ERROS DE ARREDONDAMENTO

O erro de arredondamento ($E\pi$) de um variável de interesse (ϕ) é definido por

$$E(\phi_\pi) \quad = \quad \Phi \quad - \quad \phi_\pi \tag{1}$$

onde

Φ = solução analítica exata da variável de interesse

ϕ_π = solução numérica sem erros de discretização, de iteração e outros tipos de erros

A causa dos erros de arredondamento é a representação finita dos números reais nas computações. Estes números são representados com uma determinada precisão (em Fortran com precisão simples, dupla ou quádrupla que resulta respectivmente em 7, 16 ou 34 algarismos significativos). Esta precisão depende do compilador (*software*) usado para gerar o código computacional e do computador (*hardware*) empregado em sua execução.

Os erros de arredondamento provocam perda de precisão dos números, que ocorre basicamente por três motivos:

1) Número de cálculos: provoca perda de precisão no lado direito dos números. Como pode ser visto na Fig. 1, em geral, quanto menor o tamanho dos volumes de controle (h), isto é, quanto maior o número de nós (N), maior é o número de cálculos para obter a solução e, conseqüentemente, maior é o valor do erro de arredondamento.
2) Cancelamento subtrativo: cálculos envolvendo a subtração entre dois números com valores próximos provoca perda de precisão no lado esquerdo dos números; isso ocorre, por exemplo, no cálculo de erros verdadeiros e estimados, e ordem efetiva.
3) Diferença de ordem: cálculos envolvendo operações matemáticas entre dois números com valores muito diferentes provocam perda de precisão no lado direito do resultado da operação matemática; isso ocorre, por exemplo, no cálculo de coeficientes.

Um modelo simples (grosseiro) que permite estimar a perda de precisão (Δp) devido ao número de cálculos, ou seja, o número de algarismos do lado direito dos números que está afetado por erros de arredondamento, é

$$\Delta p_{\max} \quad = \quad O(N) \quad \text{a} \quad O(N^2) \tag{2}$$

onde N é o número máximo de volumes de controle nas dimensões espaciais do problema, e $O(N)$ indica a ordem de grandeza da variável entre parênteses. Alguns exemplos são apresentados a seguir.

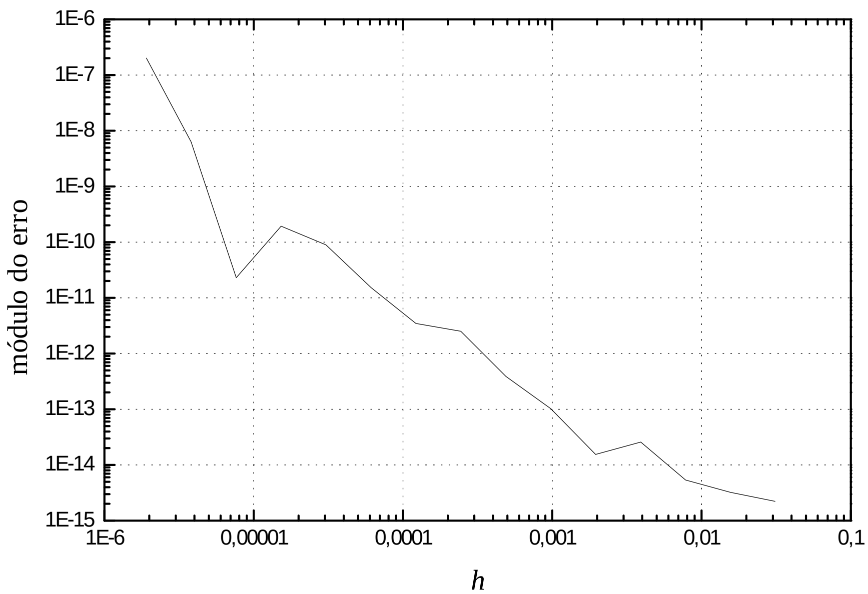

Figura 1. Exemplo do comportamento geral dos erros de arredondamento.

Exemplo 1 (1D): $N = 100 = 10^2 \quad \rightarrow \quad O(N) = 2$

$N^2 = (100)^2 = 10^4 \quad \rightarrow \quad O(N^2) = 4$

Portanto: $\Delta p_{\text{max}} = 2$ a 4 algarismos

Se $\phi = 1{,}2345678\text{x}10^3$, então 2, 3 ou 4 algarismos do lado direito podem estar afetados por erros de arredondamento.

Exemplo 2 (1D): $N = 65536 = 6{,}536\text{x}10^4 \quad \rightarrow \quad O(N) = 4$

$N^2 = (65536)^2 \cong 4{,}29\text{x}10^9 \quad \rightarrow \quad O(N^2) = 9$

Portanto: $\Delta p_{\text{max}} = 4$ a 9 algarismos

Se $\phi = 1{,}2345678\text{x}10^3$, então é possível que todos os algarismos deste número estejam afetados por erros de arredondamento e, assim, seu valor não tem utilidade.

Exemplo 3 (2D): Malha 2D = 64 x 1024

N_{max} = 1024 = 1,24x10^3 $\rightarrow$ $O(N)$ = 3

$(N^2)_{max}$ = $(1024)^2$ $\cong$ 1,049x10^6 $\rightarrow$ $O(N^2)$ = 6

Portanto: Δp_{max} = 3 a 6 algarismos

Um **exemplo de cancelamento subtrativo** é dado a seguir. Duas soluções numéricas obtidas são ϕ_1 = 1,2345678x10^3 e ϕ_2 = 1,2344567x10^3. Ao se estimar o erro de discretização, no numerador tem-se a diferença entre estas duas soluções, isto é,

$$
\begin{array}{rl}
\phi_1 = & 1{,}2345678\text{x}10^3 \\
-\ \phi_2 = & 1{,}2344567\text{x}10^3 \\
\hline
\phi_1 - \phi_2 = & \phantom{1{,}234}1{,}111\text{x}10^{-1}
\end{array}
$$

Portanto, neste caso, o cancelamento subtrativo provocou a perda de 4 algarismos do lado esquerdo do número.

Um **exemplo de diferença de ordem** é dado a seguir. O cálculo do coeficiente oeste (DF, 1D, Advecção-Difusão, CDS-2) resulta em aw = 2 + Pe.h; se Pe=1, h=1e-8 e a precisão é simples, tem-se

$$
\begin{array}{rl}
\phi_1 = & 2{,}000000\text{x}10^0 \\
+\phi_2 = & 1{,}000000\text{x}10^{-8} \\
\hline
\phi_1 + \phi_2 = & 2{,}000000\text{x}10^0
\end{array}
$$

ou seja, o valor de ϕ_2 foi perdido.

A Fig. 2 mostra qualitativamente a interação dos erros de arredondamento (Eπ) com os erros de discretização (Eh) na composição do erro numérico (En). Este é o caso prático em CFD, quando existem juntos, interagindo estes dois tipos de erro.

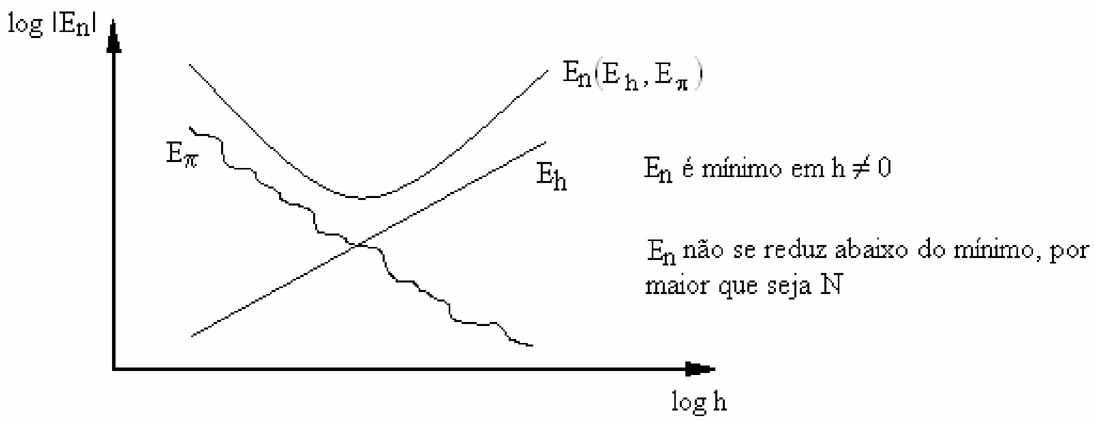

Figura 2. E_n causado apenas por E_h e E_π.

A Fig. 3 mostra qualitativamente a interação dos erros de arredondamento (Eπ) com os erros de iteração (Ei) na composição do erro numérico (En). Este é o caso prático em CFD, quando existem juntos, interagindo estes dois tipos de erro.

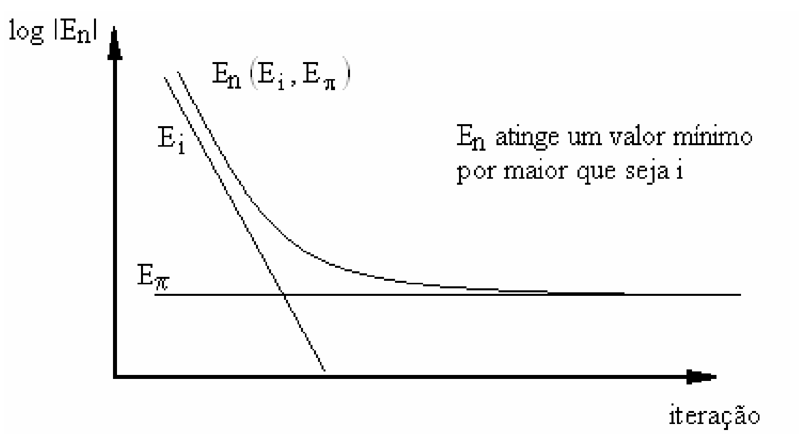

Figura 3. E_n causado apenas por E_i e E_π para uma malha com N volumes.