Tratamento das Equações, Implementação e Resultados

Roteiro

- Equações
- Discretização
- Algoritmos – Ciclo V
- Implementação
- Testes realizados
- Resultados obtidos

Modelos matemáticos – 1D

Difusão:

$$\begin{cases} u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases}$$

Advecção/Difusão:

$$\begin{cases} Pe.u_x = u_{xx}, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases}$$

Equação de Burgers:
(não linear)

$$\begin{cases} Re.u_x^2 = u_{xx} + S, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases}$$

onde $$S = \frac{\mathrm{Re}^2 e^{x\mathrm{Re}}(2e^{x\mathrm{Re}} - e^{\mathrm{Re}} - 1)}{(e^{\mathrm{Re}} - 1)^2}$$

Discretização – MDF
malha uniforme

- Difusão

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} = f_i \qquad \begin{cases} 2 \le i \le N_f \\ T_1 = 0 \\ T_{N_f+1} = 1 \end{cases}$$

Coeficientes

$$A_E = \frac{1}{h^2}, \quad A_p = \frac{2}{h^2}, \quad A_w = \frac{1}{h^2}, \quad B_p = -f_i$$

Discretização – MDF malha uniforme

- Advecção/Difusão

$$Pe\frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} \qquad \begin{cases} 2 \le i \le N_f \\ T_1 = 0 \\ T_{N_f+1} = 1 \end{cases}$$

Coeficientes

$$A_E = \frac{1}{h^2}, \quad A_p = \frac{2}{h^2} + \frac{Pe}{h}, \quad A_w = \frac{1}{h^2} + \frac{Pe}{h}, \quad B_p = 0$$

Discretização – MDF malha uniforme

- Equação de Burgers (não linear)

$$\mathrm{Re}\,\frac{v_i^2 - v_{i-1}^2}{h} = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + S_i \qquad \begin{cases} 2 \le i \le N_f \\ v_1 = 0 \\ v_{N_f+1} = 1 \end{cases}$$

Coeficientes

$$A_E = \frac{1}{h^2}, \qquad A_p = \frac{\mathrm{Re}\,v_p}{h} + \frac{2}{h^2}, \qquad A_w = \frac{\mathrm{Re}\,v_w}{h} + \frac{1}{h^2}, \qquad B_p = S_p$$

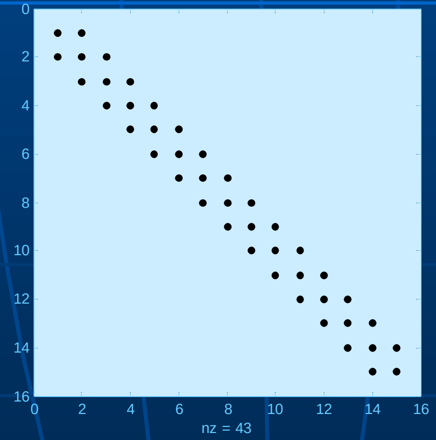
Solução da iteração anterior

Discretização – MDF malha uniforme

- A discretização conduz a um sistema de equações da forma

$$Ax = b$$

A matriz dos coeficientes (A), para os 3 casos, tem a seguinte estrutura



Algoritmos – Ciclo V

- Linear (para dois níveis)

Esquema de correção em malha grossa

$$v^h \leftarrow CG\left(v^h, f^h\right)$$

Itere n_1 vezes em $A^h u^h = f^h$ na malha Ω^h com aproximação inicial v^h

Calcule o resíduo $r^{2h} = I_h^{2h}\left(f^h - A^h v^h\right)$

Resolva $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ na malha Ω^{2h}

Transfira o erro da malha grossa para a fina $e^h \leftarrow I_{2h}^h e^{2h}$

Atualize $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h e^{2h}$

Itere n_2 vezes em $A^h u^h = f^h$ na malha Ω^h com aproximação inicial v^h

Algoritmos – Ciclo V

- O trabalho do algoritmo

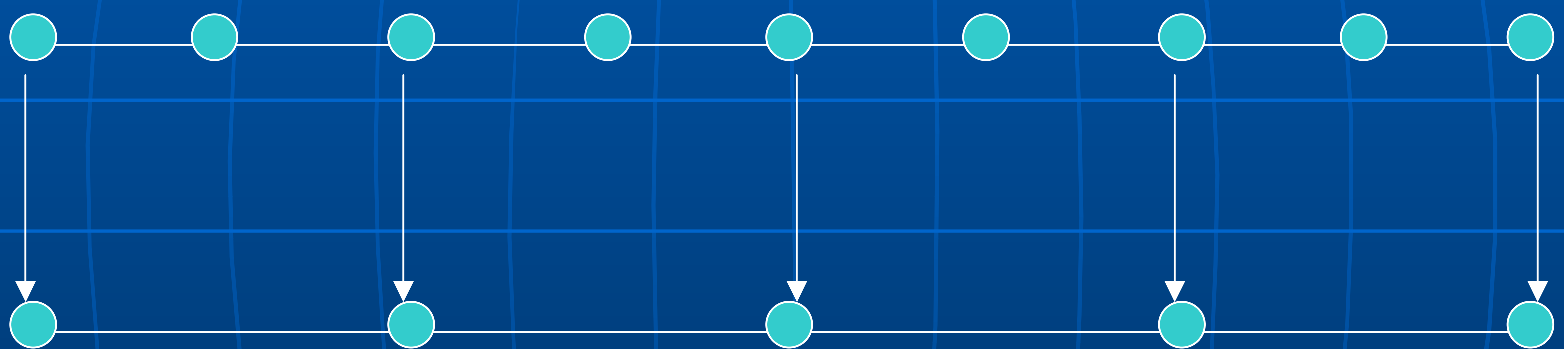
Implementação

- Linguagem: fortran/95
- Condição de Fronteira de Dirichlet
- Método das Diferenças Finitas
- Malha Uniforme e Estruturada
- Multigrid Geométrico - Ciclo V
- Suavizador: Gauss-Seidel
- Engrossamento padrão: 1/2
- Restrição: Injeção
- Prolongação: Interpolação Linear

Implementação

Como fazer a restrição e a Prolongação ?

Restrição: injeção



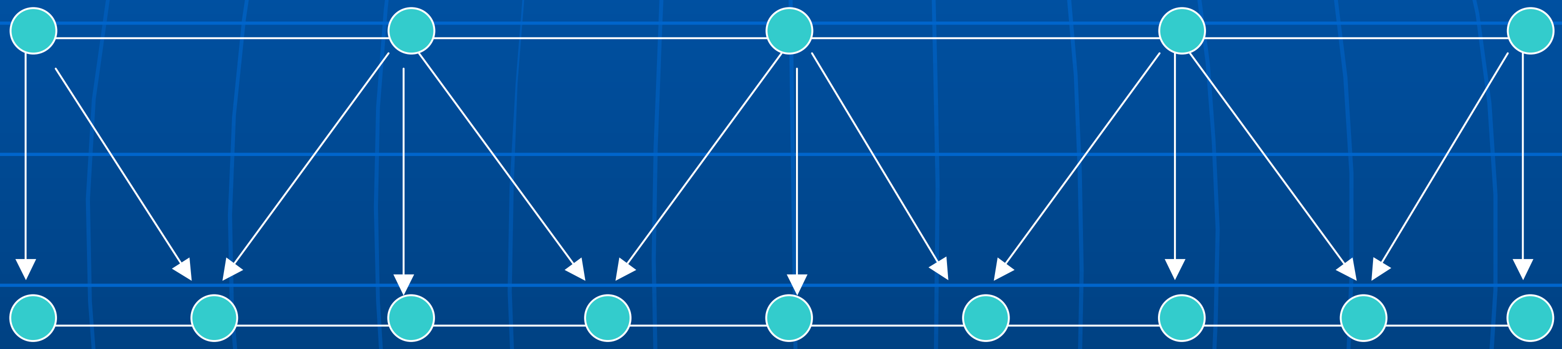
$$\vec{\phi}_i^{\,H} = K_r \vec{\phi}_{cr}^{\,h} + \left(1 - K_r\right)\vec{\phi}_{cr+1}^{\,h}; \quad 2 \le i \le N^H$$

$$cr = ceiling\left(\frac{q}{p}(i-1)\right), \quad K_r = cr - \frac{q}{p}(i-1), \quad N^{\mathrm{H}} = N^{\mathrm{h}}.\frac{p}{q}$$

$$ceiling : \Re \to Z \qquad x \mapsto ceiling(x) = \min\{z \in Z \,/\, z \ge x\}$$

Implementação

Prolongação: Interpolação Linear



$$\vec{\phi}_i^{\,h} = K_p \,.\, \vec{\phi}_{cp}^{\,H} + \left(1 - K_p\right) . \vec{\phi}_{cp+1}^{\,H} ; \quad 2 \le i \le N^H$$

$$cp = ceiling\left(\frac{p}{q}(i-1)\right), \quad K_p = cp - \frac{p}{q}(i-1)$$

Implementação

O programa

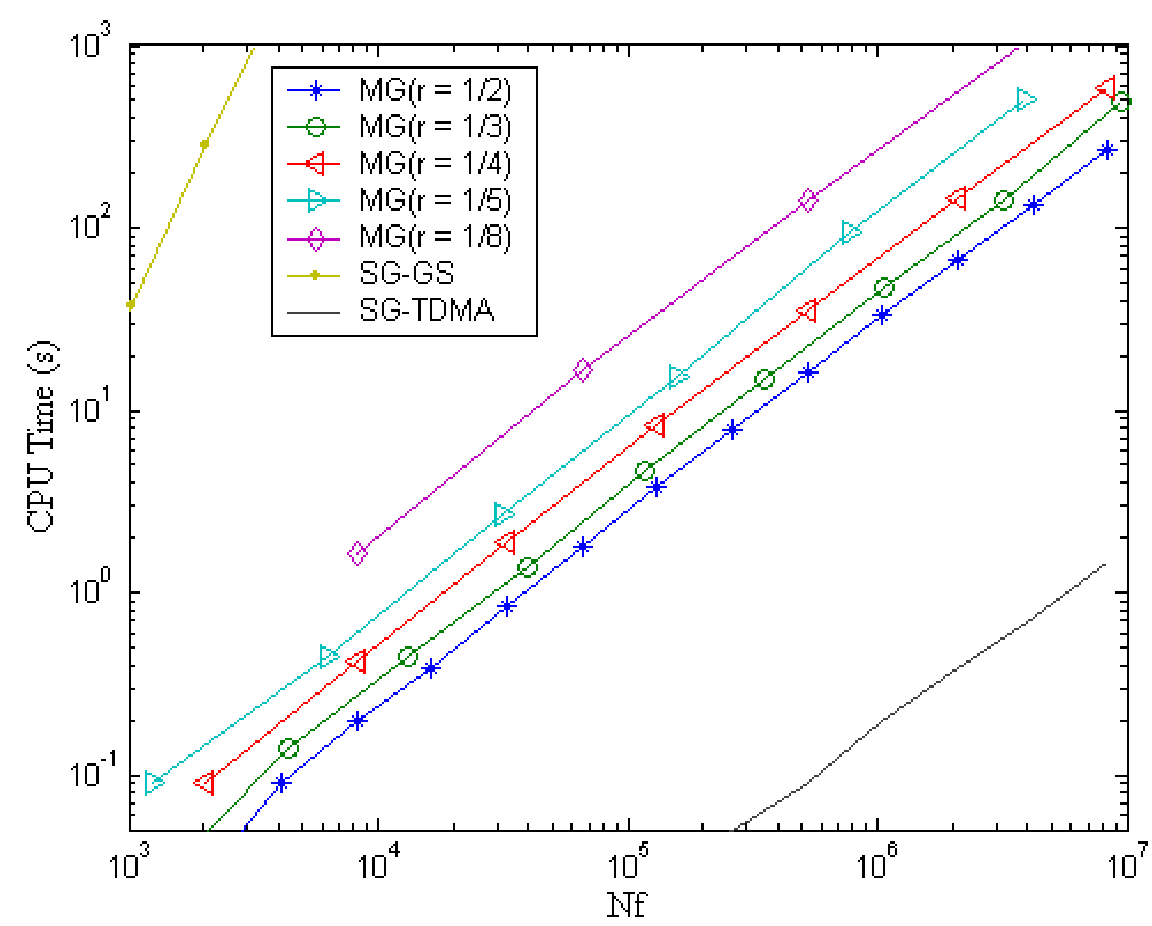
Testes realizados

Razão de Engrossamento	Estimativa inicial	Tolerância
1/2	T = 0 T = 0,5 T = 1	10e-07 10e-04 10e-10
1/3		
1/4		
1/5		
1/8		

Para cada razão de engrossamento foi testado as 3 tolerâncias e as 3 condições iniciais.

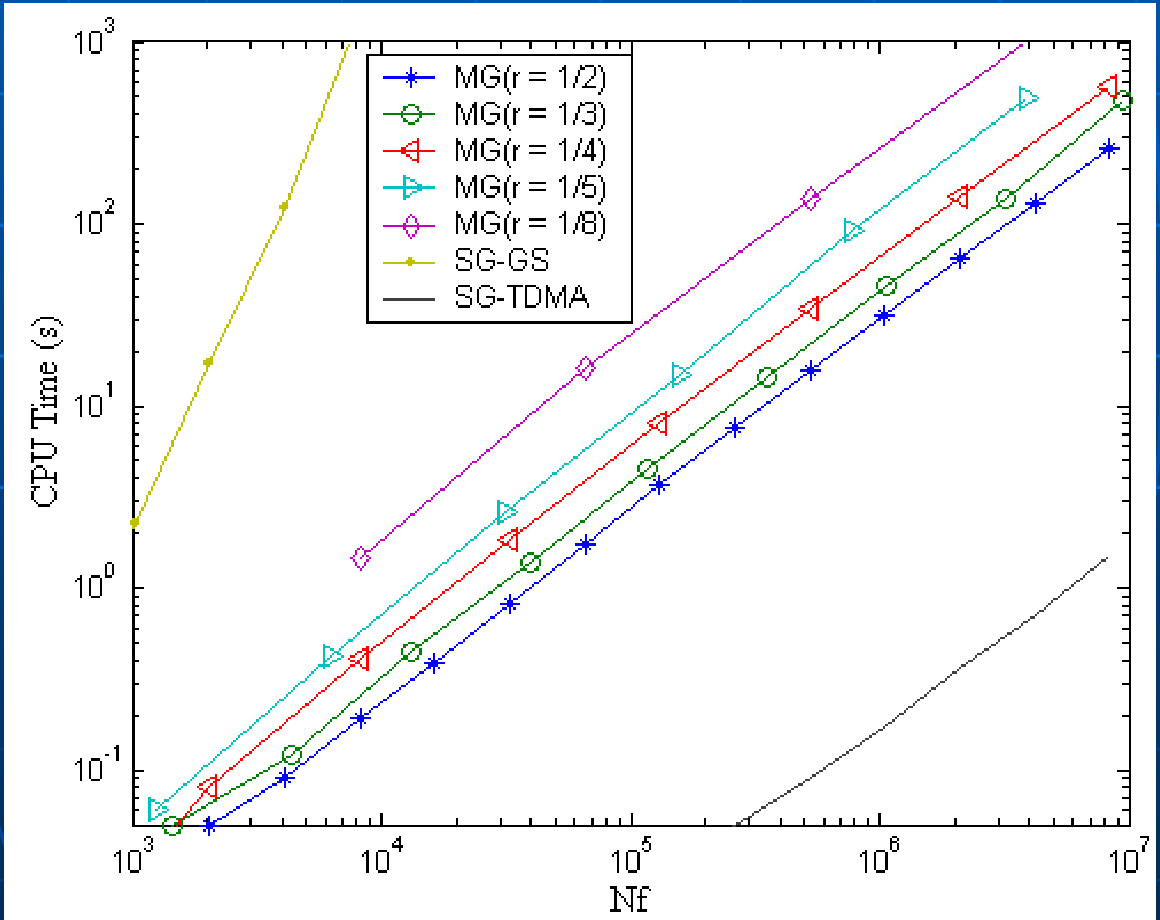
Resultados obtidos

Difusão



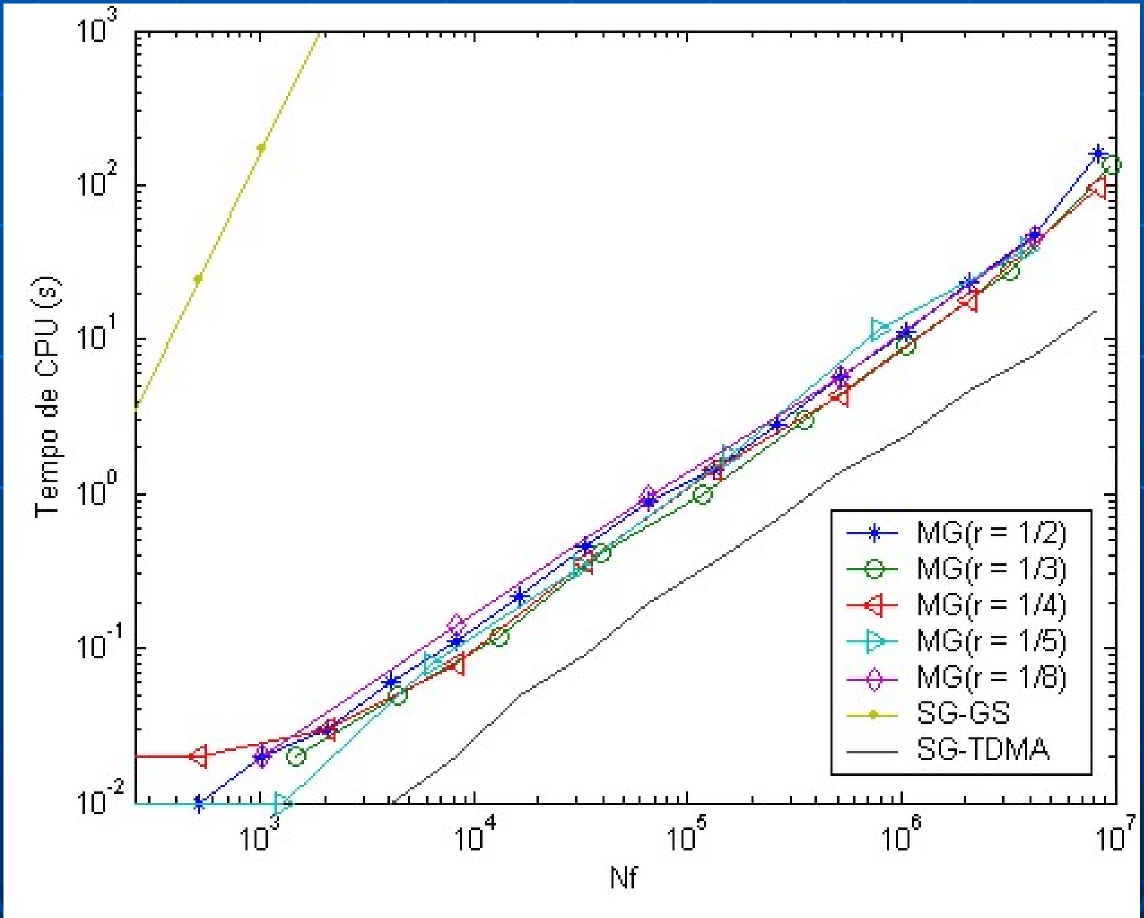
Resultados obtidos

Advecção/Difusão



Resultados obtidos

Equação de Burgers



Tratamento das Equações, Implementação e Resultados