

CAP. 4: DIFUSÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE (1Dt)

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- MALHAS UNIFORMES NO ESPAÇO E NO TEMPO ($\Delta x = \text{const. 1}$; $\Delta t = \text{const. 2}$)
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS E PARÂMETROS CONSTANTES: α , k , ρ , c_p , $\dot{q}$
- COORDENADAS CARTESIANAS
- CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET
- VARIÁVEL DE INTERESSE (TEMPERATURAS) EM FUNÇÃO DO ESPAÇO E DO TEMPO: $T(x, t)$
- FORMULAÇÃO NO TEMPO BASEADA NO PARÂMETRO θ .
- CONDIÇÕES INICIAIS (C.I) $\rightarrow$ PROBLEMA DEPENDENTE DO TEMPO.

4.1. MODELO MATEMÁTICO.

DADA A EQ. GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

SIMPLIFICAÇÕES:

- MODELO UNIDIMENSIONAL
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES.
- ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x .

OBTEM-SE, NESSE CASO, A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \quad (4.2)$$

CONHECIDA COMO EQUAÇÃO DE FOURIER. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CON-
TORNOS (C.C) DE DIRICHLET, CONSTANTES NO TEMPO:

$$\begin{cases} T(0, t) = T_A \\ T(L, t) = T_B \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

E A CONDIÇÃO INICIAL PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS (C.I.):

$$T(x, 0) = T_i(x) \quad (4.5)$$

SENDO T_i UMA FUNÇÃO DEPENDENTE DA COORDENADA ESPACIAL.

OBS.: PARA AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO, EM CERTOS CASOS COMO PROBLEMAS QUE ENVOLVEM
RADIACÃO SOLAR, AS CONDIÇÕES DE DIRICHLET PODEM SER FUNÇÕES DEPENDENTES DO
TEMPO.

AS VARIÁVEIS/PROPRIEDADES EXISTENTES NA EQ. (4.2) SÃO:

T : TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K]

κ : CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MEIO [W/mK]

ρ : MASSA ESPECÍFICA DO MEIO [kg/m^3]

c_p : CALOR ESPECÍFICO DO MEIO [J/kgK]

x : COORDENADA ESPACIAL $[m]$

t : COORDENADA TEMPORAL $[s]$

A : ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE $[m^2]$

$\dot{q}$: TAXA DE GERAÇÃO VOLUMÉTRICA DE CALOR $[W/m^3]$

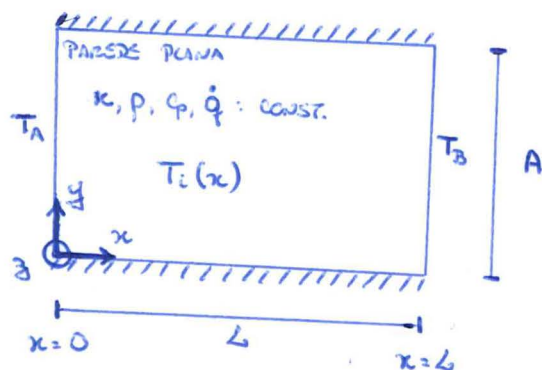


FIG. 4.1: CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE EM UMA PAREDE PLANA.

4.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE

- DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS, $T(x,t)$ DA EQ. (4.2)
- TEMPERATURA MÉDIA ($\bar{T}$) NO DOMÍNIO PARA CADA INSTANTE DE TEMPO t .

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,t) dx \quad (4.6)$$

4.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA EMPREGANDO-SE A FORMULAÇÃO θ .

CONSIDERANDO-SE O VOLUME P DA FIG. 4.2:

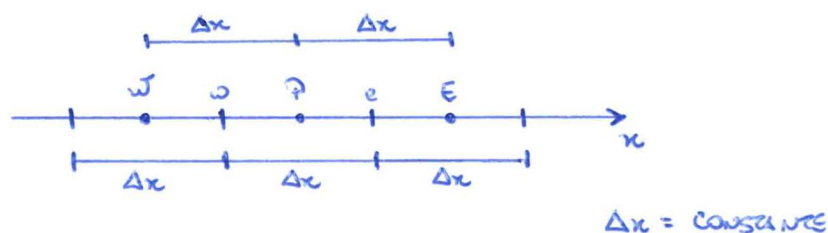


FIG. 4.2: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

E INTEGRANDO-SE A EQ. (4.2) AO LONGO DO TEMPO, DESDE $(t-\Delta t)$ ATÉ (t) TEM-SE:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_3 \int_y \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz dt = \int_{t-\Delta t}^t \int_3 \int_y \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz dt \quad (4.7)$$

- INTEGRAIS ESPACIAIS:

$$\int_3 \int_4 \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz = \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x \right] \Delta y \Delta z \quad (4)$$

ADMITINDO-SE κ E $\dot{q}$ CONSTANTES E $\Delta y \Delta z = A$, TEM-SE:

$$= \kappa A \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \dot{q} \Delta x A$$

UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES (CDB-2) PARA AVALIAR AS DERIVADAS $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e$ E $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$, OBTÉM-SE:

$$= \kappa A \left[\frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x} \right] + \dot{q} \Delta x A$$

$$= \frac{\kappa A}{\Delta x} (T_W + T_E - 2T_P) + \dot{q} \Delta x A \quad (4.8)$$

$$\int_3 \int_4 \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz = (\rho)_p (c_p)_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \Delta x \Delta y \Delta z$$

ADMITINDO-SE ρ E c_p CONSTANTES E $\Delta y \Delta z = A$, TEM-SE:

$$= \rho c_p \Delta x A \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \quad (4.9)$$

- INTEGRAIS TEMPORAIS:

$$\int_{t-\Delta t}^t \left[\rho c_p \Delta x A \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \right] dt = \rho c_p \Delta x A (T_P - T_P^0) \quad (4.10)$$

ONDE: T_P REFERE-SE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO TEMPO t (SOLUÇÃO A DETERMINAR).

T_P^0 REFERE-SE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO TEMPO $t - \Delta t$ (SOLUÇÃO CONHECIDA OU CONDIÇÃO INICIAL OU ANTERIOR).

$$\int_{t-\Delta t}^t \left\{ \frac{\kappa A}{\Delta x} (T_W + T_E - 2T_P) + \dot{q} \Delta x A \right\} dt = \left[\frac{\kappa A}{\Delta x} (T_W^0 + T_E^0 - 2T_P^0) + \dot{q} \Delta x A \right] \Delta t \quad (4.11)$$

ONDE:

$$T_P^0 = T_P^0 + \theta (T_P - T_P^0) \quad (4.12)$$

com

$$0 \leq \theta \leq 1$$

(4.13)

5

- se $\theta = 0$: $T_p^0 = T_p^0$: TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE $(t - \Delta t)$
- se $\theta = 1$: $T_p^0 = T_p$: TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE (t)

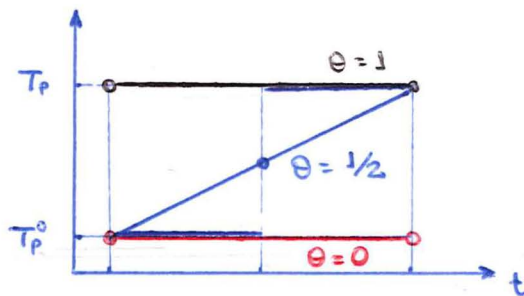
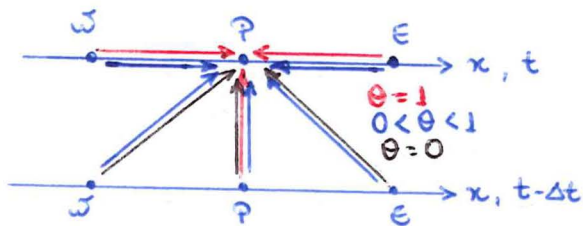


FIG. 4.3: INTEGRAÇÃO NO TEMPO COM A FORMULAÇÃO θ .

NOMES ESPECIAIS: $\theta = 0$: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

$\theta = 1/2$: FORMULAÇÃO CRANK-NICOLSON

$\theta = 1$: FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA

UTILIZANDO-SE AS EQS. (4.10) A (4.12) NA EQ. (4.7) CHEGA-SE A

$$\rho C_p \Delta x A (T_p - T_p^0) = \frac{\kappa A}{\Delta x} \left[T_E^0 + \theta (T_E - T_E^0) + T_W^0 + \theta (T_W - T_W^0) - 2T_p^0 - 2\theta (T_p - T_p^0) \right] \Delta t + \dot{q} \Delta x A \Delta t \quad (4.14)$$

QUE PODE SER REESCRITA NA FORMA:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (4.15)$$

NA QUAL:

$$a_e = a_w = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \vphantom{\frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x}} \right\} \text{COEFICIENTES} \quad (4.16)$$

$$a_p = a_w + a_e + \rho C_p \Delta x A \quad (4.17)$$

$$b_p = b' T_p^0 + b'' (T_W^0 + T_E^0) + \dot{q} \Delta x A \Delta t \quad (4.18)$$

$$b' = \rho C_p \Delta x A + 2(\theta - 1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \vphantom{\rho C_p \Delta x A + 2(\theta - 1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x}} \right\} \text{TERMOS-FONTE} \quad (4.19)$$

$$b'' = (1 - \theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.20)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES INTERNOS ($P = 2, \dots, N-1$).

ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO ESQUERDO ($P=1$)

Em $x=0$, ONDE A CONDIÇÃO DE CONTORNO É DADA PELA EQ.(4.3), $T(0,t) = T_A$, TEM-SE:

$$a_w = 0 \quad (4.21)$$

$$a_e = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{COEFICIENTES} \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

$$a_p = 3a_e + \rho c_p \Delta x A \quad (4.23)$$

$$b_p = b' T_p^o + b'' T_E^o + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2 T_A \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$b' = \rho c_p \Delta x A + 3(\theta-1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{TERMO-FONTES} \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

$$b'' = (1-\theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.26)$$

ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO DIREITO ($P=N$)

Em $x=L$, ONDE A CONDIÇÃO DE CONTORNO É DADA PELA EQ.(4.4), $T(L,t) = T_B$, TEM-SE

$$a_e = 0 \quad (4.27)$$

$$a_w = \frac{\theta \kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{COEFICIENTES} \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

$$a_p = 3a_w + \rho c_p \Delta x A \quad (4.29)$$

$$b_p = b' T_p^o + b'' T_W^o + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2 T_B \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.30)$$

$$b' = \rho c_p \Delta x A + 3(\theta-1) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{TERMO-FONTES} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

$$b'' = (1-\theta) \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.32)$$

APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DA EQ.(4.6) PELA REGRAS DO TRAPÉZIO.

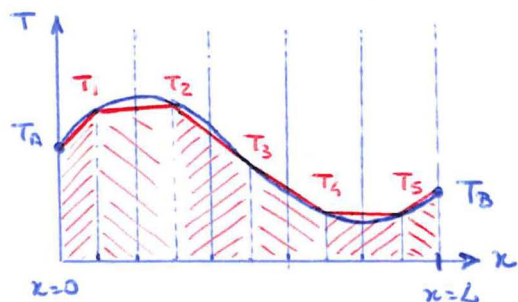


FIG. 4.4: EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA REGRAS DO TRAPÉZIO.

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \left[\frac{(T_A + T_1)}{2} x_1 + \sum_{p=2}^N \frac{(T_{p-1} + T_p)}{2} (x_p - x_{p-1}) + \frac{(T_N + T_B)}{2} (L - x_N) \right] \quad (4.33)$$

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \left[\frac{(T_A + T_1)}{2} \frac{\Delta x}{2} + \sum_{p=2}^N \frac{(T_W + T_p)}{2} \Delta x + \frac{(T_N + T_B)}{2} \frac{\Delta x}{2} \right] \quad (4.34)$$

CONSIDERANDO-SE UMA MALHA UNIFORME ($\Delta x = \text{CONST.}$); T_A E T_B SÃO AS CONDIÇÕES DE CON-
TORNO E N É O NÚMERO TOTAL DE VOLUMES DE CONTROLE.

SE A MALHA EMPREGADA FOR DO TIPO NÃO-UNIFORME, A EQ. (4.33) PODE SER EMPREGADA.

ALGORITMO:

1) USR OS DADOS: T_A , T_B , p , q , K , A , L , $\dot{q}$, θ , T_i (QUE PODE SER UMA FUNÇÃO), t_F , N , m

ONDE: t_F É O INSTANTE DE TEMPO NO QUAL SE DESEJA $T(x)$ OU O INSTANTE NO QUAL SE
DESEJA PARAR O AVANÇO NO TEMPO.

m É O NÚMERO TOTAL DE AVANÇOS NO TEMPO, DE $t=0$ A $t=t_F$.

2) OBTER: $\Delta x = \frac{L}{N}$ (4.35)

3) OBTER: $\Delta t = \frac{t_F}{m}$ (4.36)

4) FAZER $T_p^0(x, 0) = T_i(x)$ E $t=0$ (APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL)

5) FAZER $t = t + \Delta t$

6) CALCULAR OS COEFICIENTES (a_w , a_e , a_p) E TERMOS-FONTES (b_p) DE TODOS OS VOLUMES
DE CONTROLE

7) COM O MÉTODO TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA OBTER $T_p(x_p, t)$

8) OBTER $\bar{T}(t)$

9) FAZER $T_p^0 = T_p$

10) VOLTAR AO ITEM 5 ATÉ ATINGIR $t = t_F$.

11) IMPRIMIR E VISUALIZAR $T(x, t_F)$.

12) IMPRIMIR E VISUALIZAR $\bar{T}(t)$.

CASO SE TENHA $K = K(T)$, SERÁ NECESSÁRIO ITERAR OS ITENS 6 E 7 EM CADA t ATÉ
QUE SE ATINJA ALGUM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA PRÉ-DEFINIDO.

A FORMULAÇÃO APRESENTADA ATÉ O MOMENTO É A CHAMADA FORMULAÇÃO IMPLÍCITA ($0 < \theta < 1$),
ESQUEMATIZADA NA FIG. 4.5.

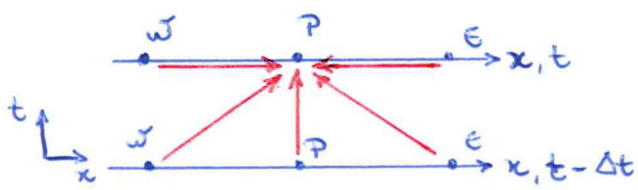


FIG. 4.5: FORMULAÇÃO IMPLÍCITA ($0 < \theta < 1$)

4.4. FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA ($\theta = 1$)

PARA $\theta = 1$, AS EQS. (4.15) A (4.20) SE REDUZEM A:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (\text{TRIDAGONAL}) \quad (4.37)$$

$$a_w = a_e = \frac{\kappa A \Delta t}{\Delta x} \quad (4.38)$$

$$a_p = a_w + a_e + \rho c_p \Delta x A \quad (4.39)$$

$$b_p = \dot{q} \Delta x A \Delta t + \rho q A \Delta x T_p^0 \quad (4.40)$$

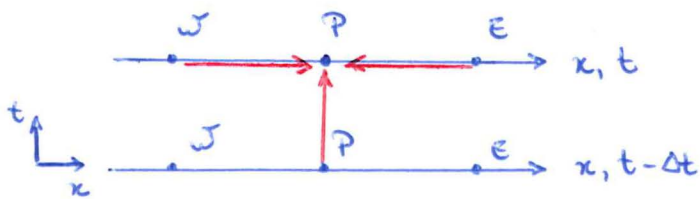


FIG. 4.6: FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA ($\theta = 1$)

4.5. FORMULAÇÃO EXPLÍCITA ($\theta = 0$)

PARA $\theta = 0$, AS EQS. (4.15) A (4.20) SE REDUZEM A:

$$a_p T_p = b_p \quad (4.41)$$

ONDE:

$$a_p = \rho c_p \Delta x A \quad (4.42)$$

$$b_p = b' T_p^0 + b'' (T_w^0 + T_e^0) + \dot{q} A \Delta x \Delta t \quad (4.43)$$

$$b' = \rho c_p A \Delta x - 2\kappa A \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.44)$$

$$b'' = \kappa A \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.45)$$

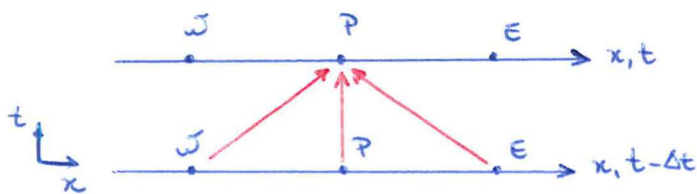


FIG. 4.7: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

4.6. SOLUÇÃO ANALÍTICA

CONSIDERANDO-SE p, c_p, k CONSTANTES E $\dot{q} = 0$, A EQ. (4.2) SE REDUZ A

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.46)$$

SE PARA TAL EQUAÇÃO FOREM CONSIDERADAS, AINDA:

$$T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad (\text{CONDIÇÕES DE CONFINAMENTO}) \quad (4.47)$$

$$T(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (\text{CONDIÇÃO INICIAL}) \quad (4.48)$$

TEM-SE QUE A SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CAMPO DE TEMPERATURAS SERÁ

$$T(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (4.49)$$

$$\bar{T}(t) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (4.50)$$

$$\text{ONDE } \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \text{ É A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DO MATERIAL } [m^2/s] \quad (4.51)$$

4.7. SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE

CONSISTÊNCIA: UM MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE SE A EQUAÇÃO DISCRETIZADA TENDE À EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORIGINAL QUANDO Δx E Δt TENDEM A ZERO.

POR EXEMPLO, AO SE CONSIDERAR A EQ. (4.46), UMA POSSIBILIDADE DE DISCRETIZAÇÃO CONDUZ A

$$\frac{(T_P - T_P^0)}{\Delta t} = \alpha \frac{(T_E + T_W - 2T_P)}{(\Delta x)^2} \quad (4.52)$$

NESTE CASO, AO SE FAZER $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ E APLICANDO-SE TANTO A DEFINIÇÃO DE DERIVADA QUANTO SÉRIES DE TAYLOR, PODE-SE MOSTRAR QUE A EQ. (4.52) TENDE À EQ. (4.46), DE MODO QUE O MODELO É DITO CONSISTENTE.

ESTABILIDADE: UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL SE O ERRO NUMÉRICO (E_n) TENDE A

UM VALOR FINITO (S) QUANDO O NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO, MANTENDO-SE Δx E Δt FIXOS:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |E_n(T_p)| = S_p \quad (4.53)$$

POR EXEMPLO, PARA AS DISCRETIZAÇÕES VISTAS NESTE CAPÍTULO E $\dot{q} = 0$ TEM-SE QUE:

- A SOLUÇÃO NUMÉRICA É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL SE $1/2 \leq \theta \leq 1$.
- PARA $0 \leq \theta < 1/2$, A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL APENAS SE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2-4\theta} \quad (4.54)$$

SE $\theta = 0$, A CONDIÇÃO A SER SATISFEITA É

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.55)$$

JÁ PARA $\theta = 1/2$, TEM-SE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \infty \quad (4.56)$$

DE MODO QUE A SOLUÇÃO É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL.

HIRSCH, EM SUA OBRA INTITULADA "NUMERICAL COMPUTATION OF INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS" (REF. 8) APRESENTA ALGUNS MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE. ESTE TIPO DE ANÁLISE VERIFICA SE A SOLUÇÃO NUMÉRICA TENDE À SOLUÇÃO EXATA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES OU DIVERGE.

A ESTABILIDADE PODE DEPENDER DE UM FATOR DE RELAXAÇÃO (COMO O NO MÉTODO SOR).

CONVERGÊNCIA: UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É CONVERGENTE QUANDO O MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE E A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL.

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta x, \Delta t \rightarrow 0}} |E_n(T_p)| = 0 \quad (4.57)$$

UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE TENDE À SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUANDO $i \rightarrow \infty$ (NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO) E $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (TAMANHO DOS ELEMENTOS ESPACIAL E TEMPORAL TENDEM A ZERO).

4.8. ESTIMATIVA DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO MULTIDIMENSIONAIS

PARA UM PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL (x, y, z, t) , O REFINO DE MALHA PODE SER FEITO DE DOIS MODOS: MULTIDIMENSIONAL OU UNIDIMENSIONAL.

NO CAP. 3 FOI VISTO QUE A ESTIMATIVA DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS É BASEADA EM SOLUÇÕES NUMÉRICAS OBTIDAS EM DUAS OU MAIS MALHAS DIFERENTES, QUE SÃO CORRELACIONADAS PELA RAZÃO DE REFINO DE MALHA (π).

NO REFINO MULTIDIMENSIONAL, A MESMA RAZÃO DE REFINO DE MALHA É APLICADA EM TODAS AS DIMENSÕES. POR EXEMPLO: MALHA SUPERGROSSA = 8×64 JOUMES, MALHA GROSSA = 16×128 JOUMES E MALHA FINA = 32×256 JOUMES. O PRIMEIRO VALOR SE REFERE À QUANTIDADE DE JOUMES NA DIREÇÃO x E O SEGUNDO, À QUANTIDADE EM y . NESTE CASO, A RAZÃO DE REFINO ADOPTADA É $\pi = 2$, EM AMBAS AS DIREÇÕES, OU SEJA, $\pi_x = \pi_y = 2$. NO CASO DE REFINO MULTIDIMENSIONAL É VÁLIDA A TEORIA VISTA NA SEÇÃO 3.3 DO CAPÍTULO ANTERIOR. A ÚNICA DIFERENÇA DIZ RESPEITO À ORDEM ASSINTÓTICA (p_L) A SER EMPREGADA, CUIO VALOR DEVE SER IGUAL AO MENOR VALOR ENTRE AQUELES DAS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS ADOPTADAS EM CADA DIMENSÃO. EXEMPLO: SE USADO CDS-2 ($p_L = 2$) NO ESPAÇO E $\theta = 1$ ($p_L = 1$) NO TEMPO, $p_L = 1$.

NO REFINO UNIDIMENSIONAL CADA DIMENSÃO (ESPACIAL E TEMPORAL) PODE SER REFINADA SEPARADAMENTE DAS DE MAIS. AS ORDENS ASSINTÓTICAS E RAZÕES DE REFINO DE MALHA PODEM SER IGUAIS OU DIFERENTES EM CADA DIMENSÃO. POR EXEMPLO: MALHA GROSSA = 64×750 ; MALHA FINA NO ESPAÇO = 128×750 , O QUE RESULTA EM $\pi_x = 2$; MALHA FINA NO TEMPO = 64×1125 , RESULTANDO EM $\pi_t = 1,5$. DETALHES SOBRE A ESTIMATIVA DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO COM REFINO UNIDIMENSIONAL, PARA PROBLEMAS MULTIDIMENSIONAIS, PODEM SER ENCONTRADOS NO ARTIGO "MULTI-DIMENSIONAL DISCRETIZATION ERROR ESTIMATION FOR CONVERGENT APPARENT ORDER" DE MARCHI E SILVA (2005).