MER ①

8 JUN 09
~~18~~ 20 Jul 10

Estrapolação de Richardson (monoestrapolação):

$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^{p_L} - 1)} \qquad (1)$$

ϕ_∞ = sol. num. estrapolada
ϕ_1 = sol. numérica na malha fina h_1 (sem estrap
ϕ_2 = " " " " grossa h_2 (" "

$$\boxed{r = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_{g-1}}{h_g}} \qquad (3)$$

ou

$$\boxed{\phi_{g,\infty} = \phi_g + \frac{(\phi_g - \phi_{g-1})}{(r^{p_L} - 1)}} \qquad (2)$$

$g = 2$ a G

p_L = ordem assintótica do erro de discret.
g = nº da malha ($g = 1$ a G; G = malha + fina)

Múltiplas estrapolações de Richardson (multiestrapolação):

ou $g = 2$ a G, $m = 1$ a $g-1$

$$\boxed{\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{(\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1})}{(r^{(p_V)_{m-1}} - 1)}} \qquad (4)$$

Ver p. 2
~~$m = 1$ a $G-1$~~
~~$g = m+1$ a G~~

onde g = nº da malha; $g = 1$ a G; $g = 1 \rightarrow$ malha + grossa; $g = G \rightarrow$ malha + fina
G = nº total de malhas;
ϕ_g = sol. numérica na malha g
m = nº de estrapolações; $m = 0 \rightarrow$ sem estrapolação
$m = 1 \rightarrow$ 1 estrap.; $m = 2 \rightarrow$ 2 estrapolações etc
r = razão de refinamento da malha ~~constante~~; $r = h_{g-1}/h_g$
p_V = ordem verdadeira do erro de discretização; vem de

$$E(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k h^{(p_V)_k} \qquad (5)$$

p_0 = ordem assintótica
$p_0 < p_1 < p_2 \dots$

$(p_V)_0 = p_0$

$(p_V)_1 = p_1$

$(p_V)_2 = p_2$

⋮

$$\boxed{p_V = p_0 + m(p_1 - p_0)}$$
$$= p_0 + m p_1 - m p_0 = (1-m) p_0 + m p_1$$

$p_V =$

8-JUN 09

$G = 5$ $\qquad \phi_{g,m}$

$g \downarrow$ \ $m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5
1	1,0	X	X	X	X	X
2	2,0	2,1	X	X	X	X
3	3,0	3,1	3,2	X	X	X
4	4,0	4,1	4,2	4,3	X	X
5	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	X

Onde há um X, não se aplica a multi-estrapolação de Richardson porque para cada estrapolação m são necessárias duas soluções no nível de estrap. m-1

Eq. (4) multiestrap. de Rich. é válida para:

~~$m = 1$ a $G-1$~~

~~Para cada m,~~ ~~$g = m+1$ a G~~

~~Para cada g, $m = g+1$ a $G-1$~~

para o exemplo, $G=5$, e a eq. (4)

~~$m = 1$ a 4~~

~~$g = m+1$ a 5~~

$g = 2$ a 5

$m = 1$ a $g-1$

8JUN09

20Jul10

Estimador-padrão do Richardson:

Considerando

$$U(\phi_g) = \phi_{g,\infty} - \phi_g \qquad (6)$$

Com a eq.(2) em (6),

$$\boxed{U(\phi_g) = \frac{(\phi_g - \phi_{g-1})}{(r^{p_L} - 1)}} \quad \boxed{(g = 2 \text{ a } G)} \qquad (7)$$

Para Multiplas extrapolações de Richardson:

Considerando

$$U(\phi_{g,m}) = \phi_{g,m+1} - \phi_{g,m} \qquad (8)$$

A partir de (4), para $m = m+1$,

$$\phi_{g,m+1} = \phi_{g,m} + \frac{(\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m})}{(r^{(p_V)_m} - 1)} \qquad (9)$$

Com (9) em (8),

$$\boxed{U(\phi_{g,m}) = \frac{(\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m})}{(r^{(p_V)_m} - 1)}} \qquad (10)$$

~~$m = 0$ a $G-2$~~

~~$g = m+2$ a G~~

$g = 2$ a G

$m = 0$ a $g-2$

8 JUN 09
~~11/18~~
20 Jul 10

GCI monoestrapolado, para a eq. (7),

$$\boxed{GCI(\phi_g) = F_s \frac{|\phi_g - \phi_{g-1}|}{(r^{p_L} - 1)}} \qquad g = 2 \text{ a } G \qquad (11)$$

$$\boxed{GCI(\phi_g) = F_s |U(\phi_g)|} \qquad (11.b)$$

GCI com multiestrapolação, com base na eq. (10),

$$\boxed{GCI(\phi_{g,m}) = F_s \frac{|\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}|}{(r^{(p_V)_m} - 1)}} \qquad \cancel{m = 0 \text{ a } G-2} \quad \cancel{g = m+2 \text{ a } G} \qquad (12)$$

$g = 2$ a G e $m = 0$ a $g-2$

$$\boxed{GCI(\phi_{g,m}) = F_s |U(\phi_{g,m})|} \qquad (12.b)$$

ORDEM EFETIVA (p_E)

p_E do erro das soluções sem estrapolação:

$$p_E(h_1) = \frac{\log\left[\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)}\right]}{\log(r)} \qquad g = 2 \text{ a } G \qquad (13)$$

ou

$$(p_E)_g = \frac{\log\left[\frac{E(\phi_{g-1})}{E(\phi_g)}\right]}{\log(r)} \qquad g = 2 \text{ a } G \qquad (14)$$

p_E generalizado:

$$\boxed{(p_E)_{g,m} = \frac{\log\left[\frac{E(\phi_{g-1,m})}{E(\phi_{g,m})}\right]}{\log(r)}} \qquad \cancel{m = 0 \text{ a } G-2} \quad \cancel{g = m+2 \text{ a } G} \qquad (15)$$

~~ou~~

$g = 2$ a G
$m = 0$ a $g-2$

11 JUN 09 / ~~18~~ 20 Jul 10

ORDEM APARENTE (p_U)

p_U do erro estimado de soluções sem extrapolação p/ r constante:

$$p_U(h_1) = \frac{\log\left(\dfrac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(r)} \qquad g = 3 \text{ a } G \qquad (16)$$

ou

$$(p_U)_g = \frac{\log\left(\dfrac{\phi_{g-1} - \phi_{g-2}}{\phi_g - \phi_{g-1}}\right)}{\log(r)} \qquad g = 3 \text{ a } G \qquad (17)$$

p_U generalizado:

$$g = 3 \text{ a } G$$
$$m = 0 \text{ a } \mathrm{Int}\left(\frac{g-3}{2}\right)$$

$$\boxed{(p_U)_{g,m} = \frac{\log\left(\dfrac{\theta_{g-1,m} - \theta_{g-2,m}}{\theta_{g,m} - \theta_{g-1,m}}\right)}{\log(r)}} \qquad \cancel{m = 0 \text{ a } \mathrm{Int}\left(\frac{G-3}{2}\right)} \qquad (18)$$

$$\cancel{g = 2m + 3 \text{ a } G}$$

$\mathrm{Int}(a)$ = inteiro de "a"

onde, a partir da eq. (4),

$$\boxed{\theta_{g,m} = \theta_{g,m-1} + \frac{(\theta_{g,m-1} - \theta_{g-1,m-1})}{\left(r^{(p_U)_{g,m-1}} - 1\right)}} \qquad \cancel{m = 1 \text{ a } \mathrm{Int}\left(\frac{G-1}{2}\right)} \qquad (19)$$

$$\cancel{g = 2m + 1 \text{ a } G}$$

~~ou~~

$$g = 3 \text{ a } G$$
$$m = 1 \text{ a } \mathrm{Int}\left(\frac{g-1}{2}\right)$$

Para $m = 0$, a eq. (19) não se aplica. Neste caso, $\theta_{g,0}$ = solução numérica sem extrapolação, com $g = 1$ a G.

11 JUN 09

Eqs. (18) e (19)

g	m=0 θ	m=0 pU	m=1 θ	m=1 pU	m=2 θ	m=2 pU	m=3 θ	m=3 pU	m=4 θ	m=4 pU	m=5 θ	m=5 pU
1	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	3,0	3,0	3,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	4,0	4,0	4,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	5,0	5,0	5,1	5,1	5,2	—	—	—	—	—	—	—
6	6,0	6,0	6,1	6,1	6,2	—	—	—	—	—	—	—
7	7,0	7,0	7,1	7,1	7,2	7,2	7,3	—	—	—	—	—
8	8,0	8,0	8,1	8,1	8,2	8,2	8,3	—	—	—	—	—
9	9,0	9,0	9,1	9,1	9,2	9,2	9,3	9,3	9,4	—	—	—
10	10,0	10,0	10,1	10,1	10,2	10,2	10,3	10,3	10,4	—	—	—
11	11,0	11,0	11,1	11,1	11,2	11,2	11,3	11,3	11,4	11,4	11,5	—
12	12,0	12,0	12,1	12,1	12,2	12,2	12,3	12,3	12,4	12,4	12,5	—

$m=1: g=3$ a 11
$m=4: g=9$ a 11
$m=5: g=11$ a 11

Para $G = 12$

θ: $m = 1$ a $\mathrm{Int}\left(\frac{12-1}{2}\right) = 1$ a $\mathrm{Int}\left(\frac{11}{2}\right) = 1$ a 5

Se $G = 11$.

θ: $m = 1$ a $\mathrm{Int}\left(\frac{11-1}{2}\right) = 1$ a $\mathrm{Int}\,5 = 1$ a 5

$g = 2m + 1$ a G

$m=5: g=11$ a 12
$m=1: g=3$ a 12
$m=2: g=5$ a 12
$m=3: g=7$ a 12
$m=4: g=9$ a 12

$G=13$: θ: $m = 1$ a 6

$G=10$: θ: $m = 1$ a 4
$m=1: g=3$ a 10
$m=2: g=5$ a 10
$m=3: g=7$ a 10
$m=4: g=9$ a 10