

## **INTRODUÇÃO**

---

A simulação numérica de problemas de engenharia ocupa atualmente uma posição de destaque no cenário mundial de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. O crescente interesse, tanto no meio acadêmico como no setor industrial, pela modelagem dos fenômenos físicos, associado ao crescimento exponencial da tecnologia da informática, desencadearam nas últimas décadas uma enorme procura pelas técnicas de simulação. Desta união surgiram os simuladores comerciais, para os quais, a cada momento, novas ferramentas e técnicas são desenvolvidas, incorporadas e disponibilizadas.

Este texto apresenta o método de diferenças finitas, precursor dos métodos numéricos, para simulação de problemas básicos de mecânica computacional. Um enfoque importante neste texto é a quantificação de erros numéricos para avaliar a confiabilidade dos resultados obtidos das simulações. A concepção do código computacional é deixada a cargo do leitor na forma de exercícios propostos. Porém, ao longo do texto são apresentados algoritmos sugeridos para implementação de programas computacionais e discutidas algumas técnicas que permitem detectar erros de programação.

Neste capítulo introdutório, inicialmente são descritos os métodos de abordagem de problemas de engenharia: os métodos experimentais, analíticos e numéricos. Em seguida, são apresentados os tipos de problemas que são abordados neste texto, que incluem basicamente difusão e convecção de calor e de quantidade de movimento linear, elasticidade e termoelasticidade, três tipos de condições de contorno, quatro sistemas de coordenadas e diversas variáveis de interesse. São mencionados os tipos de modelos numéricos empregados e definidas as etapas principais para a obtenção de uma solução numérica. Finalmente, delinea-se a estrutura deste texto.

### **1.1 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA**

Três tipos de métodos podem ser empregados na solução de um problema de engenharia: experimentais, analíticos e numéricos, conforme representado na Fig. 1.1. Cada um deles apresenta

vantagens e desvantagens sobre os demais dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo. Discussões a respeito podem ser vistas nos textos de Roache (1998b), Maliska (2004), Fortuna (2000) e Tannehill *et al.* (1997). Com base nestas referências, são apresentadas a seguir as características principais que distinguem cada tipo de método e fornecidos alguns exemplos.

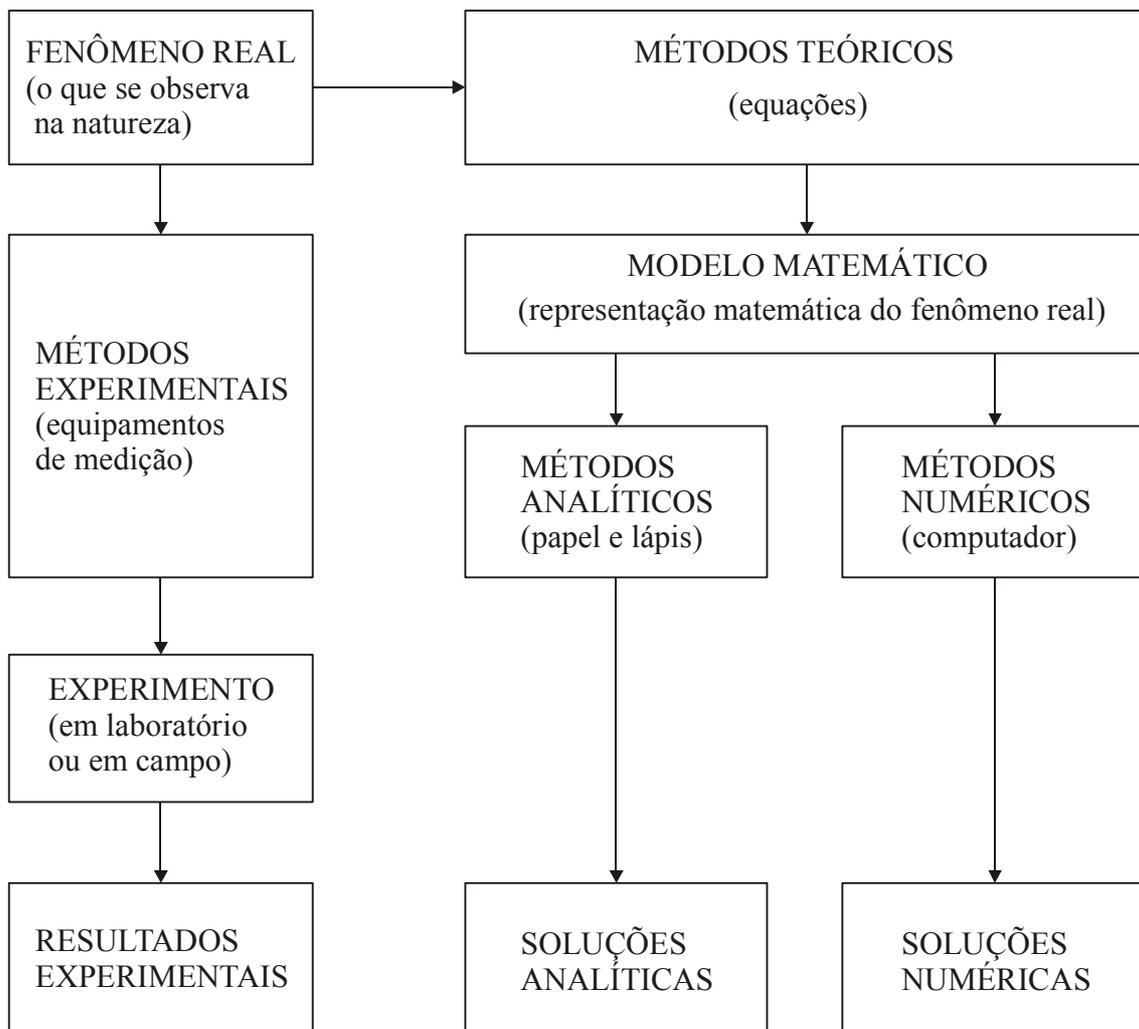


Figura 1.1 Métodos de solução de problemas de engenharia.

### 1.1.1 Métodos Experimentais

Os métodos experimentais, modernamente, tiveram início no século XVII com os trabalhos de Galileu Galilei sobre o movimento dos corpos. Suas características principais são:

- Trabalham com o fenômeno real; por exemplo, a determinação do arrasto e da sustentação de um avião voando em diversas velocidades.

- Cada problema é resolvido ou estudado com base num experimento físico realizado em laboratório com o uso de modelos em escala reduzida, como um avião em túnel de vento. O experimento também pode ser realizado em campo, em geral envolvendo problemas na escala real, como a evolução estelar com base em observações do Sol e de outras estrelas ou a circulação sanguínea no corpo humano.
- Empregam equipamentos de medição para medir o valor das grandezas de interesse, isto é, para obter os resultados experimentais. As grandezas podem ser globais, por exemplo, a força de arrasto sobre um avião, ou locais, como a velocidade do sangue dentro de uma artéria do corpo humano numa determinada posição.
- Apresentam erros experimentais.

### 1.1.2 Métodos Analíticos

Os métodos analíticos, modernamente, tiveram início também no século XVII com o livro *Principia* (1687) de Isaac Newton, que formulou suas três leis do movimento e realizou estudos sobre a gravitação e a luz. Suas características principais são:

- Trabalham com uma representação matemática do fenômeno real, isto é, com um modelo matemático. As equações de Navier-Stokes (Tannehill *et al.*, 1997) para o movimento de fluidos como o ar são um exemplo.
- As soluções analíticas, isto é, as soluções dos problemas, de forma bastante simplificada, são obtidas com o emprego de papel e lápis.
- As soluções analíticas são contínuas sobre o domínio de cálculo e em forma fechada, tanto para variáveis locais quanto globais.
- Aplicam-se a problemas com equações, geometrias e condições de contorno e iniciais muito simples, ou seja, os problemas que conseguem resolver são as exceções.
- Não se aplicam a problemas para os quais não existem modelos matemáticos.
- Apresentam erros de modelagem.

### 1.1.3 Métodos Numéricos

Alguns métodos numéricos usados em mecânica computacional são os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos (Minkowycz *et al.*, 1988) e elementos de contorno. Roache (1998b) considera que os métodos numéricos tiveram início com o trabalho de Richardson (1910), que resolveu, entre outras, a equação de Laplace bidimensional (Incropera e DeWitt, 1998) com o método de diferenças finitas, antes da era do computador digital, empregando computadores humanos. Suas características principais são:

- Também trabalham com uma representação matemática do fenômeno real, isto é, com um modelo matemático. Novamente, as equações de Navier-Stokes para o movimento de fluidos como o ar são um exemplo.
- As soluções numéricas, isto é, as soluções dos problemas são obtidas com o emprego de computadores, tanto para variáveis locais quanto globais.
- As soluções numéricas são discretas, isto é, são obtidas em pontos específicos do domínio de cálculo.
- Aplicam-se a problemas com equações, geometrias e condições de contorno e iniciais mais gerais do que aqueles resolvidos através de métodos analíticos.
- Também não se aplicam a problemas para os quais não existem modelos matemáticos.
- Apresentam erros de modelagem e erros numéricos.

Os métodos analíticos e numéricos também são denominados de métodos teóricos (Maliska, 2004) porque ambos trabalham com modelos matemáticos. O trabalho de Aeschliman e Oberkampf (1998) é um exemplo que trata da interação entre os métodos experimentais e numéricos para maximizar as vantagens de cada um na solução de problemas, isto é, para minimizar suas desvantagens e diminuir seus erros. Este tipo de interação entre métodos experimentais e numéricos também é empregado no aprimoramento e concepção de novos modelos matemáticos, como por exemplo, a modelagem da turbulência em escoamentos de fluidos. Os projetos de engenharia devem usar os métodos apropriados, e na medida adequada, a cada problema.

## 1.2 MODELOS MATEMÁTICOS E VARIÁVEIS DE INTERESSE

Os modelos matemáticos que são abordados neste texto representam problemas básicos de mecânica computacional. Eles incluem:

1. Difusão de calor linear e não-linear 1Dp, 1Dt e 2Dp
2. Difusão de QML 1Dp e 2Dp
3. Elasticidade 1Dp e 2Dp
4. Termoelasticidade linear 1Dp e 2Dp
5. Convecção de calor linear 1Dp e 2Dp
6. Convecção de QML 1Dp

onde

1Dp = unidimensional em regime permanente

1Dt = unidimensional em regime transiente

2Dp = bidimensional em regime permanente

QML = quantidade de movimento linear.

Condições de contorno do tipo (Incropera e DeWitt, 1998):

- Dirichlet;
- Neumann; e
- Robin.

Sistemas de coordenadas:

- cartesiano;
- cilíndrico;
- esférico; e
- generalizado.

Variáveis independentes: duas direções coordenadas (x e y) e o tempo (t).

Variáveis dependentes primárias (de campo, locais) obtidas da solução de equações diferenciais:

- temperatura;
- deslocamentos; e
- velocidades.

Variáveis secundárias obtidas a partir das variáveis primárias:

- deformações (de campo, locais);
- tensões (de campo, locais);
- temperatura média (global);
- taxa de transferência de calor nos contornos (locais);
- forças nos contornos (locais).

### 1.3 MODELOS NUMÉRICOS

Os seis tipos de problemas mencionados na seção anterior, com suas condições de contorno, sistemas de coordenadas e variáveis de interesse são resolvidos através do método de diferenças finitas, envolvendo:

- diversos tipos de aproximações numéricas;
- dois métodos de solução de sistemas lineares (*solvers*): Gauss-Seidel (Kreyszig, 1999) e TDMA (Maliska, 2004);
- malhas uniformes, não-uniformes, não-ortogonais e não-estruturadas;
- técnicas de blocagem, multiblocos e *multigrid*; e
- formulações implícita, totalmente implícita e explícita no tempo.

Simplificadamente, a obtenção da solução numérica de um problema pode ser dividida em seis etapas:

#### 1) Definição do problema:

- modelo matemático (equações, condições de contorno e iniciais);
- geometria do domínio de cálculo; e
- propriedades dos meios sólidos e fluidos envolvidos no problema.

#### 2) Definição do modelo numérico, isto é, todos os métodos, esquemas e procedimentos específicos que são usados para resolver numericamente o problema, incluindo:

- tipo de malha;
- método numérico;
- tipos de aproximações numéricas;
- variáveis de interesse;
- *solver*;
- critérios de convergência do processo iterativo;
- estimadores de erros numéricos;
- *hardware*;
- algoritmo do programa computacional; e
- *software*: linguagem de programação, precisão e compilador.

- 3) **Discretização do domínio de cálculo:** gera-se a malha, que consiste em  $N$  nós ( $j$ ) sobre os quais a solução numérica é obtida. Num problema unidimensional, o comprimento entre dois nós consecutivos da malha ( $h$ ) é denominado de elemento da malha. A soma do comprimento de todos os elementos ( $N-1$  nós) de uma malha resulta no comprimento total do domínio de cálculo ( $L$ ).
- 4) **Discretização do modelo matemático:** os termos das equações que constituem o modelo matemático e suas condições de contorno e iniciais são aproximados numericamente através de um método numérico, gerando um sistema de equações algébricas, também denominado de equações discretizadas.
- 5) **Obtenção da solução numérica:** as equações discretizadas são resolvidas com algum método (*solver*) direto ou iterativo (Ferziger e Peric, 1999; Maliska, 2004) para solução de sistemas de equações.
- 6) **Análise e visualização dos resultados** através de:
  - gráficos bi e tridimensionais;
  - isolinhas;
  - isorregiões;
  - isosuperfícies;
  - vetores; e
  - estimativas dos erros de modelagem e numéricos.

## 1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

Este texto está dividido em três partes constituídas por diversos capítulos, conforme descreve-se a seguir.

### Parte I (Básica): Problemas unidimensionais lineares

A Parte I envolve os capítulos 2 a 5. Nela, são abordados problemas de difusão de calor e de quantidade de movimento, elasticidade e termoelasticidade. Todos eles considerados lineares, unidimensionais, em regime permanente, coordenadas cartesianas e com malhas uniformes.

**Parte II (Intermediária): Problemas multidimensionais e não-lineares**

A Parte II envolve os capítulos 6 a 9. Nela, também são abordados problemas de difusão de calor e de quantidade de movimento, elasticidade e termoelasticidade, lineares ou não, multidimensionais, nos regimes permanente e transiente. São usadas coordenadas cilíndricas e esféricas, além de cartesianas com malhas uniformes.

**Parte III (Avançada): Tópicos Avançados**

A Parte III envolve os capítulos 10 a 17. Nela, são abordados os mesmos problemas das Partes I e II mas com malhas não-uniformes, não-estruturadas e não-ortogonais. Também são considerados problemas de difusão de calor e de quantidade de movimento. Além disso, são apresentadas técnicas de blocagem, multiblocos e *multigrid*.