

CAP. 5: DIFUSÃO DE CALOR E DE QML BIDIMENSIONAIS

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- COORDENADAS CARTESIANAS
- CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE DIRICHLET
- MALHAS NÃO-UNIFORMES NO ESPAÇO (x,y)
- MALHAS UNIFORMES NO TEMPO (t)
- CAMPOS DE TEMPERATURAS $T(x,y,t)$ - DIFUSÃO DE CALOR - E DE VELOCIDADES $u(x,y)$ - QML.
- CONDIÇÕES DE CONTOURNO APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS
- GAUSS-SEIDEL 2D

5.1. MODELO MATEMÁTICO PARA A DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL

CONSIDERANDO-SE:

- DIFUSÃO DE CALOR
- REGIME TRANSIENTE
- GERAÇÃO DE CALOR
- MODELO BIDIMENSIONAL
- COORDENADAS CARTESIANAS

NESSAS CIRCUNSTÂNCIAS, A EQUAÇÃO GOVERNANTE DO FENÔMENO FÍSICO PODE SER APRESENTADA COMO:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \quad (5.1)$$

ONDE: x, y : DIREÇÕES COORDENADAS

L_x, L_y : DIMENSÕES DO DOMÍNIO NAS DIREÇÕES x E y , RESPECTIVAMENTE [m]

ρ : MASSA ESPECÍFICA [kg/m^3]

c_p : CALOR ESPECÍFICO [$\text{J}/\text{kg K}$]

κ : CONDUTIVIDADE TÉRMICA [$\text{W}/\text{m K}$]

t : TEMPO [s]

T : TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K]

$\dot{q}$: TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR [W/m^3]

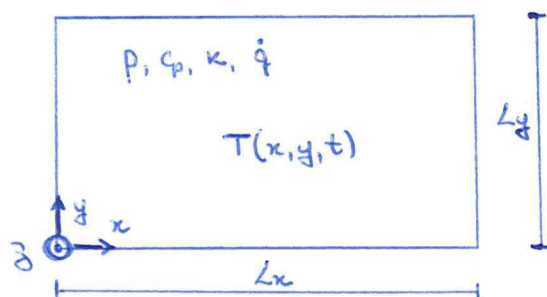


FIG. 5.1: PROBLEMA FÍSICO (PILHA PLANA)

VARIÁVEIS DE INTERESSE:

• CAMPO DE TEMPERATURAS, $T(x, y, t)$

• TEMPERATURA MÉDIA:

$$\bar{T}_{2D}(t) = \frac{1}{A} \int_A T(x, y, t) dA = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y, t) dx dy \quad (5.2)$$

ONDE

$$A = L_x L_y \quad (5.3)$$

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTO RNO NORTE:

$$\dot{q}_n(t) = - \int_0^{L_x} \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y,t} dx \quad (5.4)$$

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTO RNO LESTE:

$$\dot{q}_e(t) = - \int_0^{L_y} \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x,y,t} dy \quad (5.5)$$

5.2. MODELO NUMÉRICO (DISCRETIZAÇÃO) PARA A DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL
CONSIDERANDO-SE O VOLUME DE CONTROLE P, DA FIG. 5.2:

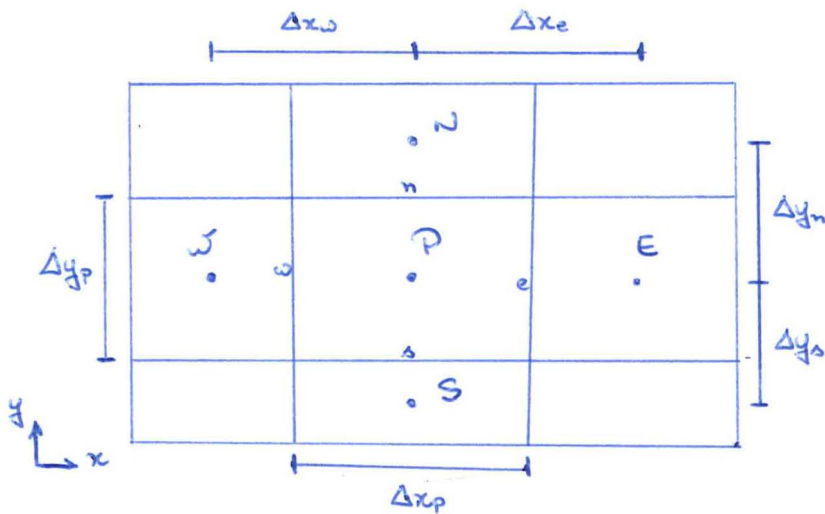


FIG. 5.2: MALHA BIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRAIS.

E REALIZANDO-SE A INTEGRAÇÃO DA EQ. (5.1) PARA O VOLUME P E AO LONGO DO TEMPO DE $(t - \Delta t)$ A (t) OBTÉM-SE:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_z \int_{y_0}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz dt = \int_{t-\Delta t}^t \int_z \int_{y_0}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz dt \quad (5.6)$$

HIPÓTESES / APROXIMAÇÕES CONSIDERADAS:

- FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAIS LINEARES NO ESPAÇO (CDS)
- FORMULAÇÃO TOTALMENTE EXPLÍCITA NO TEMPO ($\theta = 1$)
- PROPRIEDADES VARIÁVEIS: $(\rho, c_p, \kappa, \dot{q})$
- $\Delta z = \text{CONSTANTE}$
- VALORES DE PROPRIEDADES CONSTANTES EM CADA VOLUME E FACE.

DESSE MODO, A EQ. (5.6) RESULTA EM:

$$\rho_p(c_p)_p (T_p - T_p^0) \Delta x_p \Delta y_p \Delta z = \left[k_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} \right] \Delta y_p \Delta z \Delta t + \left[k_n \frac{(T_w - T_p)}{\Delta y_n} - k_s \frac{(T_p - T_s)}{\Delta y_s} \right] \Delta x_p \Delta z \Delta t + \dot{q}_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \Delta t \quad (5.7)$$

OU REARRANJANDO OS TERMOS,

$$\left[\rho_p(c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z + \frac{k_w \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_w} + \frac{k_e \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_e} + \frac{k_s \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_s} + \frac{k_n \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_n} \right] T_p = \left(\frac{k_w \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_w} \right) T_w + \left(\frac{k_e \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_e} \right) T_e + \left(\frac{k_s \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_s} \right) T_s + \left(\frac{k_n \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_n} \right) T_n + [\rho_p(c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z] T_p^0 + \dot{q}_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \Delta t \quad (5.8)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b_p \quad (5.9)$$

APRESENTA COMO COEFICIENTES / TERMOS - FONTES:

$$a_w = \frac{k_w \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_w} \quad (5.10)$$

$$a_e = \frac{k_e \Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_e} \quad (5.11)$$

$$a_s = \frac{k_s \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_s} \quad (5.12)$$

$$a_n = \frac{k_n \Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_n} \quad (5.13)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + \rho_p(c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \quad (5.14)$$

$$b_p = [\rho_p(c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z] T_p^0 + \dot{q}_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \Delta t \quad (5.15)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES INTERNOS DO DOMÍNIO.

CONSIDERANDO-SE UMA ORDENAÇÃO LEXICOGRAFICA PARA A NUMERAÇÃO DOS VOLUMES DE CONTROLE

O SISTEMA DE EQUAÇÕES GERADO APRESENTARÁ A SEGUINTE CONFIGURAÇÃO MATEMÁTICA:

$$\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}_{N_v \times N_v} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_v} \end{bmatrix}_{N_v \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N_v} \end{bmatrix}_{N_v \times 1}$$

OU

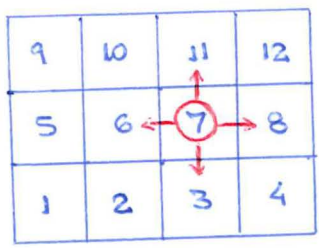
$$[A][T] = [B] \quad (5.16)$$

ONDE: $N_v = N_x N_y$ (NÚMERO TOTAL DE VOLUMES DE CONTROLE) (5.17)

N_x : NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE NA DIREÇÃO x

N_y : NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE NA DIREÇÃO y

EXEMPLO:



$N_y = 3$; $N_v = N_x N_y = 3 \cdot 4 = 12$

FIG. 5.3: EXEMPLO DE MALHA 4×3 ($N_x = 4$, $N_y = 3$)

$N_x = 4$

CONSIDERANDO-SE O CASO DE DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL, EM REGIME PERMANENTE, SEM GERAÇÃO DE CALOR ($\dot{q} = 0$), CONDUTIVIDADE TÉRMICA (k) CONSTANTE, MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO ($\Delta x = \text{CONST. 1}$; $\Delta y = \text{CONST. 2}$) E $\Delta z = 1$, TEM-SE QUE A EQ. (5.1) PODE SER SIMPLIFICADA DE MODO A ORIGINAL UMA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.18)$$

NESSE CASO, OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DA EQ. (5.9) SE REDUZEM A:

$$a_w = a_e = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.19)$$

$$a_s = a_n = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (5.20)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \quad (5.21)$$

$$b_p = 0 \quad (5.22)$$

SE, AO INVÉS DE SE CONSIDERAR A MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO A MALHA FOR UNIFORME

($\Delta x = \Delta y$), OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DA EQ. (5.9) RESULTAM EM:

$$a_w = a_e = a_s = a_n = 1 \quad (5.23)$$

$$a_p = 4 \quad (5.24)$$

$$b_p = 0 \quad (5.25)$$

- VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS

- TEMPERATURA MÉDIA BIDIMENSIONAL (OBTIDA ATRAVÉS DA REGRAS DO RETÂNGULO)

$$\bar{T}_{2D}(t) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{p=1}^{N_p} [T_p(t) \Delta x_p \Delta y_p] \quad (5.26)$$

OBSERVAÇÃO: N_p REPRESENTAM OS VOLUMES REAIS EM QUE O DOMÍNIO FOI DISCRETIZADO.

- TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTORNO NORTE:

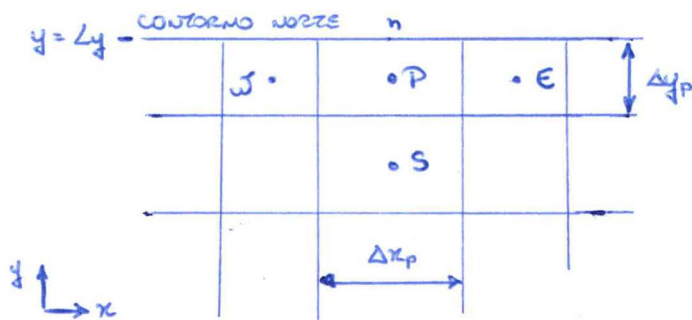


FIG. 5.4: VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO ADJACENTE AO CONTORNO NORTE ($y = L_y$)

UTILIZANDO-SE A APROXIMAÇÃO DA DERIVADA COM VDS:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x, y=L_y} \approx \frac{T_n - T_p}{\Delta y_p / 2} \quad (5.27)$$

E A REGRAS DO RETÂNGULO PARA A APROXIMAÇÃO DA INTEGRAL, TEM-SE QUE A EQ. (5.4) RESULTA EM:

$$q_n(t) = -2 \sum_{p=1}^{N_x} \left[\frac{T_n(t) - T_p(t)}{\Delta y_p} \Delta x_p \cdot k_n \right] \quad (5.28)$$

QUE É VÁLIDA APENAS PARA OS VOLUMES REAIS ADJACENTES AO CONTORNO NORTE ($y = L_y$) E ONDE:

T_n É A TEMPERATURA DA CONDIÇÃO DE CONTORNO, EM CADA x_p , NO CONTORNO NORTE

T_p É A TEMPERATURA EM CADA x_p DO VOLUME DE CONTROLE CUIA FACE NORTE COINCIDE COM O CONTORNO NORTE DO DOMÍNIO.

t : É O INSTANTE DE TEMPO CONSIDERADO

k_n : É A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NO CONTORNO NORTE DE CADA VOLUME DE CONTROLE P CUIA FACE NORTE É COINCIDENTE COM O CONTORNO NORTE DO DOMÍNIO DE CÁLCULO.

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTORNO LESTE

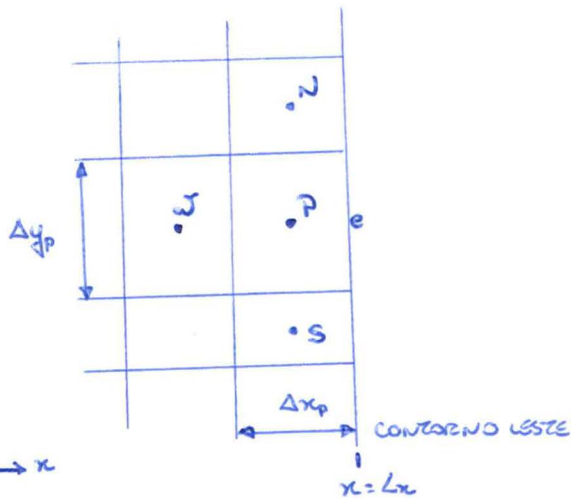


FIG. 5.5: VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO ADJACENTE AO CONTORNO LESTE ($x = L_x$)

UTILIZANDO-SE A APROXIMAÇÃO DA DERIVADA COM UDS:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x, y} \approx \frac{T_e - T_p}{\Delta x_p / 2} \quad (5.29)$$

E A REGRAS DO RETÂNGULO PARA A APROXIMAÇÃO DA INTEGRAL, TEM-SE QUE A EQ. (5.5) RESULTA EM

$$q_e(t) = -2 \sum_{p=1}^{N_y} \left[\frac{T_e(t) - T_p(t)}{\Delta x_p} \Delta y_p \cdot k_e \right] \quad (5.30)$$

QUE É VÁLIDA APENAS PARA OS VOLUMES REAIS ADJACENTES AO CONTORNO LESTE ($x = L_x$).

5.3. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO: MÉTODO DOS VOLUMES FICTÍCIOS.

EXISTEM AO MENOS QUATRO FORMAS DE SE APLICAR CONDIÇÕES DE CONTORNO COM O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS:

- 1) CONSIDERAR A CONDIÇÃO DE CONTORNO NA INTEGRAÇÃO DOS VOLUMES ADJACENTES AOS CONTORNOS
- 2) USAR MEIO-VOLUMES NOS CONTORNOS. [DEFEITO: HÁ UM PROBLEMA DE NÃO-CONSERVAÇÃO DAS PROPRIEDADES ENVIOLADAS NO CONTORNO].
- 3) EMPREGAR VOLUMES DE ESPÉSSURA ZERO.
- 4) USAR VOLUMES FICTÍCIOS FORA DO DOMÍNIO DE CÁLCULO.

NESTA SEÇÃO SERÁ APRESENTADO O USO DE VOLUMES FICTÍCIOS. CONSIDERANDO-SE, POR EXEMPLO, O CONTORNO DIREITO E A CONDIÇÃO DE CONTORNO (DE DIRICHLET), TEM-SE:

$$\frac{T_p + T_w}{2} = T_w \text{ (CONHECIDA)} = T_{cc}(y) \quad (5.31)$$

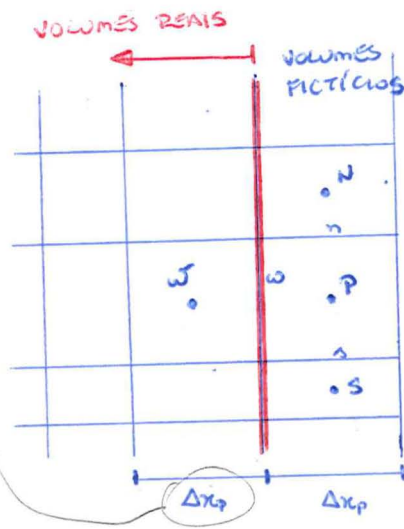


FIG. 5.6: APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO COM VOLUMES FICTÍCIOS NO CONTORNO LESTE. ($x = L_x$)

QUE PODE SER REESCRITA COMO:

$$T_p = -T_w + 2T_{cc}(y) \quad (5.32)$$

QUE NA FORMA DA EQ. (5.9) RESULTA EM:

$$a_p = 1 \quad (5.33)$$

$$a_w = -1 \quad (5.34)$$

$$a_e = a_s = a_n = 0 \quad (5.35)$$

$$b_p = 2T_{cc}(y) \quad (5.36)$$

CONSIDERANDO-SE, AGORA, O CONTORNO INFERIOR:

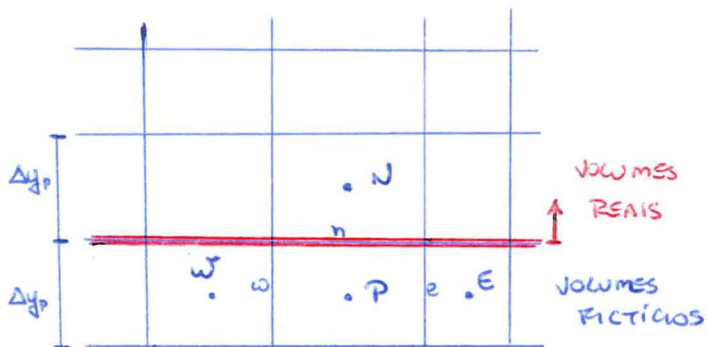


FIG. 5.7: APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO COM VOLUMES FICTÍCIOS NO CONTORNO SUL ($y = 0$).

$$\frac{T_p + T_N}{2} = T_n \text{ (CONHECIDA)} = T_{cc}(x) \quad (5.37)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$T_p = -T_N + 2T_{cc}(x) \quad (5.38)$$

QUE NA FORMA DA EQ. (5.9) RESULTA EM:

$$a_p = 1 \quad (5.39)$$

$$a_n = -1 \quad (5.40)$$

$$a_w = a_e = a_s = 0 \quad (5.41)$$

$$b_p = 2T_{cc}(x) \quad (5.42)$$

- foi até aqui. (Nó ex plogui volumes fictícios)

VANTAGENS NO USO DE VOLUMES FICTÍCIOS:

- 1) FACILIDADE NA APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO
- 2) OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DA EQ. (5.9) SÃO VÁLIDOS PARA TODOS OS VOLUMES REAIS; NÃO É NECESSÁRIO INCORPORAR AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO NOS VOLUMES DE CONTROLE ADJACENTES AOS CONTOURNOS.

DESVANTAGENS:

AUMENTO NOS CUSTOS DE MEMÓRIA E AUMENTO NO TEMPO DE PROCESSAMENTO.

5.4. GAUSS-SEIDEL BIDIMENSIONAL

O SISTEMA DE EQUAÇÕES REPRESENTADO PELA EQ. (5.9) PODE SER RESOLVIDO COM O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL ATRAVÉS DA SEGUINTE EXPRESSÃO:

$$T_p = \frac{(a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b_p)}{a_p} \quad (5.43)$$

VÁLIDA PARA TODOS OS VOLUMES REAIS: $p = 1, 2, \dots, N_v$.

5.5. ALGORITMO:

CONSIDERANDO-SE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE, SEM GERAÇÃO DE CALOR ($\dot{q}=0$), COM k , Δx E Δy CONSTANTES, TEM-SE O SEGUINTE ALGORITMO: (ALÉM DE $\Delta z = 1$).

1) LER OS DADOS: L_x , L_y , k , T_{cc} (FUNÇÕES OU TABELAS), N_x E N_y (COM FICTÍCIOS), I (NÚMERO DE ITERAÇÕES).

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO DE CÁLCULO COM

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x - 2} \quad (5.44)$$

$$\Delta y = \frac{L_y}{N_y - 2} \quad (5.45)$$

E AVALIAR x_p E y_p .

3) FAZER $T_p = 0$ (ESTIMATIVA INICIAL DA SOLUÇÃO)

4) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES, EQS. (5.19) A (5.22), (5.33) A (5.36), (5.39) A (5.42) E ANÁLOGAS PARA OS CONTOURNOS OESTE E NORTE.

5) RESOLVER O SISTEMA UTILIZANDO A EQ. (5.43).

6) VOLTAR AO ITEM 5 ATÉ Atingir 1 iterações.

7) IMPRIMIR E VISUALIZAR T_p .

8) CALCULAR E ESCREVER $\bar{T}$, q_n E q_e .

5.6. SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA A DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL

A SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQ. (5.18) - EQUAÇÃO DE LAPLACE - PARA DOIS PROBLEMAS, É APRESENTADA A SEGUIR.

• PROBLEMA 1: CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTEs CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$\begin{cases} T(0,y) = T(x,0) = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

$$\begin{cases} T(L_x,y) = 100yL_x \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\begin{cases} T(x,L_y) = 100xL_y \end{cases} \quad (5.48)$$

TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA:

$$T(x,y) = 100xy \quad (5.49)$$

$$\bar{T} = 25L_xL_y \quad (5.50)$$

$$q_e = -50\kappa L_y^2 \quad (5.51)$$

$$q_n = -50\kappa L_x^2 \quad (5.52)$$

NESTE CASO, AO SE UTILIZAR FUNÇÕES DE APROXIMAÇÕES LINEARES (CDS) NA DISCRETIZAÇÃO DESSE PROBLEMA, VERIFICA-SE QUE NÃO OCORRE ERRO DE DISCRETIZAÇÃO. DESSE MODO, APÓS UM NÚMERO SUFICIENTE DE ITERAÇÕES, A MENOS DE ERROS DE ARREDONDAMENTO, A SOLUÇÃO NUMÉRICA DEVE COINCIDIR COM A ANALÍTICA.

• PROBLEMA 2: CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTEs CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$\begin{cases} T(0,y) = T(L_x,y) = T(x,0) = 0 \end{cases} \quad (5.53)$$

$$\begin{cases} T(x,L_y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \end{cases} \quad (5.54)$$

TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA:

$$T(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (5.55)$$

$$\bar{T} = \frac{2L_x}{\pi^2 L_y \sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.56)$$

$$q_e = \frac{\kappa}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.57)$$

$$q_n = -2\kappa \coth\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) \quad (5.58)$$

5.7. DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE (2Dp)

PARA UM ESCOAMENTO LAMINAR INCOMPRESSÍVEL TRIDIMENSIONAL, PLENAMENTE DESENVOLVIDO, EM REGIME PERMANENTE, DE FLUIDO COM PROPRIEDADES CONSTANTES EM UM DUTO DE SEÇÃO TRANSVERSAL DE TIPO RETANGULAR, FIG. 5.8, TEM-SE, DE ACORDO COM WHITE (1991):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = C = \text{CONSTANTE} \quad (5.59)$$

ONDE: z É A DIREÇÃO LONGITUDINAL DO DUTO

μ É A VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO (CONSTANTE)

p É A PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO

u É A VELOCIDADE DO FLUIDO NA DIREÇÃO z (NAS DIREÇÕES x E y , OS COMPONENTES v E w DA VELOCIDADE SÃO NULOS).

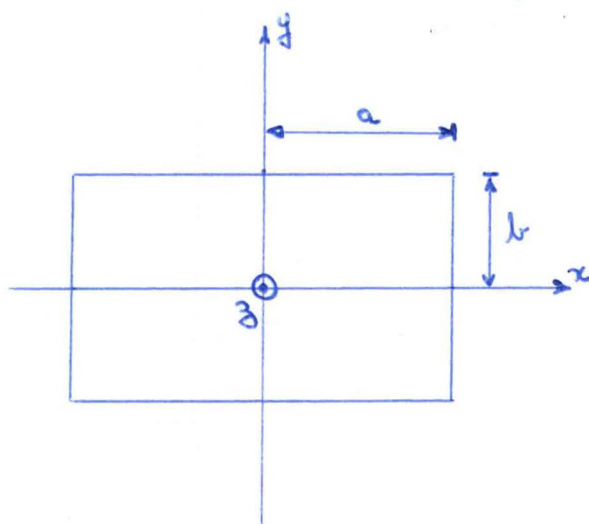


FIG. 5.8: ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM UM DUTO RETANGULAR.

O DOMÍNIO DE CÁLCULO ADOTADO É $-a \leq x \leq a$ E $-b \leq y \leq b$.

AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO SÃO DO TIPO DIRICHLET EM TODOS OS QUATRO CONTOURNOS:

$$u(-a, y) = u(a, y) = u(x, -b) = u(x, b) = 0 \quad (5.60)$$

AS VARIÁVEIS DE INTERESSE CONSIDERADAS SÃO:

- O CAMPO DE VELOCIDADES u , DA EQ. (5.59), VARIÁVEL DEPENDENTE, PRIMÁRIA.

• VELOCIDADE MÉDIA $\bar{u}$, VARIÁVEL GLOBAL SECUNDÁRIA, DEFINIDA POR

$$\bar{u} = \frac{1}{4ab} \int_{-b}^b \int_{-a}^a u dx dy \quad (5.61)$$

5.7.1. SOLUÇÃO ANALÍTICA:

CONSIDERANDO-SE AS EQS. (5.59) A (5.61), TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA:

$$u(x,y) = -\frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left(\frac{dp}{dz}\right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \left[1 - \frac{\cosh(i\pi y/2a)}{\cosh(i\pi b/2a)} \right] \left[\frac{\cos(i\pi x/2a)}{i^3} \right] \quad (5.62)$$

E

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{3\mu} \left(\frac{dp}{dz}\right) \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i\pi b/2a)}{i^5} \right] \quad (5.63)$$

5.7.2. SOLUÇÃO NUMÉRICA (DISCRETIZAÇÃO) DA QML 2Dp.

INTEGRANDO-SE A EQ. (5.59) PARA UM VOLUME DE CONTROLE GÊNÉRICO, FIG. 5.2, TEM-SE:

$$\int_{y_0}^{y_n} \int_{x_0}^{x_e} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx dy = \int_{y_0}^{y_n} \int_{x_0}^{x_e} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} dx dy \quad (5.64)$$

CONSIDERANDO-SE UMA MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO, ISTO É, $\Delta x = \Delta x_0 = \Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x_p = \Delta x_e$ E $\Delta y = \Delta y_0 = \Delta y_n = \Delta y_s = \Delta y_p = \Delta y_w$, OBTÉM-SE:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \right] \Delta y + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \Delta x \Delta y \quad (5.65)$$

UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS, A EQ. (5.65) PODE SER REESCRITA COMO

$$\left[\frac{(u_e - u_p)}{\Delta x} - \frac{(u_p - u_w)}{\Delta x} \right] \Delta y + \left[\frac{(u_n - u_p)}{\Delta y} - \frac{(u_p - u_s)}{\Delta y} \right] \Delta x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \Delta x \Delta y \quad (5.66)$$

DIVIDINDO-SE OS TERMOS DA EQUAÇÃO ANTERIOR POR $\Delta x \Delta y$ E REAGrupando-SE OS TERMOS, OBTÉM-SE:

$$\frac{u_e + u_w - 2u_p}{(\Delta x)^2} + \frac{u_n + u_s - 2u_p}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (5.67)$$

QUE ESCRITA NA FORMA

$$a_p u_p = a_w u_w + a_e u_e + a_s u_s + a_n u_n + b_p \quad (5.68)$$

POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = a_e = \frac{1}{(\Delta x)^2} \end{array} \right. \quad (5.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_s = a_n = \frac{1}{(\Delta y)^2} \end{array} \right. \quad (5.70)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \quad (5.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_p = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = -C \end{array} \right. \quad (5.72)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES REAIS.

A APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA ESTE PROBLEMA É FEITO DE MODO ANÁLOGO AO APRESENTADO NA SEÇÃO 5.3, E O ALGORITMO É IDÊNTICO ÀQUELE MOSTRADO NA SEÇÃO 5.5, ADAPTANDO-SE COEFICIENTES E TERMOS-FONTES AOS APRESENTADOS NESTA SEÇÃO.

5.8. APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO DE NEUMANN E ROBIN COM O USO DE VOLUMES FICTÍCIOS - DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL.

• APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN, PARA O CONTORNO LESTE ($x = L_x$).

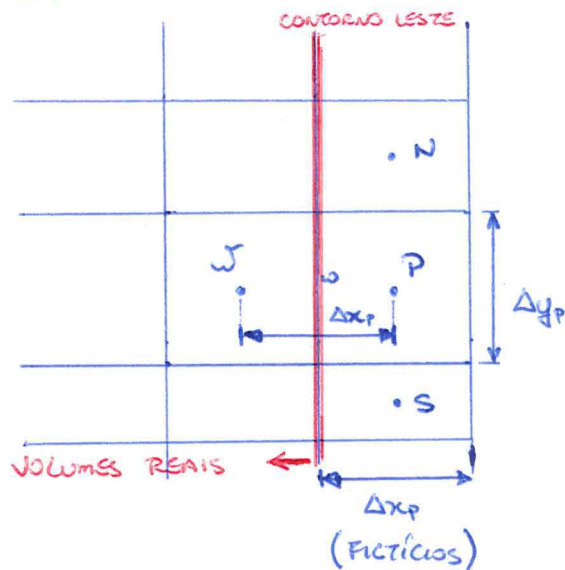


FIG. 5.9: CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM AUXÍLIO DE VOLUMES FICTÍCIOS - CONDIÇÕES DE NEUMANN E ROBIN.

ADMITINDO-SE A LEI DE FOURIER EM $x = L_x$:

$$-\left(\kappa A \frac{dT}{dx} \right)_{x=L_x} = q_L \quad (5.73)$$

QUE, APLICADA AO VOLUME FICTÍCIO P É ESCRITA COMO:

$$-\left(\kappa A \frac{dT}{dx} \right)_P = q_L \quad (5.74)$$

SENDO q_L UM VALOR CONHECIDO. DISCRETIZANDO-SE A EQ. (5.74) PARA O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 5.9, OBTÉM-SE

$$-k_w \Delta y_p \Delta z \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_p} = q_L \quad (5.75)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$T_p = T_w - \frac{q_L \Delta x_p}{k_w \Delta y_p \Delta z} \quad (5.76)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (5.9) APRESENTA COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\begin{cases} a_p = a_w = 1 \end{cases} \quad (5.77)$$

$$\begin{cases} a_e = a_n = a_s = 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\begin{cases} b_p = - \frac{q_L \Delta x_p}{k_w \Delta y_p \Delta z} \end{cases} \quad (5.79)$$

CASO T_L SEJA UMA VARIÁVEL DE INTERESSE, ELA PODE SER ESTIMADA ATRAVÉS DA SEGUINTE RELAÇÃO:

$$T_L = T_w = \frac{T_w + T_p}{2} \quad (5.80)$$

• APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE ROBIN, PARA O CONTOURNO LESTE ($x=L_x$).

ADMITINDO-SE UMA IGUALDADE ENTRE TAXAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E POR CONVECÇÃO NO CONTOURNO, TEM-SE:

$$q_L = - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_{x=L_x} = h A (T_L - T_\infty) \quad (5.81)$$

SENDO q_L , $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L_x}$, k_w E T_L VALORES DESCONHECIDOS.

DISCRETIZANDO-SE, ENTÃO, A EQ. (5.81) PARA O VOLUME DE CONTROLES P DA FIG. 5.9 OBTÉM-SE:

$$-k_w \Delta y_p \Delta z \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_p} = h \Delta y_p \Delta z (T_L - T_\infty) \quad (5.82)$$

ADMITINDO-SE, PORÉM, QUE:

$$T_L = \frac{T_w + T_p}{2} \quad (5.83)$$

E DIVIDINDO-SE A EQ. (5.82) POR $\Delta y_p \Delta z$, OBTÉM-SE:

$$-k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_p} = h \left[\frac{(T_w + T_p)}{2} - T_\infty \right] \quad (5.84)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$2k_w T_w - 2k_w T_p = h \Delta x_p T_w + h \Delta x_p T_p - 2h \Delta x_p T_\infty \quad (5.85)$$

OU, REORGANIZANDO-SE OS TERMOS,

$$(h \Delta x_p + 2k_w) T_p = (2k_w - h \Delta x_p) T_w + 2h \Delta x_p T_\infty \quad (5.86)$$

QUE COMPARADA À EQ. (5.9) TEM COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_p = h \Delta x_p + 2k_w \end{array} \right. \quad (5.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = 2k_w - h \Delta x_p \end{array} \right. \quad (5.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e = a_n = a_s = 0 \end{array} \right. \quad (5.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_p = 2h \Delta x_p T_\infty \end{array} \right. \quad (5.90)$$