

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS *MULTIGRID*

**DOUTORANDOS: M.Sc. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO
M.Sc. COSMO DAMIÃO SANTIAGO**

ORIENTADOR: Dr.Eng.CARLOS HENRIQUE MARCHI





Roteiro:

- Introdução;
 - Métodos iterativos básicos;
 - Análise de erros de Fourier;
 - Métodos *Multigrid*.
-

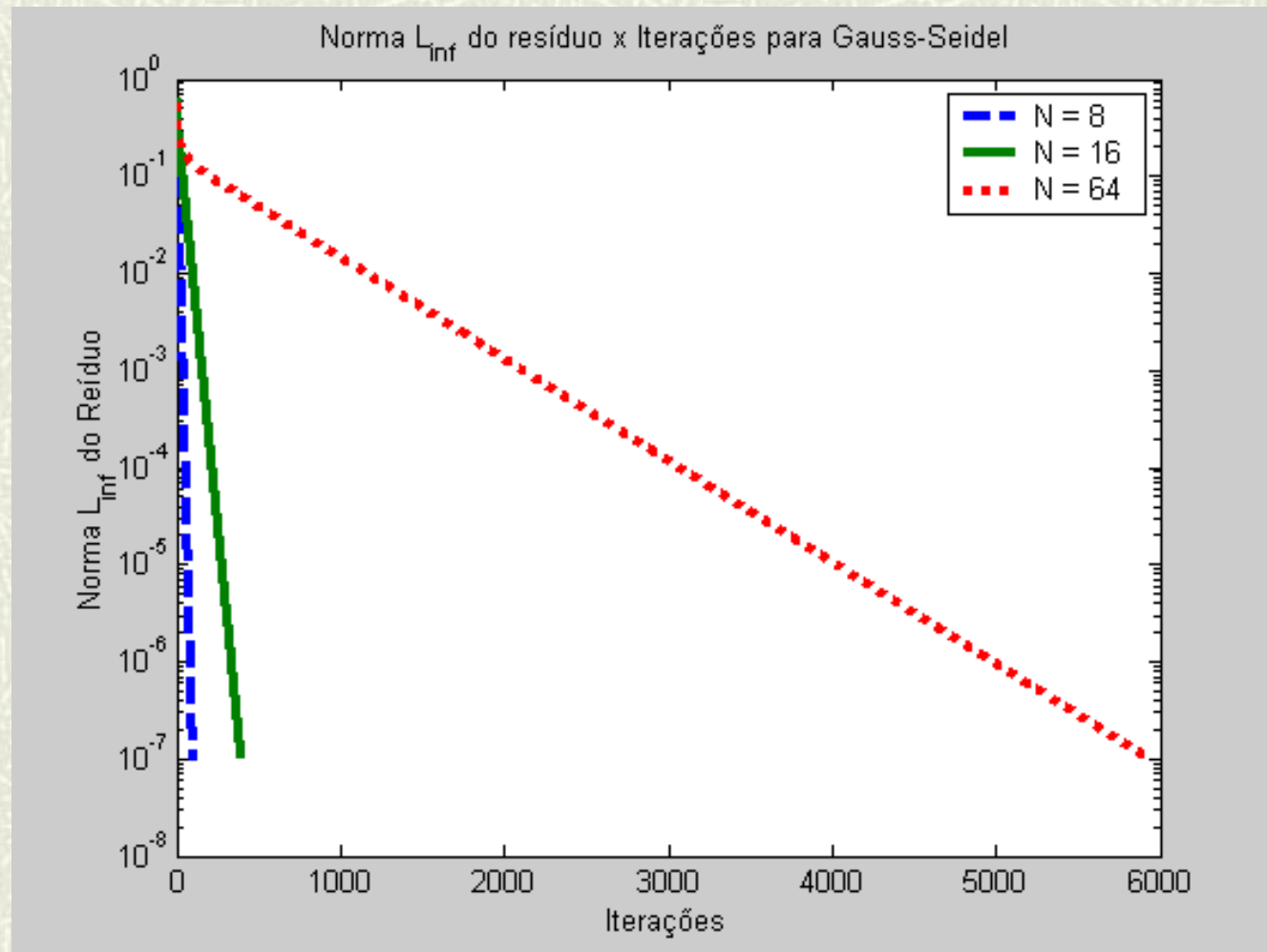
- A DFC é a área da Computação Científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos da Dinâmica dos Fluidos;
 - Estes fenômenos são modelados por sistemas de Equações Diferenciais.
-

Estes sistemas são discretizados resultando em um conjunto de equações algébricas do tipo:

$$Ax = b$$

- Problemas práticos;
 - Características da matriz A ;
 - Erros: truncamento, iteração, arredondamento;
 - Métodos diretos X Métodos iterativos;
 - Métodos iterativos básicos X *Multigrid*.
-

Introdução.



Para a solução da equação $Ax = b$, tem-se o seguinte método que é chamado de método iterativo básico:

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

Considera-se o método no seguinte modo:

$$x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + M^{-1}b$$

A matriz S , dada por $S = M^{-1}N$ é chamada de matriz de iteração do método.

Definição: O método iterativo $x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + M^{-1}b$ é chamado de convergente se $\lim_{m \rightarrow \infty} \|S\|^m = 0$.

Definição: O raio espectral da matriz A é dado por $\rho(A) = \max|\lambda(A)|$, onde $\lambda(A)$ são os autovalores de A .

Teorema: O método iterativo $x^{(m+1)} = Sx^{(m)} + M^{-1}b$ é convergente se e só se $\rho(S) < 1$.

Exemplos de métodos iterativos básicos:

- i) Método de Jacobi (ponto ou linha)
 - ii) Método de Jacobi Ponderado
 - iii) Método Gauss-Seidel (ponto ou linha)
 - iv) Método Jacobi-Gauss-Seidel
 - v) Método da fatoração LU incompleta
 - vi) Método das iterações distributivas
-

Ao estudar-se o erro em sistemas lineares do tipo $Au=f$, é suficiente trabalhar com o sistema linear homogêneo $Au=0$.
(lembrar que $S = M^{-1}N$).

Uma boa estimativa inicial consiste de vetores chamados de modos de Fourier:

$$v_j = \text{sen}\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq n$$

Análise de Erros de Fourier

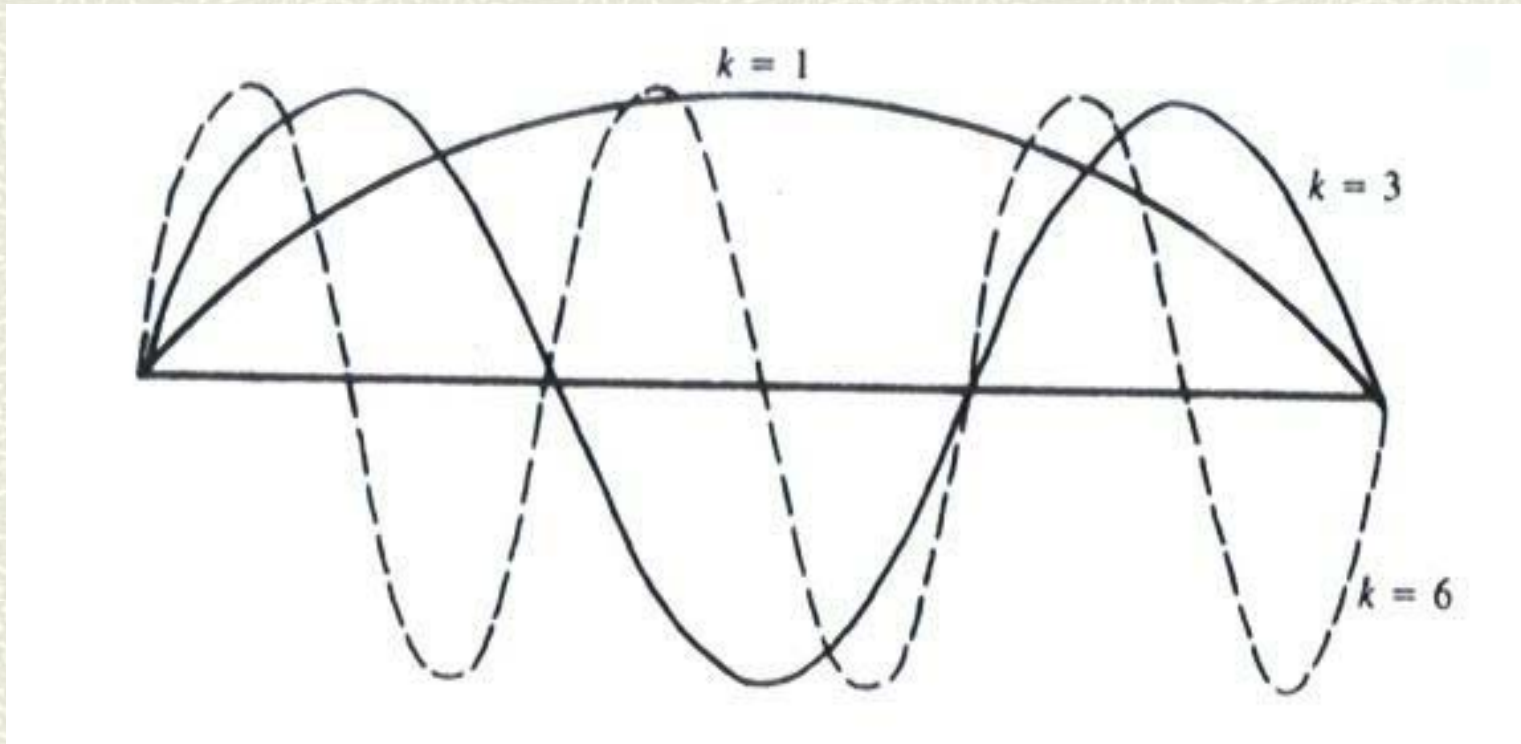


Figura: Modos de Fourier com $k=1, 3, 6$ (BRIGGS *et al.*, 2000).

Definição: Os modos de Fourier da parte inferior do espectro, com $1 \leq k < \frac{n}{2}$, são chamados de modos de Fourier de baixa frequência ou modos suaves.

Definição: Os modos de Fourier da parte superior do espectro, com $\frac{n}{2} \leq k \leq n - 1$, são chamados de modos de Fourier de alta frequência ou modos oscilatórios.

Definição: A propriedade de eliminar os modos oscilatórios e deixar apenas modos suaves chama-se propriedade de suavização.

Obs.: Os métodos iterativos que desfrutam da propriedade de suavização trabalham bem para as iterações iniciais.

Análise de Erros de Fourier

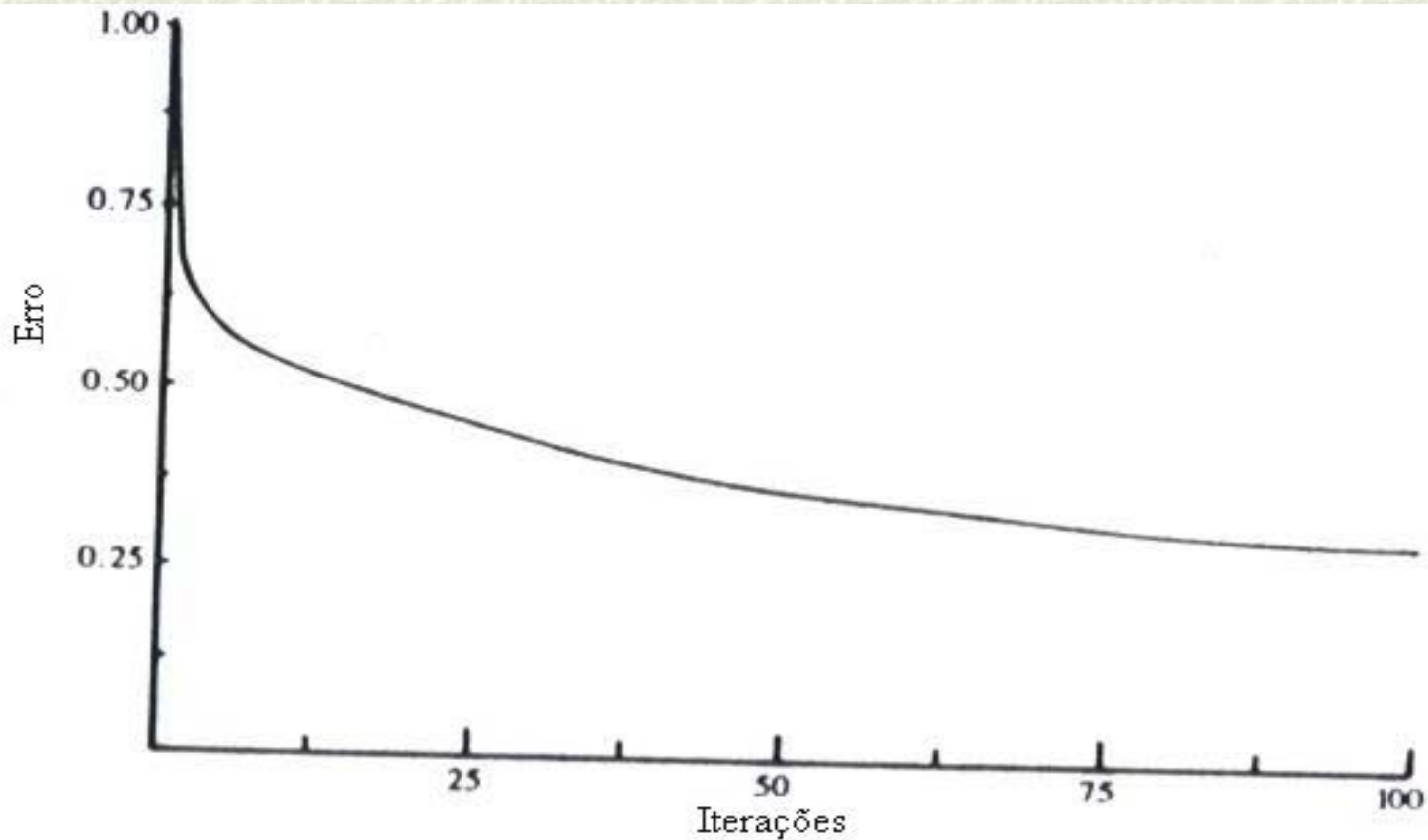


Figura: Jacobi ponderado com $w=2/3$ aplicado ao problema unidimensional com $n=64$, estimativa inicial $(v_1+v_6+v_{32})/3$ e para 100 iterações (BRIGGS *et al.*, 2000).

Análise de Erros de Fourier.

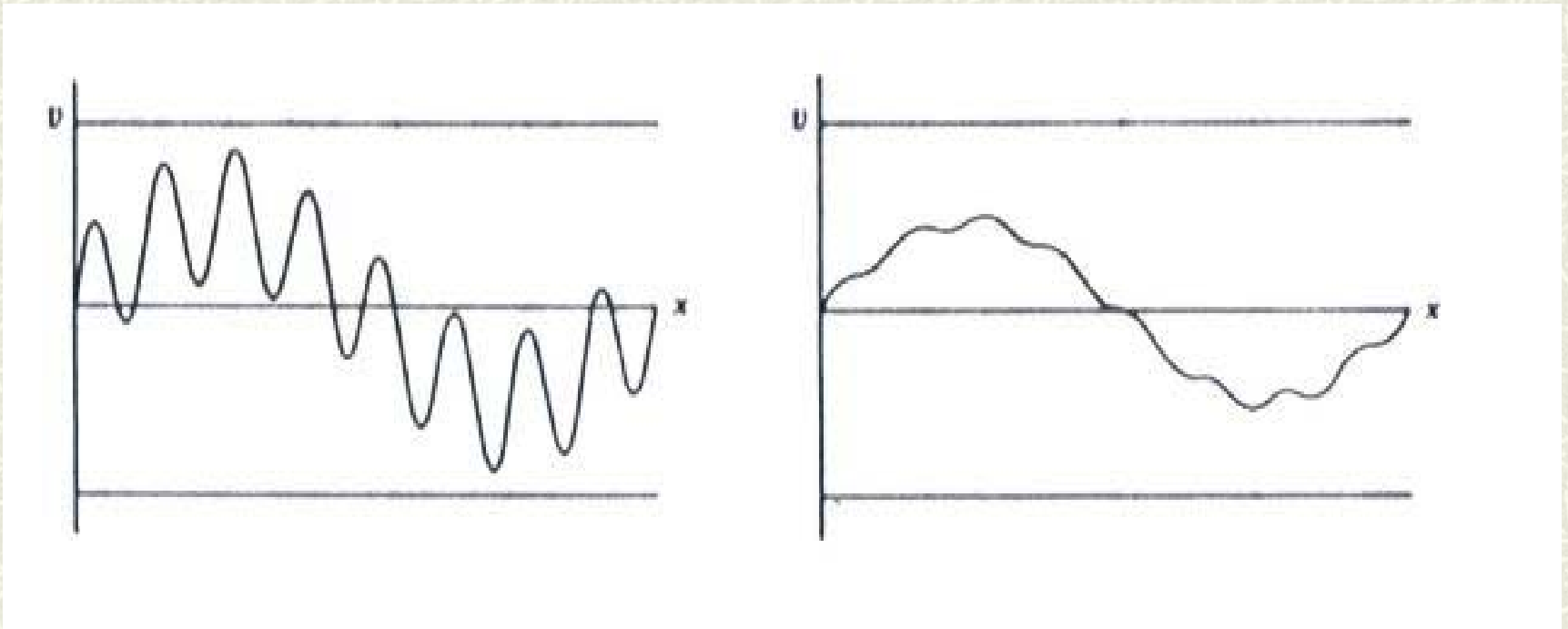


Figura: Jacobi ponderado com $w=2/3$ aplicado ao problema unidimensional com $n=64$, com estimativa inicial $(u_2+u_{16})/2$ antes (esquerda) e depois (direita) de 10 iterações (BRIGGS *et al.*, 2000).

Métodos *Multigrid*: Introdução

Observa-se como as componentes de erro suave apresentam-se em uma malha mais grossa.

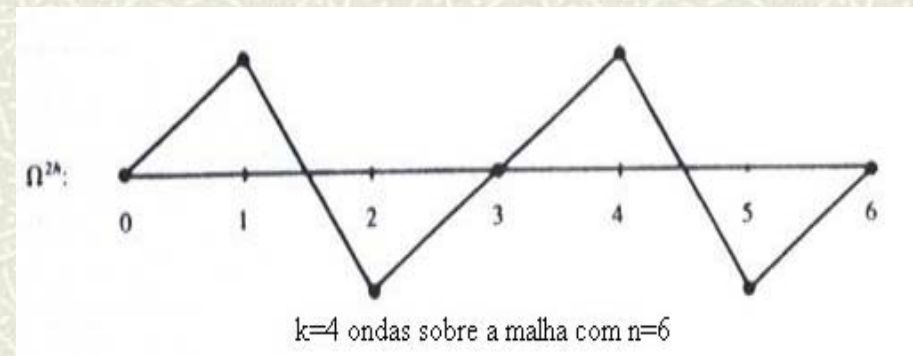
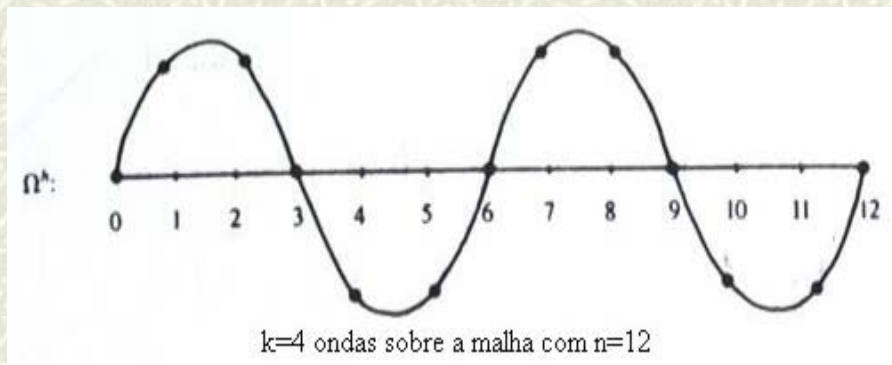


Figura: Número de ondas $k=4$ sobre uma malha fina com $n=12$ e sobre uma malha grossa com $n=6$ (BRIGGS *et al.*, 2000).

Métodos *Multigrid*: Introdução.

Algumas questões aparecem no esquema de correção, como por exemplo:

- como transferir da malha Ω^h para a malha Ω^{2h} e vice-versa?
 - como calcular o operador A em Ω^{2h} ?
 - qual a estimativa inicial para iterar em Ω^{2h} ?
-

Operador de restrição com ponderação completa

I_h^{2h} :

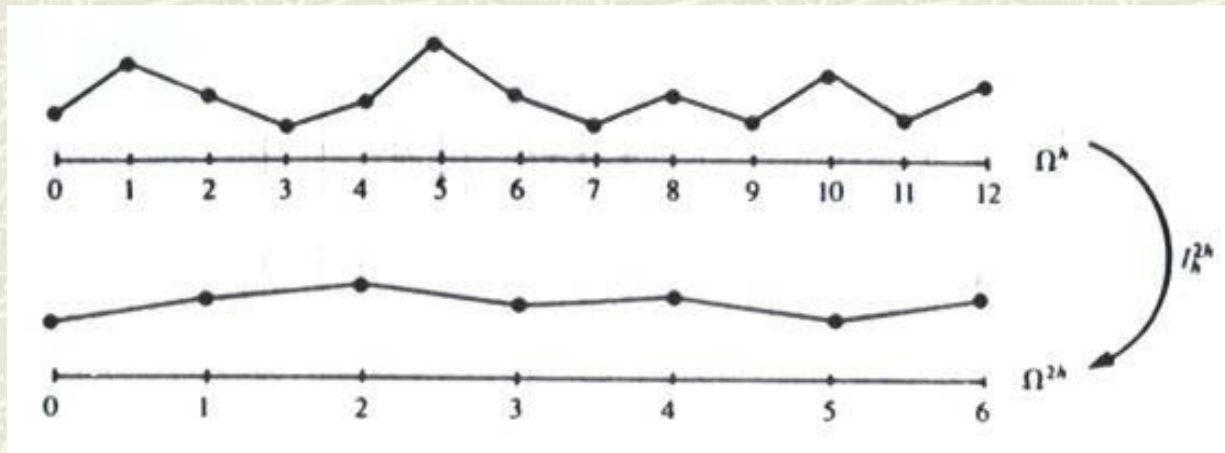


Figura: Operador restrição por ponderação completa da malha fina para a malha grossa (BRIGGS *et al.*, 2000).

Métodos *Multigrid*: Operadores

Operador de prolongação por interpolação linear I_{2h}^h :

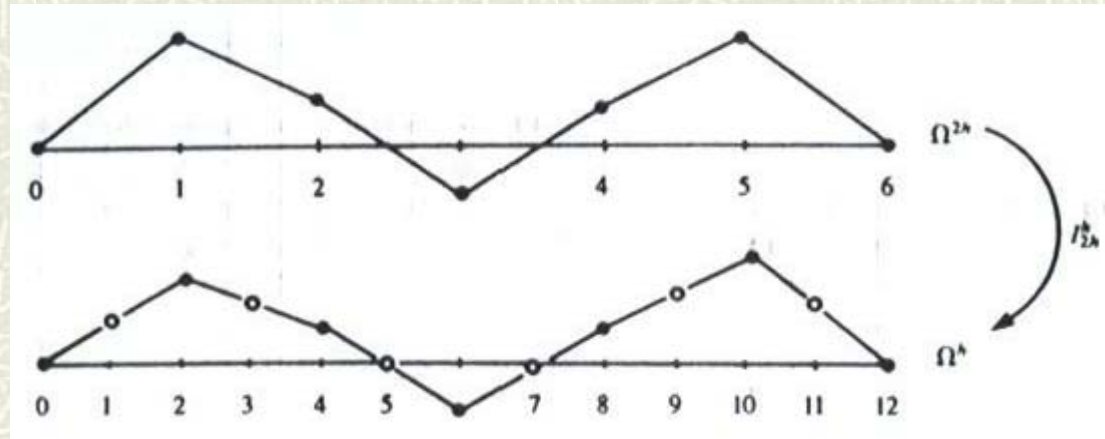


Figura: Operador de prolongação da malha grossa para a malha fina (BRIGGS *et al.*, 2000).

Existem basicamente duas formas para se obter A^{2h} :

-Aproximação de malha grossa por discretização: como A^h , A^{2h} também é obtida pela discretização da EDP.

- Aproximação de malha grossa por Galerkin:

$$A^{2h} = I_h^{2h} A^h I_{2h}^h$$

Métodos *Multigrid*: Algoritmos

A figura abaixo mostra um Ciclo-V com $K=5$.

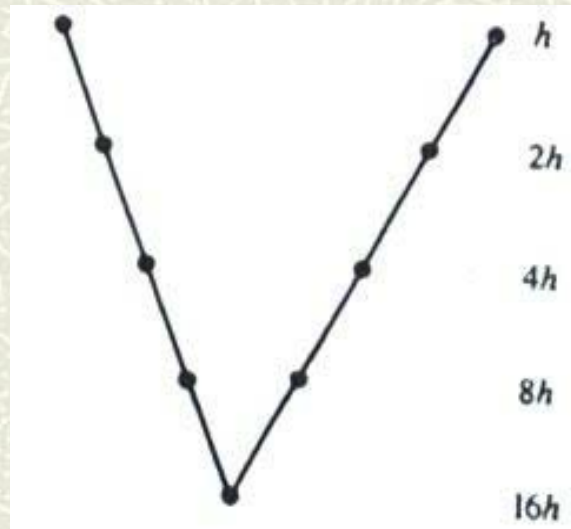


Figura: Diagrama Ciclo-V (BRIGGS *et al.*, 2000)

Operação de suavização seguida de operadores de transferência entre malhas.

Métodos *Multigrid*: Algoritmos

Pode-se obter uma generalização do Ciclo-V que é conhecida como ciclo- μ , gerando os conhecidos Ciclo-W, Ciclo-dente-de-serra, Ciclo-F, etc.

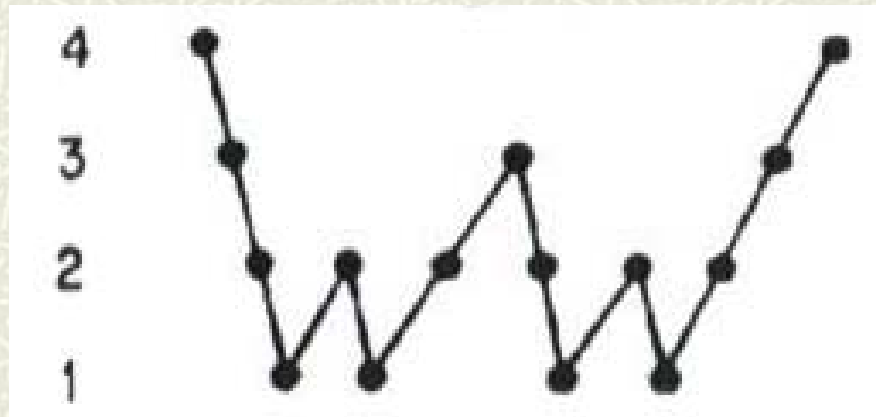


Figura: Diagrama Ciclo-W (WESSELING, 1992)

Métodos *Multigrid*: Algoritmos.

A figura abaixo mostra um diagrama com o Esquema *Multigrid* Completo (FMG), usando iterações aninhadas, para $K=4$.

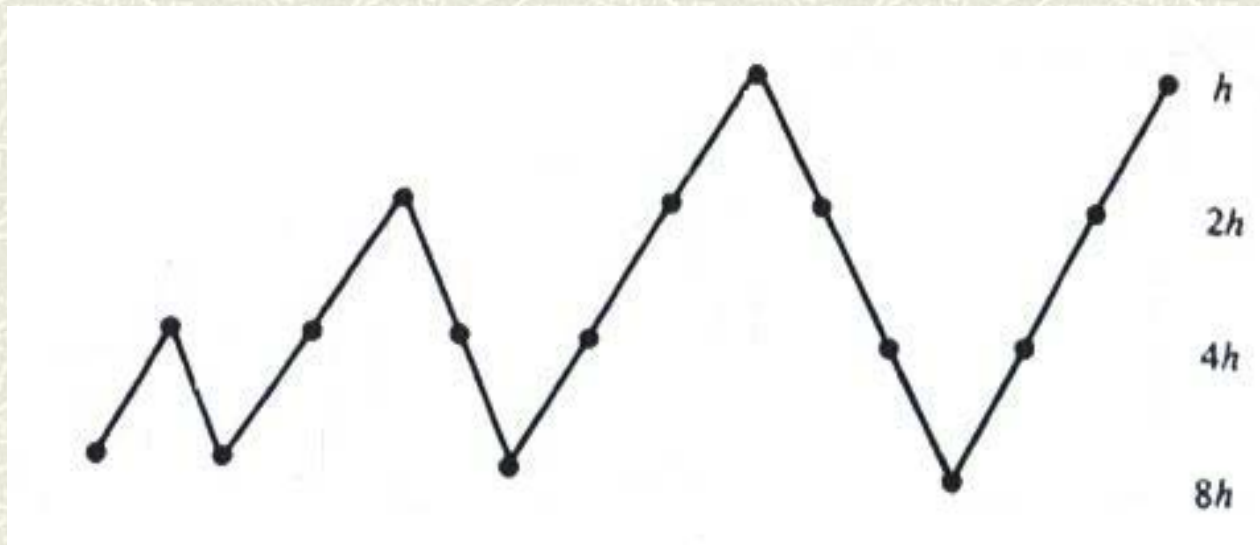


Figura: Diagrama *Multigrid* completo (WESSELING, 1992)

Métodos *Multigrid*: Não-linear

Seja $A(u) = f$ o sistema de equações algébricas não-lineares, onde $u, f \in R^n$.

Seja $A(u) - A(v) = r$ a equação residual.

Nota-se que, em geral, $A(e) \neq r$.

Método Newton-*Multigrid* (Newton-MG)

Da equação residual $A(u) - A(v) = r$, temos:

$$A(v + e) - A(v) = r$$

Expandindo $A(v + e)$ em uma série de Taylor e truncando no segundo termo, tem-se:

$$J(v).e = r$$

Esquema de aproximação completa (FAS)

A equação residual $A(v + e) - A(v) = r$ em Ω^h pode ser escrita como:

$$A^h(v^h + e^h) - A^h(v^h) = r^h$$

Que aparece na malha grossa como:

$$A^{2h}(v^{2h} + e^{2h}) - A^{2h}(v^{2h}) = r^{2h}$$