

## **INTRODUÇÃO**

---

Neste capítulo introdutório, inicialmente situa-se os métodos numéricos entre os demais métodos de engenharia: os métodos experimentais e analíticos. Em seguida, são apresentados os tipos de problemas que são abordados neste curso, que incluem condução de calor e termoelasticidade, três tipos de condições de contorno, quatro sistemas de coordenadas e diversas variáveis de interesse. São mencionados os tipos de modelos numéricos empregados e definidas as etapas principais para a obtenção de uma solução numérica. Finalmente, delinea-se a estrutura deste curso.

A simulação numérica de problemas de engenharia ocupa atualmente uma posição de destaque no cenário mundial de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. O crescente interesse, tanto no meio acadêmico como no setor industrial, pela modelagem dos fenômenos físicos, associado ao crescimento exponencial da tecnologia da informática, desencadeou nas últimas décadas uma enorme procura pelas técnicas de simulação. Desta união surgiram os simuladores comerciais, para os quais, a cada momento, novas ferramentas e técnicas são desenvolvidas, incorporadas e disponibilizadas.

Este texto apresenta o método de diferenças finitas, precursor dos métodos numéricos, para simulação de problemas em mecânica computacional. Um enfoque importante é dado à quantificação de erros numéricos para avaliar a confiabilidade dos resultados obtidos das simulações. A concepção do código computacional é deixada a cargo do leitor. Porém, ao longo do curso, são apresentados algoritmos sugeridos para implementação de programas computacionais e discutidas algumas técnicas que permitem detectar erros de programação.

### **1.1 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA**

Três tipos de métodos podem ser empregados na solução de um problema de engenharia: experimentais, analíticos e numéricos, conforme representado na Fig. 1.1. Cada um destes tipos

de métodos apresenta vantagens e desvantagens sobre os demais dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo. Discussões a respeito podem ser vistas nos textos de Roache (1998b), Maliska (1995), Fortuna (2000) e Tannehill *et al.* (1997). Com base nestas referências, são apresentadas a seguir as características principais que distinguem cada tipo de método e fornecidos alguns exemplos.

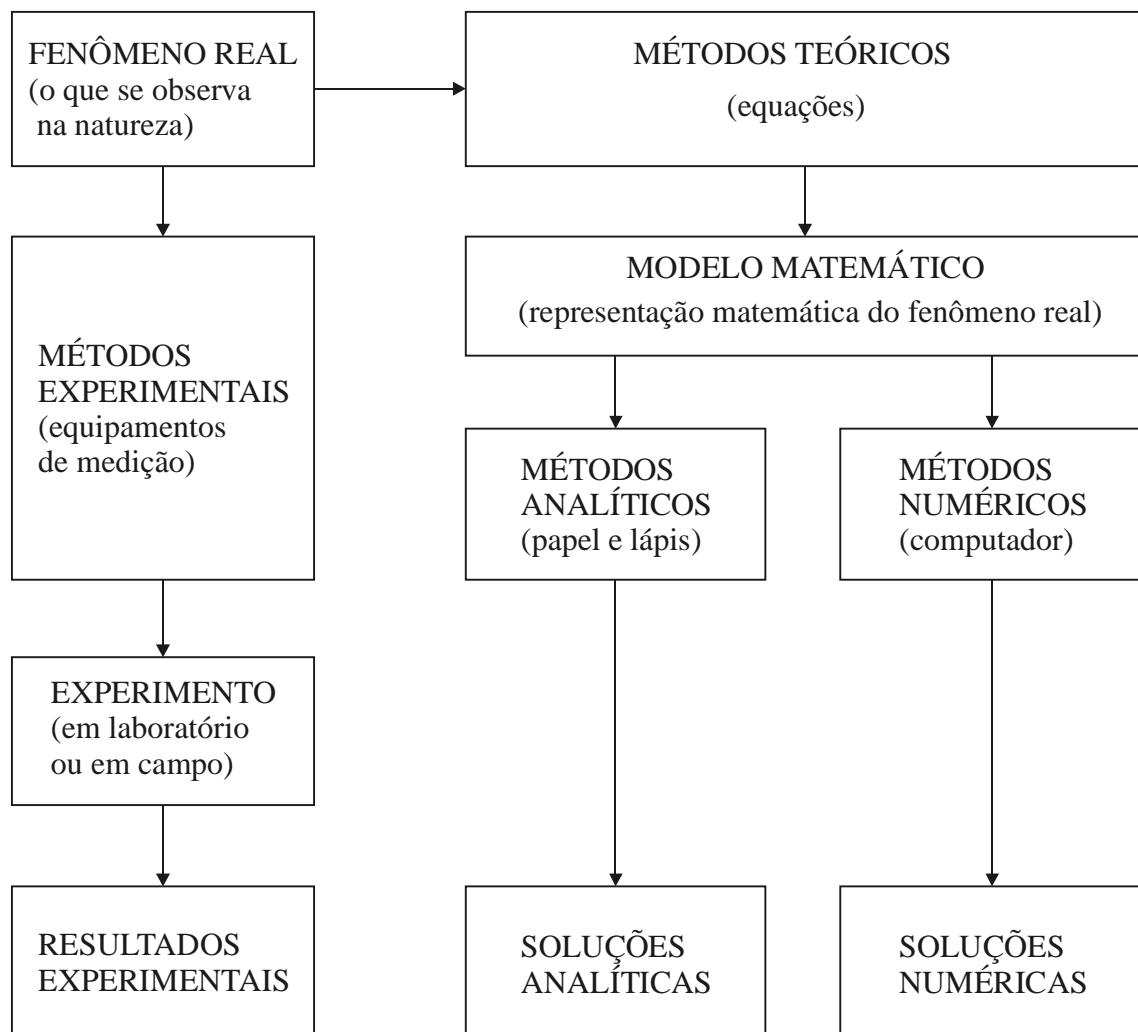


Figura 1.1 Métodos de solução de problemas de engenharia.

### 1.1.1 Métodos Experimentais

Os métodos experimentais, modernamente, tiveram início no século XVII com os trabalhos de Galileu Galilei sobre o movimento dos corpos. Suas características principais são:

- trabalham com o fenômeno real; por exemplo, a determinação do arrasto e da sustentação de um avião voando em diversas velocidades;
- cada problema é resolvido ou estudado com base num “experimento”, realizado em laboratório, com o uso de modelos em escala reduzida, como um avião em túnel de vento, ou em campo, em geral envolvendo problemas na escala real, como a evolução estelar com base em observações do Sol e de outras estrelas ou a circulação sanguínea no corpo humano;
- empregam equipamentos de medição para medir o valor das grandezas de interesse, isto é, para obter os resultados experimentais, que podem ser globais, por exemplo, a força de arrasto sobre um avião, ou locais, como a velocidade do sangue dentro de uma artéria do corpo humano numa determinada posição; e
- apresentam erros experimentais.

### 1.1.2 Métodos Analíticos

Os métodos analíticos, modernamente, tiveram início também no século XVII com o livro *Principia* (1687) de Isaac Newton, que formulou suas três leis do movimento e realizou estudos sobre a gravitação e a luz. Suas características principais são:

- trabalham com uma representação matemática do fenômeno real, isto é, com um modelo matemático; as equações de Navier-Stokes (Tannehill *et al.*, 1997) para o movimento de fluidos como o ar são um exemplo;
- as soluções analíticas, isto é, as soluções dos problemas, de forma bastante simplificada, são obtidas com o emprego de papel e lápis;
- as soluções analíticas são contínuas sobre o domínio de cálculo e em forma fechada, tanto para variáveis locais quanto globais;
- aplicam-se a problemas com equações, geometrias e condições de contorno e iniciais muito simples, ou seja, os problemas que conseguem resolver são as exceções;
- não se aplicam a problemas para os quais não existem modelos matemáticos; e
- apresentam erros de modelagem.

### 1.1.3 Métodos Numéricos

Alguns métodos numéricos usados em mecânica computacional são os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos (Minkowycz *et al.*, 1988) e elementos de contorno. Roache (1998b) considera que os métodos numéricos tiveram início com o trabalho de Richardson (1910), que resolveu, entre outras, a equação de Laplace bidimensional (Incropera e

DeWitt, 1998) com o método de diferenças finitas antes da era do computador digital, empregando computadores humanos. Suas características principais são:

- também trabalham com uma representação matemática do fenômeno real, isto é, com um modelo matemático; novamente, as equações de Navier-Stokes para o movimento de fluidos como o ar são um exemplo;
- as soluções numéricas, isto é, as soluções dos problemas são obtidas com o emprego de computadores, tanto para variáveis locais quanto globais;
- as soluções numéricas são discretas, isto é, são obtidas em pontos específicos do domínio de cálculo;
- aplicam-se a problemas com equações, geometrias e condições de contorno e iniciais mais gerais do que aqueles resolvidos através de métodos analíticos;
- também não se aplicam a problemas para os quais não existem modelos matemáticos; e
- apresentam erros de modelagem e numéricos.

Os métodos analíticos e numéricos também são denominados de métodos teóricos (Maliska, 1995) porque ambos trabalham com modelos matemáticos. Aeschliman e Oberkampf (1998) é um exemplo de trabalho que trata da interação entre os métodos experimentais e numéricos para maximizar as vantagens de cada um na solução de problemas, isto é, para minimizar suas desvantagens e diminuir seus erros. Este tipo de interação entre métodos experimentais e numéricos também é empregado no aprimoramento e concepção de novos modelos matemáticos, como por exemplo, a modelagem da turbulência em escoamentos de fluidos. Os projetos de engenharia devem usar os métodos adequados, e na medida adequada, a cada problema.

## **1.2 MODELOS MATEMÁTICOS E VARIÁVEIS DE INTERESSE**

Os modelos matemáticos que são abordados neste curso representam problemas básicos de mecânica computacional. Eles incluem:

1. Condução de calor linear, unidimensional, em regime permanente.
2. Termoelasticidade linear, unidimensional, em regime permanente.
3. Condução de calor linear, unidimensional, em regime transiente.
4. Condução de calor não-linear, unidimensional, em regime permanente.
5. Condução de calor linear, bidimensional, em regime permanente.

6. Termoelasticidade linear, bidimensional, em regime permanente.

Condições de contorno do tipo (Incropera e DeWitt, 1998):

- Dirichlet;
- Neumann; e
- Robin.

Sistemas de coordenadas:

- cartesiano;
- cilíndrico;
- esférico; e
- generalizado.

Variáveis independentes: direções coordenadas; por exemplo,  $X$  no caso unidimensional.

Variáveis dependentes primárias (de campo, locais) obtidas da solução de equações diferenciais:

- temperatura; e
- deslocamentos.

Variáveis secundárias obtidas a partir das variáveis primárias:

- deformações (de campo, locais);
- tensões (de campo, locais);
- temperatura média (global);
- taxa de transferência de calor nos contornos (locais);
- forças nos contornos (locais).

### 1.3 MODELOS NUMÉRICOS

Os seis tipos de problemas mencionados na seção anterior, com suas condições de contorno, sistemas de coordenadas e variáveis de interesse são resolvidos através do método de diferenças finitas, envolvendo:

- 11 tipos de aproximações numéricas;
- alguns métodos de solução de sistemas lineares; entre eles, Gauss-Seidel (Kreyszig, 1999) e TDMA (Maliska, 1995);
- malhas uniformes, não-uniformes, não-ortogonais e não-estruturadas;
- técnicas de blocagem, multiblocos e multigrid; e
- formulações implícita, totalmente implícita e explícita.

Simplificadamente, a obtenção da solução numérica de um problema pode ser dividida em seis etapas:

1) **Definição do problema:**

- modelo matemático (equações, condições de contorno e iniciais);
- geometria do domínio de cálculo; e
- propriedades dos meios sólidos e fluidos envolvidos no problema.

2) **Definição do modelo numérico**, isto é, todos os métodos, esquemas e procedimentos específicos que são usados para resolver numericamente o problema, incluindo:

- tipo de malha;
- método numérico;
- tipos de aproximações numéricas;
- variáveis de interesse;
- *solver*;
- estimadores de erros numéricos;
- *hardware*;
- algoritmo do programa computacional; e
- *software*: linguagem de programação, precisão e compilador.

3) **Discretização do domínio de cálculo**: gera-se a malha, que consiste em  $N$  nós ( $j$ ) sobre os quais a solução numérica é obtida. O comprimento entre dois nós consecutivos da malha ( $h$ ) é denominado de elemento da malha. A soma do comprimento de todos os elementos ( $N-1$  nós) de uma malha resulta no comprimento total do domínio de cálculo ( $L$ ).

4) **Discretização do modelo matemático**: os termos das equações que constituem o modelo matemático e suas condições de contorno e iniciais são aproximados numericamente através de um método numérico, gerando um sistema de equações algébricas, também denominado de equações discretizadas.

5) **Obtenção da solução numérica:** as equações discretizadas são resolvidas com algum método (*solver*) direto ou iterativo (Ferziger e Peric, 1999; Maliska, 1995) para solução de sistemas de equações.

6) **Análise dos resultados:**

- gráficos bi e tridimensionais;
- isolinhas;
- isorregiões;
- isosuperfícies;
- vetores; e
- incertezas de modelagem e numérica.

## 1.4 ESTRUTURA DO CURSO

Este curso está dividido em três partes constituídas por diversos capítulos, conforme descreve-se a seguir.

### **Parte I (Básica): Problemas unidimensionais**

A Parte I envolve os capítulos 2 a 5. Nela, são abordados problemas de condução de calor, elasticidade e termoelasticidade. Todos eles considerados lineares, unidimensionais, em regime permanente, coordenadas cartesianas e com malhas uniformes.

### **Parte II (Intermediária): Problemas multidimensionais**

A Parte II envolve os capítulos 6 a ???. Nela, também são abordados problemas de condução de calor, elasticidade e termoelasticidade, lineares ou não, multidimensionais, nos regimes permanente e transiente. São usadas coordenadas cilíndricas e esféricas, além de cartesianas com malhas uniformes.

### **Parte III (Avançada): Tópicos Avançados**

A Parte III envolve os capítulos ??? a ???. Nela, são abordados os mesmos problemas das Partes I e II mas com malhas não-uniformes, não-estruturadas e não-ortogonais. Além disso, são apresentadas técnicas de blocagem, multiblocos e multigrid.