq. (3.22).
7. Obter q''_0 com a Eq. (3.23) ou (3.24).
8. Obter q''_L com a Eq. (3.26) ou (3.27).
9. Gravar os resultados de T_P, T_m, q''_0 e q''_L.
10. Visualizar a solução de T em um gráfico T_P *versus* X_P.

3.2 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES TRIDIAGONAIS

O sistema de equações algébricas representado pela Eq. (3.13), (3.15) ou (3.16) pode ser resolvido por métodos diretos ou iterativos (Kreyszig, 1999). Os métodos diretos resolvem o sistema com um número finito de operações. Isto é, definido o tamanho da matriz [A], sabe-se *a priori*, qual é a quantidade de operações algébricas necessária para se obter a solução do sistema.

Os métodos iterativos resolvem o sistema através de um processo iterativo de aproximações sucessivas da solução, podendo ou não ser obtida a solução, ou seja, podendo ou não convergir para uma solução. Uma estimativa inicial da solução precisa ser fornecida e o número mínimo de iterações para se obter uma solução depende dela. Portanto, a solução obtida é função da estimativa inicial e do critério de convergência especificado. A seguir são apresentados um método direto e um método iterativo para resolver sistemas de equações oriundos de problemas unidimensionais lineares.

3.2.1 Método TDMA

O método TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) resolve de forma direta sistemas de equações cuja matriz de coeficientes é do tipo tridiagonal, para coeficientes com valores constantes. Inicialmente vamos reescrever a Eq. (3.13) da seguinte forma:

$$a_P\, T_P \quad = \quad b_P\, T_W \quad + \quad c_P\, T_E \quad + \quad d_P \tag{3.29}$$

onde o subíndice P representa cada linha do sistema de equações. A correspondência entre os coeficientes da Eq. (3.29) e os coeficientes da Eq. (3.13) é: $a_P = a_P$, $b_P = a_W$, $c_P = a_E$ e $d_P = b_P$. O objetivo é obter uma solução direta do tipo

$$T_P \quad = \quad P_P\, T_E \quad + \quad Q_P \tag{3.30}$$

onde P_P e Q_P são coeficientes do método TDMA. Reescrevendo a Eq. (3.30) para o nó W, tem-se

$$T_W \quad = \quad P_W\, T_P \quad + \quad Q_W \tag{3.31}$$

Com a Eq. (3.31) em (3.29), vem

$$a_P\, T_P \quad = \quad b_P\, (P_W\, T_P + Q_W) \quad + \quad c_P\, T_E \quad + \quad d_P$$

ou

$$(a_P - b_P\, P_W)\, T_P \quad = \quad c_P\, T_E \quad + \quad d_P \quad + \quad b_P\, Q_W$$

Isolando-se T_P nesta última equação, obtém-se

$$T_P \quad = \quad \left[\frac{c_P}{a_P - b_P P_W} \right] T_E \quad + \quad \left[\frac{d_P + b_P Q_W}{a_P - b_P P_W} \right] \tag{3.32}$$

Comparando-se as Eqs. (3.30) e (3.32), é evidente que

$$P_P = \frac{c_P}{a_P - b_P P_W} \tag{3.33}$$

$$Q_P = \frac{d_P + b_P Q_W}{a_P - b_P P_W} \tag{3.34}$$

Os coeficientes P_P e Q_P, calculados com as Eqs. (3.33) e (3.34), são válidos somente para os nós internos da malha, isto é, P = 2, 3, ..., N-1. Nos contornos, onde não existe um dos três coeficientes da Eq. (3.29), deve-se fazer o seguinte:

- No contorno esquerdo (P = 1): não existe o coeficiente b_P ou b_1 da Eq. (3.29), então as Eqs. (3.33) e (3.34) se reduzem a

$$P_1 = \frac{c_1}{a_1} \tag{3.35}$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \tag{3.36}$$

- No contorno direito ($P = N$): não existe o nó leste (E), portanto a Eq. (3.30) se reduz a

$$T_N = Q_N \tag{3.37}$$

Considerando-se que já tenham sido calculados os coeficientes e os termos fontes da Eq. (3.29), para todos os nós da malha, o algoritmo para aplicar o método TDMA é:

1) Calcular P_1 e Q_1 com as Eqs. (3.35) e (3.36).
2) Calcular P_P e Q_P com as Eqs. (3.33) e (3.34) para os pontos P = 2, 3, ..., N.
3) Obter T_N da Eq. (3.37).
4) Obter T_P da Eq. (3.30) para P = N-1, N-2, ..., 3, 2, 1.

3.2.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel resolve de forma iterativa sistemas de equações. Ele consiste em isolar a incógnita em cada linha do sistema de equações. No caso, a partir da Eq. (3.13), tem-se

$$T_P = \frac{a_W\, T_W + a_E\, T_E + b_P}{a_P} \qquad (3.38)$$

Como T_W e T_E também são desconhecidos nesta equação, é necessário estimar um campo inicial para a variável T. Quando T for calculado para P = 1, 2, ... até N, diz-se que se executou uma iteração. Caso o processo seja convergente, a solução de T_P é melhorada a cada iteração e o processo é encerrado quando algum critério de convergência ou de parada pré-estabelecido for satisfeito. Note que, o processo de solução é função da estimativa inicial das variáveis e do número de iterações realizado.

Considerando-se que já tenham sido calculados os coeficientes e os termos fontes da Eq. (3.13), para todos os nós da malha, o algoritmo para aplicar o método Gauss-Seidel é:

1) Estabelecer um critério de parada ou de convergência.
2) Estimar a solução de T_P para P = 1, 2, ..., N.
3) Obter T_P com a Eq. (3.38) para P = 1, 2, ..., N.
4) Verificar se a solução de T_P satisfaz o critério de convergência; em caso afirmativo, encerrar o processo; caso contrário, retornar ao passo 3.

3.3 DIFUSÃO DE CALOR EM PAREDE COM FLUXO PRESCRITO

Nesta seção mostra-se a discretização da Eq. (3.1) para o caso em que uma das condições de contorno é do tipo de Neumann, isto é,

- em $X = 0$, C.C. de Dirichlet: $$T(0) = T_0 \qquad (3.39)$$

- em $X = L$, C.C. de Neumann: $$-k\left(\frac{dT}{dX}\right)_L = q_L'' \qquad (3.40)$$

onde

T = temperatura (variável dependente)

X = coordenada espacial (variável independente)

T_0 = temperatura conhecida no contorno esquerdo, isto é, em $X = 0$

q_L'' = fluxo de calor conhecido no contorno direito, isto é, em $X = L$

k = condutividade térmica da parede; constante (W/m.K)

Em relação ao problema da seção 3.1, apenas uma condição de contorno é alterada. Portanto, os coeficientes e termo fonte da Eq. (3.14) continuam válidos para os nós internos da malha: *P* = 2, 3, ..., *N*-1. Para o nó *P* = 1, contorno esquerdo, a Eq. (3.19) também continua válida. Já para o contorno direito, onde *P* = *N*, veremos a seguir duas possibilidades.

3.3.1 Aproximação com λ^i_{UDS}

Com a aproximação numérica λ^i_{UDS}, dada pela Eq. (2.23), na Eq. (3.40), obtém-se

$$-k\,\frac{(T_P - T_W)}{h} = q''_L \qquad (3.41)$$

ou

$$T_P = T_W - \frac{q''_L\, h}{k} \qquad (3.42)$$

onde $P = N, \quad W = P - 1 = N - 1$. Comparando-se as Eqs. (3.13) e (3.42), chega-se a

$$a_P = a_W = 1, \quad a_E = 0, \quad b_P = -\frac{q''_L\, h}{k} \qquad (3.43)$$

Neste caso, a matriz de coeficientes continua tridiagonal, como na Eq. (3.15). Portanto, o método TDMA resolve *T* diretamente.

3.3.2 Aproximação com λ^i_{UDS-2}

Com a aproximação numérica λ^i_{UDS-2}, dada pela Eq. (2.32), na Eq. (3.40), obtém-se

$$-k\,\frac{(3T_P + T_{WW} - 4T_W)}{2h} = q''_L \qquad (3.44)$$

ou

$$T_P = \frac{4}{3}T_W - \frac{1}{3}T_{WW} - \frac{2}{3}\frac{q''_L\, h}{k} \qquad (3.45)$$

onde $P = N, \quad W = P - 1 = N - 1, \quad WW = P - 2 = N - 2$.

Há duas possibilidades de substituir a Eq. (3.45) no sistema (3.15). A primeira é manter o coeficiente de T_{WW} na matriz de coeficientes. Isso quebra a estrutura tridiagonal. Para resolver diretamente o sistema é necessário usar o método de eliminação de Gauss, por exemplo. A segunda possibilidade é incluir no termo fonte o termo que envolve T_{WW}, isto é,

$$a_P = 1, \quad a_W = \frac{4}{3}, \quad a_E = 0, \quad b_p = -\left(\frac{1}{3}T_{WW} + \frac{2}{3}\frac{q''_L h}{k}\right) \tag{3.46}$$

Neste caso preserva-se a estrutura tridiagonal da matriz de coeficientes. Mas a existência da incógnita T_{WW} no termo fonte torna iterativa a solução do sistema (3.15).

3.4 DIFUSÃO DE CALOR EM ALETA

3.4.1 Modelo Matemático e Domínio de Cálculo

Neste novo problema, esquematizado na Fig. 3.4, o modelo matemático é dado por

$$\frac{d^2T}{dX^2} = m^2\,(T - T_\infty) \tag{3.47}$$

onde suas variáveis são

T = temperatura (variável dependente)

X = coordenada espacial (variável independente)

T_∞ = temperatura do fluido em contato com a aleta (constante)

T_b = temperatura da base da aleta (conhecida)

T_L = temperatura da ponta da aleta (desconhecida)

$$m = \sqrt{\frac{H\,P}{k\,A_b}} \qquad \text{(constante)} \tag{3.48}$$

H = coeficiente de transferência de calor (W/m^2.K)

k = condutividade térmica (W/m.K)

A_b = área da seção transversal da aleta (m^2)

P = perímetro da seção transversal da aleta (m)

As condições de contorno são:

- em $X = 0$, C.C. de Dirichlet: $\quad T(0) = T_b \quad$ (3.49)

- em $X = L$, C.C. de Robin:

$$q_L'' = \underbrace{-k\left(\frac{dT}{dX}\right)_L}_{\text{condução}} = \underbrace{H\,(T_L - T_\infty)}_{\text{convecção}} \qquad (3.50)$$

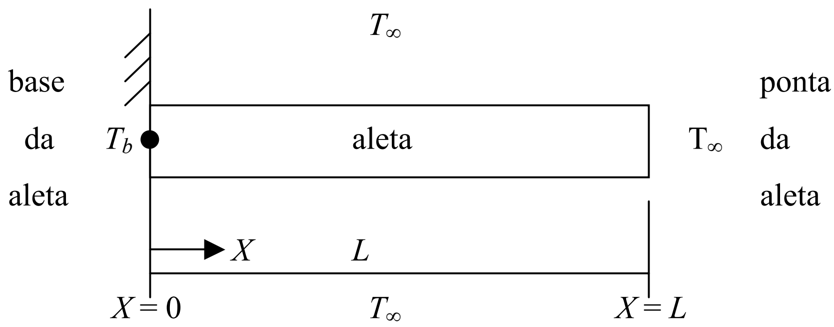

Figura 3.4 Esboço de uma aleta.

3.4.2 Variáveis de Interesse

Pretende-se obter soluções numéricas e analíticas para as seguintes variáveis:

- temperatura T, variável primária, a partir da Eq. (3.47)
- Taxa de transferência de calor (q) entre a aleta e o fluido, variável secundária:

$$q = -k\,A_b\left(\frac{dT}{dX}\right)_0 \qquad (3.51)$$

3.4.3 Soluções Analíticas

A solução analítica do modelo matemático dado pelas Eqs. (3.47), (3.49) e (3.50) é (Incropera e DeWitt, 1998):

$$T = T_\infty + (T_b - T_\infty)\left\{\frac{\cosh[m(L-x)] + (H/mk)\operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (H/mk)\operatorname{senh}(mL)}\right\} \qquad (3.52)$$

e, da Eq. (3.51),

$$q \quad = \quad \sqrt{HPkA_b}\,(T_b - T_\infty)\left\{\frac{\text{senh}(mL) + (H/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (H/mk)\,\text{senh}(mL)}\right\} \tag{3.53}$$

3.4.4 Soluções Numéricas

Com as aproximações numéricas: da Eq. (2.5) para m e T_∞; Eq. (2.7) para T; e (2.38) para a derivada de segunda ordem em (3.47), obtém-se

$$\frac{(T_W + T_E - 2T_P)}{h^2} \quad = \quad m^2(T_P - T_\infty) \tag{3.54}$$

ou

$$(2 + m^2h^2)\,T_P \quad = \quad T_W \quad + \quad T_E \quad + \quad m^2h^2T_\infty \tag{3.55}$$

onde $W = P–1$ e $E = P+1$, conforme a Fig. 3.2. Comparando-se a Eq. (3.55) com a Eq. (3.13), obtém-se

$$a_P = 2 + m^2h^2, \quad a_W = a_E = 1, \quad b_P = m^2h^2T_\infty \tag{3.56}$$

Estes coeficientes e termo fonte representam novamente o sistema (3.15), isto é, a matriz de coeficientes é do tipo tridiagonal. Estes coeficientes valem para os nós internos da malha, isto é, para P = 2, 3, ..., N-1.

Para o contorno esquerdo, ou seja, em X = 0 e P = 1, temos

$$a_P = 1, \quad a_W = a_E = 0, \quad b_P = T_b \tag{3.57}$$

o que resulta em $T_P = T_b$. E para o contorno direito, isto é, em $X = L$ e $P = N$, pode-se usar λ^i_{UDS} ou λ^i_{UDS-2} na Eq. (3.50), conforme já visto na seção 3.3. Com λ^i_{UDS}, Eq. (2.23), tem-se

$$-k\,\frac{(T_P - T_W)}{h} \quad = \quad H\,(T_P - T_\infty) \quad = \quad q''_L\ (desconhecido) \tag{3.58}$$

ou

$$(k + hH)\,T_P \quad = \quad k\,T_W \quad + \quad h\,H\,T_\infty \tag{3.59}$$

ou seja,

$$a_P = k + hH, \quad a_W = k, \quad a_E = 0, \quad b_P = hHT_\infty \tag{3.60}$$

Empregando-se λ^i_{UDS-2}, Eq. (2.32), na Eq. (3.50), tem-se

$$-k\,\frac{(3T_P + T_{WW} - 4T_W)}{2h} \;=\; H\,(T_P - T_\infty) \tag{3.61}$$

ou

$$(3k + 2hH)\,T_P \;=\; 4\,k\,T_W \;-\; k\,T_{WW} \;+\; 2\,h\,H\,T_\infty \tag{3.62}$$

Para a Eq. (3.62) valem os comentários feitos para a Eq. (3.45) na seção 3.3.2. Então, no caso de se querer manter a estrutura tridiagonal na matriz de coeficientes, a partir da Eq. (3.62), temos

$$a_P = 3k + 2hH, \quad a_W = 4k, \quad a_E = 0, \quad b_P = -kT_{WW} + 2hHT_\infty \tag{3.63}$$

Portanto, a solução com o método TDMA se torna iterativa.

A solução numérica de (q), Eq. (3.51), pode ser obtida com λ^i_{DDS} ou λ^i_{DDS-2}, da mesma forma como se fez com q''_0 na seção 3.1.5. Assim, para λ^i_{DDS}, Eq. (2.19), temos

$$q \;=\; -k\,A_b\,\frac{(T_E - T_P)}{h} \tag{3.64}$$

onde $P = 1$ e $E = P + 1 = 2$. Já com λ^i_{DDS-2}, Eq. (2.29), obtém-se

$$q \;=\; -k\,A_b\,\frac{(4T_E - 3T_P - T_{EE})}{2h} \tag{3.65}$$

onde $P = 1$, $E = P + 1 = 2$ e $EE = P + 2 = 3$.

3.5 DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML)

3.5.1 Modelo Matemático e Domínio de Cálculo

Para um escoamento laminar, plenamente desenvolvido, num duto de seção constante, Fig. 3.5, em regime permanente, com fluido incompressível, tem-se

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = C \tag{3.66}$$

onde

u = componente do vetor velocidade na direção x (variável dependente)

y = coordenada espacial (variável independente)

μ = viscosidade absoluta do fluido (constante)

C = constante

As condições de contorno são do tipo Dirichlet:

$$u(0) = u(D) = 0 \tag{3.67}$$

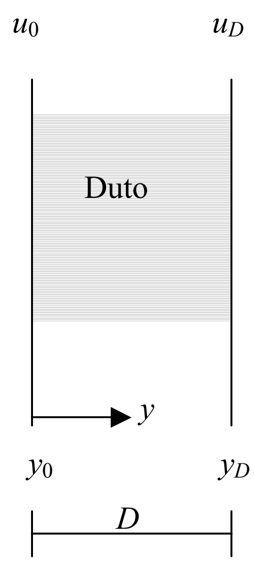

Figura 3.5 Domínio de cálculo e condições de contorno para o escoamento num duto.

3.5.2 Variáveis de Interesse

Pretende-se obter soluções numéricas e analíticas para as seguintes variáveis:

- velocidade u, variável primária, a partir da Eq. (3.66)
- velocidade máxima u_{Max} do perfil de u, variável secundária

- velocidade média (u_m) do perfil de u, variável secundária, obtida com

$$u_m \quad = \quad \frac{1}{D}\int_0^D u \, dy \tag{3.68}$$

3.5.3 Soluções Analíticas

A solução analítica do modelo matemático dado pelas Eqs. (3.66) e (3.67) resulta em

$$u \quad = \quad \frac{CD^2}{2\mu}\left[\left(\frac{y}{D}\right)^2 - \left(\frac{y}{D}\right)\right] \tag{3.69}$$

e, com a Eq. (3.69) em (3.68),

$$u_m \quad = \quad -\frac{CD^2}{12\mu} \tag{3.70}$$

Com as Eqs. (3.69) e (3.70), chega-se a

$$u_{Max} \quad = \quad \frac{3}{2}u_m \tag{3.71}$$

3.5.4 Soluções Numéricas

Com a aproximação numérica dada pela Eq. (2.38) na Eq. (3.66), obtém-se

$$\mu\frac{(u_W + u_E - 2u_P)}{h^2} \quad = \quad C \tag{3.72}$$

ou

$$2\,u_P \quad = \quad u_W \quad + \quad u_E \quad - \quad \frac{Ch^2}{\mu} \tag{3.73}$$

onde $W = P{-}1$ e $E = P{+}1$, conforme a Fig. 3.2. Comparando-se a Eq. (3.73) com a Eq. (3.13), obtém-se

$$a_P = 2, \quad a_W = a_E = 1, \quad b_P = -\frac{Ch^2}{\mu} \tag{3.74}$$

Estes coeficientes e termo fonte representam novamente o sistema (3.15), isto é, a matriz de coeficientes é do tipo tridiagonal. Estes coeficientes valem para os nós internos da malha, isto é, para P = 2, 3, ..., N-1. Para satisfazer as condições de contorno dadas pela Eq. (3.67), para $y = 0$ (P=1) e $y = D$ (P=N), tem-se

$$a_P = 1, \quad a_W = a_E = b_P = 0 \tag{3.75}$$

o que resulta em $u_P = 0$.

Para obter u_{Max} basta verificar qual é a velocidade máxima da solução numérica obtida para o perfil de velocidades, no caso de haver um nó no centro do domínio. Se este não for o caso, então é necessário fazer uma extrapolação com dois ou mais nós vizinhos ao centro do domínio.

Com a solução numérica de u, a velocidade média u_m, definida na Eq. (3.68), pode ser obtida através da Eq. (2.44), ou seja,

$$u_m = \frac{h}{2D}\sum_{P=2}^{N}(u_W + u_P) \tag{3.76}$$

onde $W = P - 1$.

3.6 EXERCÍCIOS

Exercício 3.1

Implemente um programa computacional para resolver o sistema de equações representado pela Eq. (3.13) cujos coeficientes e termos fontes dos nós internos da malha são dados por

$$a_P = 2, \quad a_W = a_E = 1, \quad b_P = 0 \qquad (P = 2, 3, ..., N-1)$$

e os nós dos contornos (P = 1 e P = N) são dados pelas Eqs. (3.19) e (3.20), com $T_0 = 0$ e $T_L = 1$. Resolva este sistema de equações para N = 11 utilizando o método TDMA, descrito na seção 3.2.1. A solução que deverá ser obtida de forma direta é

$$T_P = \frac{(P-1)}{10} \qquad (P = 1, 2, ..., N)$$

Exercício 3.2

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido na seção 3.1, considerando os seguintes dados: $N = 11$, $S_0 = -\frac{1}{2}$, $S_1 = -\frac{3}{2}$, $S_2 = -1$, $T_0 = 0$ e $T_L = k = L = 1$.

Resultados a apresentar:

1) Gráfico de T_P *versus* X_P com as soluções analítica e numérica
2) Soluções analítica e numérica da temperatura média
3) Soluções analítica e numérica do fluxo de calor nos dois contornos

Exercício 3.3

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido na seção 3.3, considerando a condição de contorno dada pela Eq. (3.43) e os seguintes dados: $N = 21$, $S_0 = -\frac{1}{2}$, $S_1 = -3$, $S_2 = -1$, $T_0 = 0$, $k = L = 1$ e $q''_L = \frac{1}{2}$.

Resultados a apresentar:

1) Gráfico de T_P *versus* X_P com as soluções analítica e numérica
2) Soluções analítica e numérica da temperatura média
3) Soluções analítica e numérica do fluxo de calor no contorno esquerdo
4) Soluções analítica e numérica da temperatura no contorno direito

Exercício 3.4

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido na seção 3.4, considerando a condição do contorno direito dada pela Eq. (3.60) e os seguintes dados:

$P = \pi D$	$A_b = (\pi D^2)/4$	$D = 0{,}005$ m
$T_b = 100$ °C	$T_\infty = 25$ °C	$L = 0{,}2$ m
$H = 100$ W/m^2.K	$k = 398$ W/m.K	$N = 21$

Resultados a apresentar:

1) Gráfico de T_P *versus* X_P com as soluções analítica e numérica
2) Soluções analítica e numérica da taxa de transferência de calor (q) entre a aleta e o fluido

Exercício 3.5

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido na seção 3.5, considerando os seguintes dados: $N = 11$, $\mu = 1\text{x}10^{-3}$ Pa.s, $D = 5\text{x}10^{-2}$ m, $C = -9.6$ Pa/m.

Resultados a apresentar:

1) Gráfico de u_P *versus* y_P com as soluções analítica e numérica
2) Soluções analítica e numérica da velocidade média
3) Soluções analítica e numérica da velocidade máxima