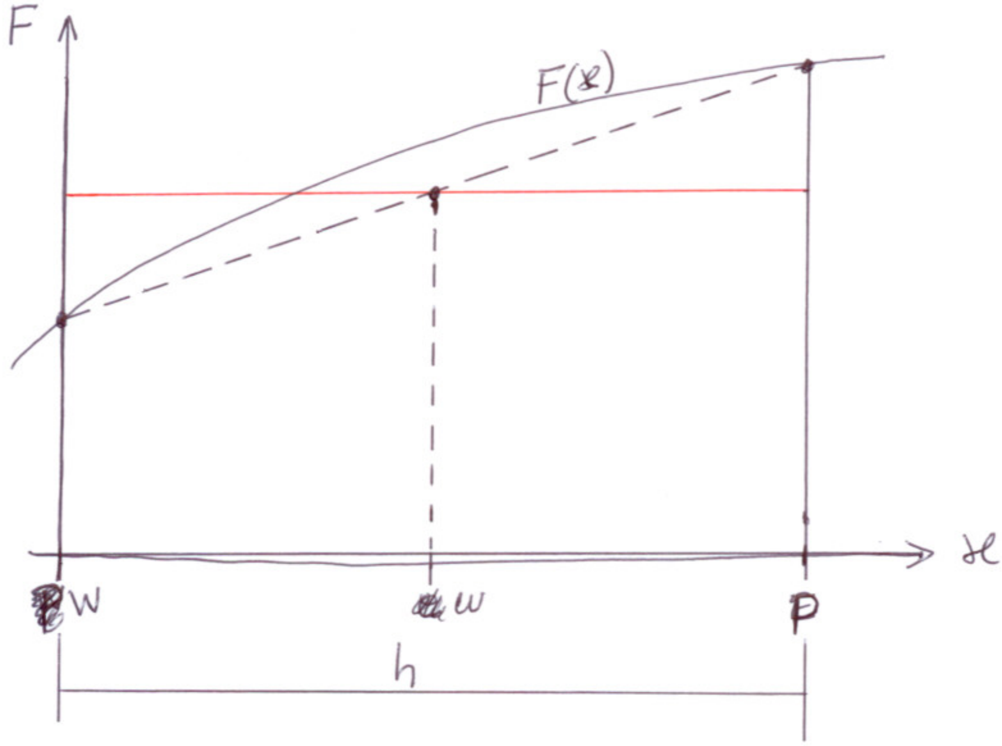
OBJETIVO: Prever o erro de truncamento e suas ordens verdadeiras da integração de uma função pela regra do Trapézio do valor médio

CONSIDERAÇÕES:

- A função a integrar é conhecida (prescrita) nos nós da malha
- malha de diferenças finitas
- malha unidimensional uniforme



Definições:

- $F(x)$ é a função contínua conhecida em $\forall x$ [analítica]
- P e W são dois nós da malha ~~onde~~
- h é a distância entre dois nós consecutivos da malha, ou o tamanho dos elementos da malha, onde

$$h = \frac{L}{N} \qquad \text{(constante)} \qquad (1)$$

- N = nº de elementos da malha
- L = comprimento total do domínio do cálculo

- $x_P = P\,h \qquad (P = 0, 1, 2, \ldots N)$ (2)
- w é o ponto médio entre os nós W e P

INTEGRAL PARA UM ELEMENTO

Para um elemento da malha, a integral numérica dada pela regra do trapézio é

$$\boxed{I_{WP}^{num} = \frac{(F_W + F_P)}{2}\,h} \qquad (3)$$

SÉRIE DE TAYLOR

Expansão da função F com a série de Taylor em torno do ponto médio (w):

$$F_x = F_w + (x - x_w)F_w' + \frac{(x-x_w)^2}{2}F_w'' + \frac{(x-x_w)^3}{6}F_w''' + \frac{(x-x_w)^4}{24}F_w^{iv} + \frac{(x-x_w)^5}{120}F_w^{v} + \frac{(x-x_w)^6}{720}F_w^{vi} + \ldots \qquad (4)$$

onde F', F'' etc = derivadas de 1ª, 2ª etc ordens de F no ponto w; são constantes.

x_w = coordenada x do ponto médio (w); constante

F_w = valor de F em w (constante)

INTEGRAL EXATA ENTRE x_w E x_P

$$I_{wP}^{exata} = \int_{x_w}^{x_P} F_x\,dx \qquad (5)$$

Com a Eq. (4) em (5), obtém-se

$$I_{wp}^{exato} = \int_{x_w}^{x_p} F_w \, dx + \int_{x_w}^{x_p} F_w' (x - x_w) \, dx + \int_{x_w}^{x_p} F_w'' \frac{(x-x_w)^2}{2} \, dx + \dots \qquad (6)$$

Definindo:

$$Z = x - x_w \qquad (7)$$

obtém-se

$$dZ = dx \qquad (8)$$

$$Z_i = x\big|_{x_w} - x_w = 0 \qquad (9)$$

$$Z_f = x\big|_{x_p} - x_w = \frac{h}{2} \qquad (10)$$

Com as eqs. (7) a (10), ~~em (6)~~ cada integral da eq. (6) resulta em

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w \, dx = F_w \int_{Z_i}^{Z_f} dZ = F_w Z \Big|_0^{h/2} = F_w \frac{h}{2} \qquad (11)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w' (x - x_w) \, dx = F_w' \int_{Z_i}^{Z_f} Z \, dZ = F_w' \frac{Z^2}{2} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w'}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = F_w' \frac{h^2}{8} \qquad (12)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w'' \frac{(x-x_w)^2}{2} \, dx = F_w'' \int_{Z_i}^{Z_f} \frac{Z^2}{2} \, dZ = \frac{F_w''}{2} \frac{Z^3}{3} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w''}{6} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{F_w''}{6} \frac{h^3}{8} = F_w'' \frac{h^3}{48} \qquad (13)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w''' \frac{(x-x_w)^3}{6} \, dx = \frac{F_w'''}{6} \int_{Z_i}^{Z_f} Z^3 \, dZ = \frac{F_w'''}{6} \frac{Z^4}{4} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w'''}{24} \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{F_w'''}{24} \frac{h^4}{16} = F_w''' \frac{h^4}{384} \qquad (14)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w^{iv} \frac{(x-x_w)^4}{24} \, dx = \frac{F_w^{iv}}{24} \int_{Z_i}^{Z_f} Z^4 \, dZ = \frac{F_w^{iv}}{24} \frac{Z^5}{5} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w^{iv}}{120} \left(\frac{h}{2}\right)^5 = \frac{F_w^{iv}}{120} \frac{h^5}{32} = F_w^{iv} \frac{h^5}{3840} \qquad (15)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w^{v} \frac{(x-x_w)^5}{120} \, dx = \frac{F_w^{v}}{120} \int_{Z_i}^{Z_f} Z^5 \, dZ = \frac{F_w^{v}}{120} \frac{Z^6}{6} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w^{v}}{720} \left(\frac{h}{2}\right)^6 = \frac{F_w^{v}}{720} \frac{h^6}{64} = F_w^{v} \frac{h^6}{46\,080} \qquad (16)$$

$$\int_{x_w}^{x_p} F_w^{vi} \frac{(x-x_w)^6}{720} \, dx = \frac{F_w^{vi}}{720} \int_{Z_i}^{Z_f} Z^6 \, dZ = \frac{F_w^{vi}}{720} \frac{Z^7}{7} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_w^{vi}}{5040} \left(\frac{h}{2}\right)^7 = \frac{F_w^{vi}}{5040} \frac{h^7}{128} = F_w^{vi} \frac{h^7}{645\,120} \qquad (17)$$

Com as eqs. (11) a (17) em (6), chega-se a

$$I_{wP}^{exato} = F_w \frac{h}{2} + F_w' \frac{h^2}{8} + F_w'' \frac{h^3}{48} + F_w''' \frac{h^4}{384} + F_w^{iv} \frac{h^5}{3840} + F_w^{v} \frac{h^6}{46080} + F_w^{vi} \frac{h^7}{645120} + \ldots \qquad (18)$$

INTEGRAL EXATA ENTRE x_W e x_w

$$I_{Ww}^{exata} = \int_{x_W}^{x_w} F_x \, dx \qquad (19)$$

Com a eq. (4) em (19), obtém-se

$$I_{Ww}^{exato} = \int_{x_W}^{x_w} F_w \, dx + \int_{x_W}^{x_w} F_w' (x - x_w) \, dx + \int_{x_W}^{x_w} F_w'' \frac{(x - x_w)^2}{2} \, dx + \ldots \qquad (20)$$

Neste caso, considerando-se as eqs. (7) e (8), tem-se

$$z_i = x\Big|_{x_W} - x_w = -\frac{h}{2} \qquad (21)$$

$$z_f = x\Big|_{x_w} - x_w = 0 \qquad (22)$$

Com as eqs. (7), (8), (21) e (22), cada integral da eq. (20) resulta em

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w \, dx = F_w \int_{z_i}^{z_f} dz = F_w \, z \Big|_{-h/2}^{0} = F_w \left[0 - \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = F_w \frac{h}{2} \qquad (23)$$

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w' (x - x_w) \, dx = F_w' \int_{z_i}^{z_f} z \, dz = F_w' \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{0} = \frac{F_w'}{2} \left[0^2 - \left(-\frac{h}{2} \right)^2 \right] = -\frac{F_w'}{2} \frac{h^2}{4} = -F_w' \frac{h^2}{8} \qquad (24)$$

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w'' \frac{(x-x_w)^2}{2} dx = \frac{F_w''}{2}\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz = \frac{F_w''}{2}\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{0} = \frac{F_w''}{6}\left[0^3-\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{F_w''}{6}\frac{h^3}{8} = F_w''\frac{h^3}{48} \qquad (25)$$

Por analogia às eqs. (14) a (17), tem-se

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w''' \frac{(x-x_w)^3}{6} dx = -F_w''' \frac{h^4}{384} \qquad (26)$$

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w^{iv} \frac{(x-x_w)^4}{24} dx = F_w^{iv} \frac{h^5}{3840} \qquad (27)$$

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w^{v} \frac{(x-x_w)^5}{120} dx = -F_w^{v} \frac{h^6}{46080} \qquad (28)$$

$$\int_{x_W}^{x_w} F_w^{vi} \frac{(x-x_w)^6}{720} dx = F_w^{vi} \frac{h^7}{645\,120} \qquad (29)$$

Com as eqs. (23) a (29) em (20), chega-se a

$$I_{Ww}^{exato} = F_w\frac{h}{2} - F_w'\frac{h^2}{8} + F_w''\frac{h^3}{48} - F_w'''\frac{h^4}{384}$$
$$+ F_w^{iv}\frac{h^5}{3840} - F_w^{v}\frac{h^6}{46080} + F_w^{vi}\frac{h^7}{645\,120} - \dots \qquad (30)$$

INTEGRAL EXATA ENTRE x_W e x_P

Com $x = x_W$ na eq. (4), tem-se

$$F_W = F_w - F_w'\frac{h}{2} + F_w''\frac{h^2}{8} - F_w'''\frac{h^3}{48} + F_w^{iv}\frac{h^4}{384} - F_w^{v}\frac{h^5}{3840} + F_w^{vi}\frac{h^6}{46080} - \dots \qquad (31)$$

Com $x = x_P$ na eq. (4), tem-se

$$F_P = F_w + F_w'\frac{h}{2} + F_w''\frac{h^2}{8} + F_w'''\frac{h^3}{48} + F_w^{iv}\frac{h^4}{384} + F_w^{v}\frac{h^5}{3840} + F_w^{vi}\frac{h^6}{46080} + \dots \qquad (32)$$

Somando-se as Eqs. (31) e (32), chega-se a

$$F_W + F_P = 2F_W + 2F_W''\frac{h^2}{8} + 2F_W^{iv}\frac{h^4}{384} + 2F_W^{vi}\frac{h^6}{46080} + \ldots$$

ou

$$F_W = \frac{(F_W + F_P)}{2} - F_W''\frac{h^2}{8} - F_W^{iv}\frac{h^4}{384} - F_W^{vi}\frac{h^6}{46080} - \ldots \qquad (33)$$

Somando-se as Eqs. (30) e (18), tem-se

$$I_{WP}^{exato} = F_W h + F_W''\frac{h^3}{24} + F_W^{iv}\frac{h^5}{1920} + F_W^{vi}\frac{h^7}{322560} + \ldots \qquad (34)$$

Com as Eqs. (33) em (34), finalmente obtém a integral exata sobre um elemento, dada por

$$\boxed{I_{WP}^{exato} = \frac{(F_W + F_P)}{2}h - F_W''\frac{h^3}{12} - F_W^{iv}\frac{h^5}{480} - F_W^{vi}\frac{h^7}{53760} - \ldots} \qquad (35)$$

ERRO DE TRUNCAMENTO DE UM ELEMENTO

Definindo o erro por

$$E_{WP} = I_{WP}^{exato} - I_{WP}^{num} \qquad (36)$$

Com as Eqs. (35) e (3) em (36), obtém-se

$$\boxed{E_{WP} = -F_W''\frac{h^3}{12} - F_W^{iv}\frac{h^5}{480} - F_W^{vi}\frac{h^7}{53760} - \ldots} \qquad (37)$$

Portanto as ordens verdadeiras do E_{WP} são

$$\boxed{p_V = 3, 5, 7, \ldots} \qquad (38)$$

INTEGRAL NO DOMÍNIO COMPLETO (MÉDIA)

Para o domínio completo, a integral numérica (valor médio) dada pela regra do trapézio é

$$\boxed{I_L^{num} = \frac{h}{2L}\sum_{P=1}^{N}\left(F_W + F_P\right)} \quad W = P-1 \qquad (39)$$

Integral analítica exata:

$$\boxed{I_L^{exato} = \frac{1}{L}\int_0^L F_x\, dx} \qquad (40)$$

O erro de truncamento do domínio é a soma dos erros de todos os elementos, ou seja,

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{L}\sum_{P=1}^{N}\left(\mathcal{E}_{WP}\right) \qquad (41)$$

Com a Eq. (37) em (41), obtém-se

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{L}\sum_{P=1}^{N}\left[-F_W^{ii}\frac{h^3}{12} - F_W^{iv}\frac{h^5}{480} - F_W^{vi}\frac{h^7}{53760} - \cdots\right]$$

ou

$$\mathcal{E}_L = \left[-\frac{h^3}{12}\sum_{P=1}^{N}\left(F_W^{ii}\right) - \frac{h^5}{480}\sum_{P=1}^{N}\left(F_W^{iv}\right) - \frac{h^7}{53760}\sum_{P=1}^{N}\left(F_W^{vi}\right) - \cdots\right]\frac{1}{L} \qquad (42)$$

Definindo

$$\overline{F^{ii}} = \frac{\sum_{P=1}^{N}\left(F_W^{ii}\right)}{N} \qquad (43)$$

$$\overline{F^{iv}} = \frac{\sum_{P=1}^{N}\left(F_W^{iv}\right)}{N} \qquad (44)$$

$$\overline{F^{vi}} = \frac{\sum_{P=1}^{N} \left(F_w^{vi} \right)}{N} \tag{45}$$

Com as eqs. (43) a (45) em (42), tem-se

$$\mathcal{E}_L = \left[-\frac{h^3}{12} N \overline{F''} - \frac{h^5}{480} N \overline{F^{iv}} - \frac{h^7}{53760} N \overline{F^{vi}} - \dots \right] \frac{1}{L} \tag{46}$$

Da eq. (1),

$$L = N h \tag{47}$$

Com a eq. (47) em (46), finalmente obtém-se

$$\boxed{\mathcal{E}_L = - \left(\overline{F''} \frac{h^2}{12} + \overline{F^{iv}} \frac{h^4}{480} + \overline{F^{vi}} \frac{h^6}{53760} + \dots \right)} \tag{48}$$

Portanto, as ordens verdadeiras de $\mathcal{E}_L$ são

$$\boxed{p_V = 2, 4, 6, \dots} \tag{49}$$

INTEGRAL MÉDIA NUM ELEMENTO

Define-se a integral média num elemento por

$$\boxed{\bar{I}_{WP}^{exato} = \frac{1}{h}\int_{x_W}^{x_P} F_x\, dx = \frac{I_{WP}^{exato}}{h}} \qquad (50)$$

onde

$$\boxed{I_{WP}^{exato} = \int_{x_W}^{x_P} F_x\, dx} \qquad (51)$$

cujo resultado é dado pela Eq. (35). Portanto, com esta Eq. na Eq. (50), obtém-se que

$$\boxed{\bar{I}_{WP}^{exato} = \frac{(F_W + F_P)}{2} - F_W'' \frac{h^2}{12} - F_W^{iv} \frac{h^4}{480} - F_W^{vi} \frac{h^6}{53760} - \dots} \qquad (52)$$

A partir das Eqs. (3) e (50), chega-se a

$$\boxed{\bar{I}_{WP}^{num} = \frac{(F_W + F_P)}{2}} \qquad (53)$$

E a partir da Eq. (36), com as Eqs. (52) e (53), o erro de truncamento ~~[illegible]~~ da integral média de um elemento resulta em

$$\boxed{\bar{E}_{WP} = - F_W'' \frac{h^2}{12} - F_W^{iv} \frac{h^4}{480} - F_W^{vi} \frac{h^6}{53760} - \dots} \qquad (54)$$

Portanto, suas ordens verdadeiras são

$$\boxed{p_V = 2, 4, 6, \dots} \qquad (55)$$