

CAP. 2: DIFUSÃO DE CALOR E DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) UNIDIMENSIONAIS (1D) EM REGIME PERMANENTE

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- MALHAS UNIFORMES E NÃO-UNIFORMES
- PROBLEMAS LINEARES E NÃO-LINEARES
- COORDENADAS CARTESIANAS E CILÍNDRICAS
- CONDIÇÕES DE CONTOORNOS:
 - DIRICHLET
 - NEUMANN
 - ROBIN
- PRINCÍPIO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

2.1. PRINCÍPIO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

MODELO MATEMÁTICO GERAL PARA PROBLEMAS DE REGIME PERMANENTE:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{J} \phi)}_{\text{ADVECÇÃO}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi)}_{\text{DIFUSÃO DE } \phi \text{ COM TERMO-FONTE}} + S_{\phi} \quad (2.1)$$

$$\text{ONDE: } \vec{\nabla} : \text{OPERADOR NABLA} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2)$$

(SIST. COORDENADAS CARTESIANAS)

 ρ : MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO $[\text{kg/m}^3]$ Γ : COEFICIENTE DE TRANSPORTE: μ, k, D $\phi = 1$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA MASSA) $= u$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM x) $= v$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM y) $= w$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA QUANT. DE MOVIMENTO LINEAR EM z) $= T$ (EQ. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA)

$$\vec{J} = \hat{i} u + \hat{j} v + \hat{k} w \quad (\text{VETOR VELOCIDADE}) \quad (2.3)$$

 S_{ϕ} : TERMO-FONTE DE CADA ϕ : $-\frac{\partial p}{\partial x}, \dot{q}, \dots$ $\vec{\nabla} \phi$: GRADIENTE DE ϕ $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$: DIVERGENTE DE $\vec{J}$

BASICAMENTE, A APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS A UM MODELO MATEMÁTICO, COMO O DA EQ. (2.1), É FEITA EM 4 ETAPAS:

1) DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO COM VOLUMES DE CONTROLES:

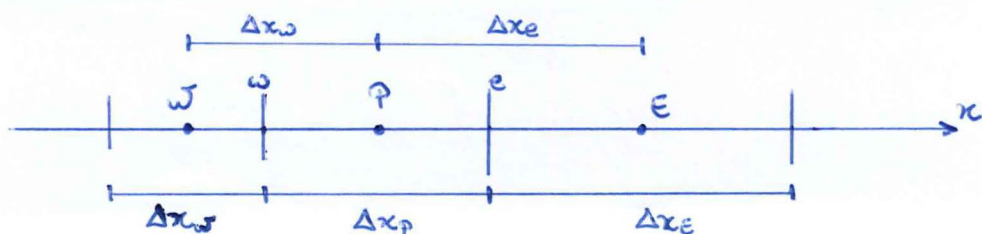


FIG. 2.1: MALHA UNIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES.



FIG. 2.2: MALHA UNIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE FACES CENTRADAS ENTRE NÓS

P: VOLUME DE CONTROLE OU NÓ GÊNÉRICO SOBRE O QUAL O MODELO MATEMÁTICO É DISCRETIZADO

J, E: VOLUMES DE CONTROLE (NÓS) VIZINHOS A P, À ESQUERDA E À DIREITA, RESPECTIVAMENTE

w, e: FACES DO VOLUME DE CONTROLE P, À ESQUERDA E À DIREITA, RESPECTIVAMENTE

MALHA: CONJUNTO DE TODOS OS NÓS OU VOLUMES DE CONTROLE QUE DISCRETIZAM O DOMÍNIO DE CÁLCULO.

NO CASO DE UMA MALHA DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES, A MALHA É GERADA DEFININDO-SE AS DIMENSÕES Δx_w , Δx_p , Δx_e E POSICIONANDO-SE OS NÓS NO CENTRO DE CADA VOLUME.

UMA MALHA É DITA UNIFORME QUANDO

$$\Delta x_w = \Delta x_e = \Delta x_J = \Delta x_P = \Delta x_E = \Delta x$$

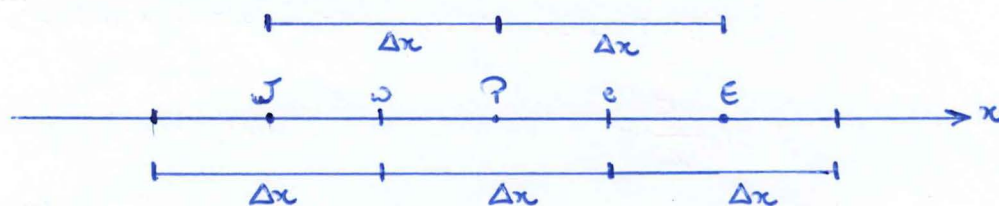


FIG. 2.3: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

2) INTEGRAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO SOBRE CADA VOLUME DE CONTROLE (VC)

$$\iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi) dJ = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) dJ + \iint_{VC} S_\phi dJ \quad (2.4)$$

dJ : ELEMENTO DE VOLUME

3) APLICAÇÃO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS:

DESSE MODO, A EQ. (2.4) RESULTA EM

$$\iint_A (\rho \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} dA = \iint_A (\Gamma \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} dA + \iiint_V S_\phi dV \quad (2.5)$$

ONDE: dA : ELEMENTO DE ÁREA DA SUPERFÍCIE DO ELEMENTO DE VOLUME dV
 $\hat{n}$: VETOR NORMAL UNITÁRIO EM CADA PONTO DE dA .

DEVE-SE OBSERVAR QUE, ATÉ ESTE PONTO, NÃO FOI REALIZADA QUALQUER APROXIMAÇÃO NUMÉRICA.

4) APÓS A INTEGRAÇÃO DA EQ. (2.5), APLICAÇÃO DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO CONECTANDO O NÓ P A SEUS VIZINHOS.

AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO INTRODUEM APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS.

2.2. CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PAREDE PLANA COM GERAÇÃO DE CALOR E CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE DIRICHLET

2.2.1. MODELO MATEMÁTICO

EQUAÇÃO GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

SIMPLIFICAÇÕES:

- REGIME PERMANENTE
- MODELO UNIDIMENSIONAL
- ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x

OBTEM-SE, NESSE CASO, A SEGUINTE EQUAÇÃO:

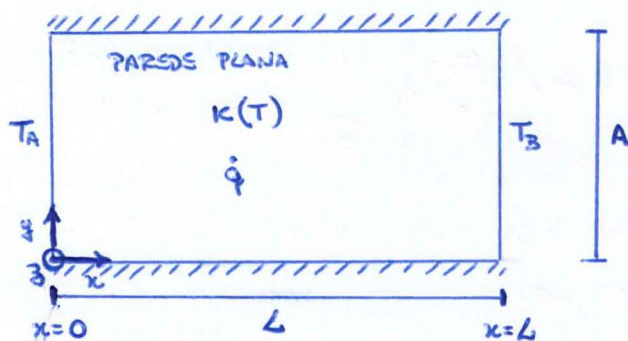
$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.7)$$

QUE SE CONSTITUI EM UMA EQUAÇÃO DO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CONTOURNO (C.C.) DE DIRICHLET:

$$T(0) = T_A \quad (2.8)$$

$$T(L) = T_B \quad (2.9)$$

(VALORES CONHECIDOS DA TEMPERATURA NOS DOIS CONTOURNOS).



EXEMPLO: CONDUTOR ELÉTRICO
(EFEITO JOULE - $\dot{q}$)

FIG. 2.4: CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PAREDE PLANA

ONDE: T : TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K]

k : CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MATERIAL DA PAREDE [W/m K]

$\dot{q}$: TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR [W/m^3]

A : ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE [m^2]; CONSTANTE EM x .

2.2.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE:

- CAMPO DE TEMPERATURAS, $T(x)$, DA EQ. (2.7)

- TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR (q) NOS CONTORNOS: (DA LEI DE FOURIER)

$$q|_{x=0} = q_0 = - \left[k A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = - A \left[k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=0} \quad (2.10)$$

$$q|_{x=L} = q_L = - A \left[k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=L} \quad (2.11)$$

- TEMPERATURA MÉDIA DO DOMÍNIO, DEFINIDA POR

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (2.12)$$

2.2.3. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE.

INTEGRANDO-SE A EQ. (2.7) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 2.1 (MALHA NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS), OBTÉM-SE:

$$\int_3 \int_4 \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz = 0 \quad (2.13)$$

QUE RESULTA EM

$$\left[\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_\omega + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.14)$$

ONDE SE OBSERVA QUE O VALOR DE $\dot{q}$ É AVALIADO NO NÓ P, SENDO CONSIDERADO CONSTANTE NO VOLUME DE CONTROLE P.

OUTRA POSSIBILIDADE DE OBTENÇÃO DA EQ. (2.14) É FEITA A SEGUIR: REESCREVENDO-SE A EQ. (2.7) COMO

$$\vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) + \dot{q} = 0 \quad (2.15)$$

E INTEGRANDO-SE A EQUAÇÃO ANTERIOR EM UM VOLUME DE CONTROLE P, APRESENTADO NA FIG. (2.1):

$$\iiint_{VC} [\vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) + \dot{q}] dV = 0 \quad (2.16)$$

APLICANDO-SE, ENTÃO, O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS:

$$\iint_S (\kappa \vec{\nabla} T) \cdot \hat{n} dA + \iiint_{VC} \dot{q} dx dy dz = 0 \quad (2.17)$$

RESULTANDO EM

$$\left[\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_\omega + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.18)$$

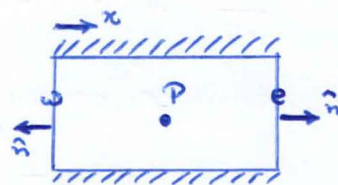


FIG. 2.5: VOLUME DE CONTROLE P, APRESENTANDO OS VETORES NORMAIS UNITÁRIOS NAS FACES ω E e .

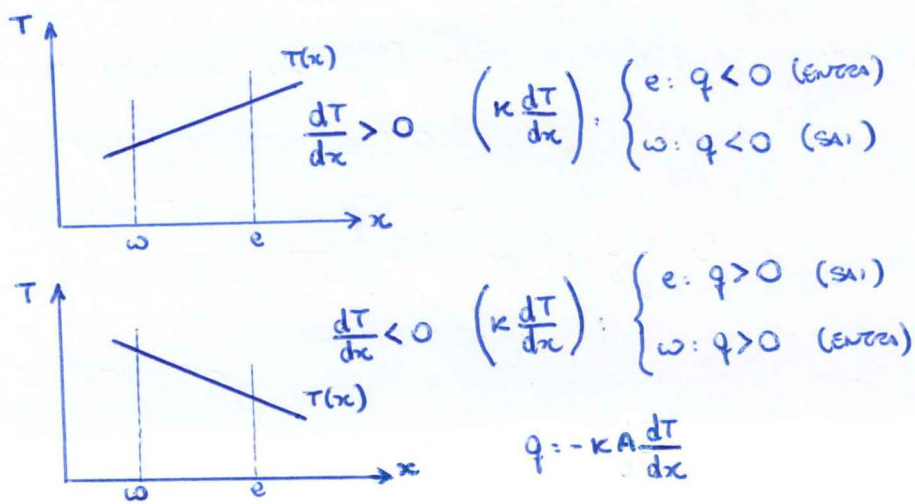


FIG. 2.6: PERFIS DE dT/dx E VALORES DE q .

OS TERMOS ENTRE PARÊNTESES DAS EQS. (2.14) E/OU (2.18) SÃO APROXIMADOS COM FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES ENTRE OS NÓS, OU SEJA, CDS (CENTRAL DIFFERENCING SCHEME) OU DIFERENÇA CENTRAL:

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e \approx k_e \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.19)$$

(MOSTRAR FIG. 2.7 - P. 9)

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \approx k_w \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} \quad (2.20)$$

ALÉM DA INTERPRETAÇÃO DA APROXIMAÇÃO CDS COMO SENDO INTERPOLAÇÕES LINEARES, PODE-SE OBTER TAIS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ATRAVÉS DE EXPANSSÕES DE SÉRIES DE TAYLOR:

$$T_p = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.21)$$

$$T_e = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.22)$$

SUBTRAINDO-SE A EQ. (2.21) DA EQ. (2.22), OBTÉM-SE:

$$T_e - T_p = \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \Delta x_e + 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^5 \cdot \frac{1}{5!} + \dots \quad (2.23)$$

NA EQ. (2.23), ISOLANDO-SE $\left. \frac{dT}{dx} \right|_e$ OBTÉM-SE:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e = \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} - 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^2}{2^3 \cdot 3!} + 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^4}{2^5 \cdot 5!} + \dots \quad (2.24)$$

CONSIDERANDO-SE APENAS O PRIMEIRO TERMO DA EXPANSÃO DADA PELA EQ. (2.24) TEM-SE

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e \approx \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.25)$$

QUE FOI EMPREGADA NA OBTENÇÃO DA EQ. (2.19).

OS VALORES DE k_w E k_e PODEM SER OBTIDOS CONFORME PATANKAR (p. 44-46):

$$k_w = \frac{(\Delta x_w + \Delta x_p) k_w k_p}{(\Delta x_p k_w + \Delta x_w k_p)} \quad (2.26)$$

$$K_e = \frac{(\Delta x_p + \Delta x_e) K_p K_e}{(\Delta x_p K_e + \Delta x_e K_p)} \quad (2.27)$$

TAIS EXPRESSÕES RESULTAM EM q CONSTANTE ENTRE DOIS NÓS CONSECUTIVOS.

NO CASO PARTICULAR DE MALHA UNIFORME, FIG. 2.3, AS EDS. (2.26) E (2.27) SE TRANSFORMAM EM MÉDIAS HARMÔNICAS:

$$K_w = \frac{2 K_w K_p}{(K_w + K_p)} \quad (2.28)$$

$$K_e = \frac{2 K_p K_e}{(K_p + K_e)} \quad (2.29)$$

EMPREGANDO-SE AS EDS. (2.19) E (2.20) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

$$A K_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - A K_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + A \dot{q}_p \Delta x_p = 0$$

OU SEJA,

$$A \left(\frac{K_w}{\Delta x_w} + \frac{K_e}{\Delta x_e} \right) T_p = \left(A \frac{K_w}{\Delta x_w} \right) T_w + \left(A \frac{K_e}{\Delta x_e} \right) T_e + (\dot{q}_p \Delta x_p A) \quad (2.30)$$

UMA EQUAÇÃO DESSE TIPO É VÁLIDA PARA CADA NÓ $P = 2$ A $N-1$ (VOLUMES INTERNOS), ISTO É, NÓS P QUE POSSUEM NÓS VIZINHOS A OESTE E A LESTE. A EQ. (2.30) É NORMALMENTE ESCRITA NA FORMA

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + I_p \quad (2.31)$$

ONDE:

$$\text{COEFICIENTES} \begin{cases} a_w = \frac{K_w A}{\Delta x_w} \\ a_e = \frac{K_e A}{\Delta x_e} \\ a_p = a_w + a_e \end{cases} \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

$$(2.34)$$

$$\text{TERMO-FONTE: } I_p = \dot{q}_p \Delta x_p A \quad (2.35)$$

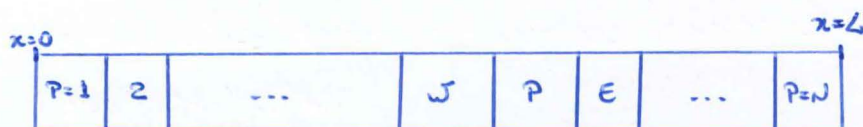


FIG. 2.8: DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO EM N VOLUMES DE CONTROLE

DEVE-SE OBSERVAR QUE N É O NÚMERO TOTAL DE VOLUMES DE CONTROLES QUE DISCRETIZAM O DOMÍNIO DE CÁLCULO.

2.2.4. APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE DIRICHLET.

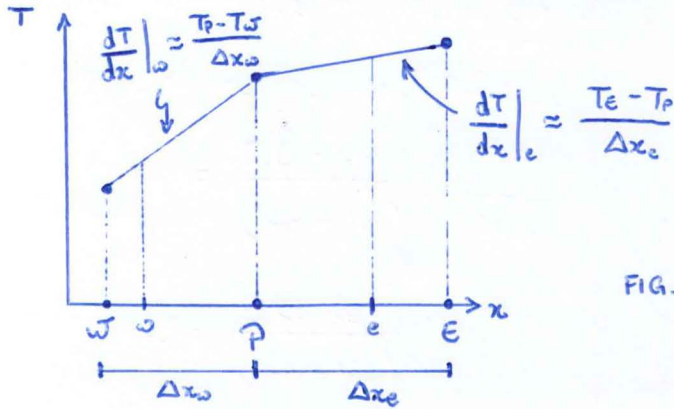


FIG. 2.7: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS APROXIMAÇÕES CDS

EXISTEM VÁRIAS FORMAS DE SE APLICAR CONDIÇÕES DE CONTOURNO AO SE EMPREGAR O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS, DENTRE OS QUAIS SE CITAM: INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO NOS VOLUMES VIZINHOS AOS CONTOURNOS, USO DE VOLUMES FICTÍCIOS, USO DE VOLUMES DE ESPESSURA ZERO E USO DE MEIO VOLUME.

A SEGUIR, É UTILIZADA A TÉCNICA DE INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO NOS VOLUMES VIZINHOS AOS CONTOURNOS DO DOMÍNIO.

- CONTOURNO ESQUERDO: $P=1$.

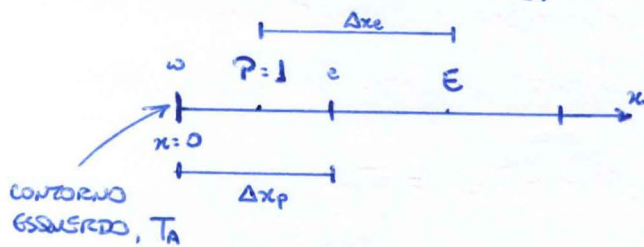


FIG. 2.9: CONTOURNO ESQUERDO, $P=1$. ($x=0$)

NO CASO DO VOLUME $P=1$, SUA FACE OESTE (W) COINCIDE COM O CONTOURNO DO DOMÍNIO, NOTA-SE QUE NÃO É POSSÍVEL REALIZAR UMA APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS PARA A FACE W, UMA VEZ QUE NÃO EXISTE VOLUME À ESQUERDA DE $P=1$. NESTE CASO, É NECESSÁRIO UTILIZAR OUTRA FORMA DE APROXIMAÇÃO, QUE NESTE CASO É DENOMINADA DE FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO A JUSANTE OU DDS (DOWNSTREAM DIFFERENCING SCHEME):

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \approx k_w \frac{T_P - T_A}{\Delta x_p / 2} = 2 k_w \frac{(T_P - T_A)}{\Delta x_p} \quad (2.36)$$

DEVE-SE NOTAR QUE NA APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e$ NÃO MUDA, POIS EXISTE UM VIZINHO À DIREITA (VOLUME DE CONTROLE E).

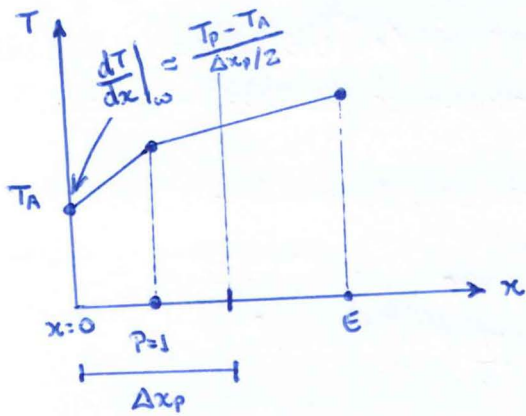


FIG. 2.10: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA DDS.

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.19) E (2.36) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

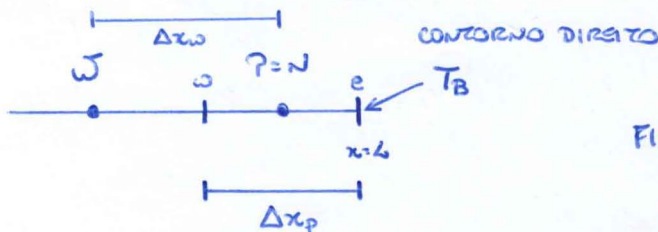
$$A k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - 2 A k_w \frac{(T_P - T_A)}{\Delta x_p} + \dot{Q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.37)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (2.31) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TSMO-FONTS:

$$\begin{cases} a_w = 0 & (2.38) \\ a_e = \frac{k_e A}{\Delta x_e} & (2.39) \\ a_p = a_e + \frac{2 k_w A}{\Delta x_p} & (2.40) \end{cases}$$

$$\text{TSMO-FONTS: } h_p = \dot{Q}_p \Delta x_p A + \frac{2 k_w A}{\Delta x_p} T_A \quad (2.41)$$

- CONTORNO DIREITO: $P=N$

FIG. 2.11: CONTORNO DIREITO, $P=N$ ($x=L$).

NO CASO DO JOWME $P=N$, CUIA FACE LESTE (e) COINCIDE COM O CONTORNO DO DOMÍNIO, DEVE-SE ALTERAR A APROXIMAÇÃO DE $(dT/dx)_e$ DO ESQUEMA CDS PARA OUTRA FORMA DE APROXIMAÇÃO, TENDO-SE EM VISTA QUE NÃO EXISTE JOWME DE CONTROLE À DIREITA DE $P=N$. NESTE CASO, RECORRE-SE À APROXIMAÇÃO DO TIPO A MONTANTE, OU FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO A MONTANTES, CHAMADA TAMBÉM DE UDS (UPSTREAM DIFFERENCING SCHEMES):

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e \approx k_e \frac{T_B - T_P}{\Delta x_p/2} = 2 k_e \frac{(T_B - T_P)}{\Delta x_p} \quad (2.42)$$

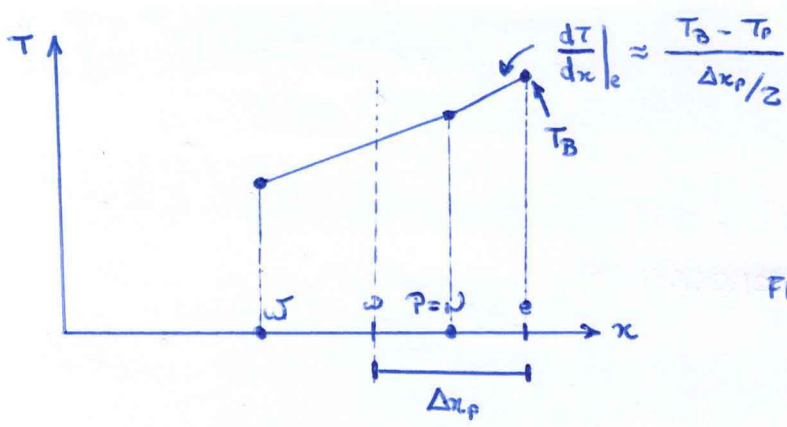


FIG. 2.12: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA UDS.

NOTA-SE QUE, PARA A APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx}\right)_w$ NÃO HÁ MUDANÇAS, POIS EXISTE UM JOWMS DE CONTROLES À ESQUERDA (JOWMS J).

UTILIZANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.20) E (2.42) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE:

$$2k_e A \frac{(T_B - T_P)}{\Delta x_p} - k_w A \frac{(T_P - T_J)}{\Delta x_w} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.43)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) FORMELES:

$$\text{COEFICIENTES} \begin{cases} a_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} a_e = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} a_p = a_w + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\text{TERMOS-FORES: } b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} T_B \quad (2.47)$$

2.2.5. SISTEMA DE EQUAÇÕES E VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS.

A EQ. (2.31) PODE, TAMBÉM, SER EXPRESSA NA FORMA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_p & & \\ & & -a_w & & \\ & & & -a_e & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix} \quad \text{OU SEJA, } [A][T] = [b]$$

SENDO:

$[A]$: MATRIZ DOS COEFICIENTES, $N \times N$ (QUADRADA), TRIANGULAR

(VALORES NÃO-NULOS APENAS NAS DIAGONAIS CORRESPONDENTES A a_p , a_w E a_e).

$[T]$: VETOR INCÓGNITA

O SISTEMA DE EQUAÇÕES OBTIDO PODE SER SOLUCIONADO DE DIVERSAS MANEIRAS. DENTRE ELAS, PODE-SE CITAR OS MÉTODOS DE GAUSS-SEIDEL, JACOBI, SOR (DENTRE OS MÉTODOS ITERATIVOS), DECOMPOSIÇÃO LU, TDMA (PARA MATRIZES TRIANGONAIS) (DENTRE OS MÉTODOS DIRETOS). TAIS MÉTODOS SÃO COMUMENTE APRESENTADOS EM CURSOS E LIVROS-TEXTOS SOBRE ANÁLISE NUMÉRICA / MÉTODOS NUMÉRICOS / CÁLCULO NUMÉRICO. NO CAP. 3 DA REF. 10 DA BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA (MARCHI, SCHNEIDER, 2004) SÃO APRESENTADOS OS MÉTODOS TDMA E GAUSS-SEIDEL.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE q_0 E q_L , EQS. (2.10) E (2.11):

- NO CONTOURNO ESQUERDO, $x=0$, COM A EQ. (2.36):

$$q_0 = -2A k_0 \frac{(T_1 - T_A)}{\Delta x_1} \quad (2.48)$$

- NO CONTOURNO DIREITO, $x=L$, COM A EQ. (2.42):

$$q_L = -2A k_L \frac{(T_B - T_N)}{\Delta x_N} \quad (2.49)$$

• TEMPERATURA MÉDIA: APROXIMAÇÃO DA EQ. (2.12), POR MEIO DA REGRAS DO RETÂNGULO:

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^N (T_p \Delta x_p) \quad (2.50)$$

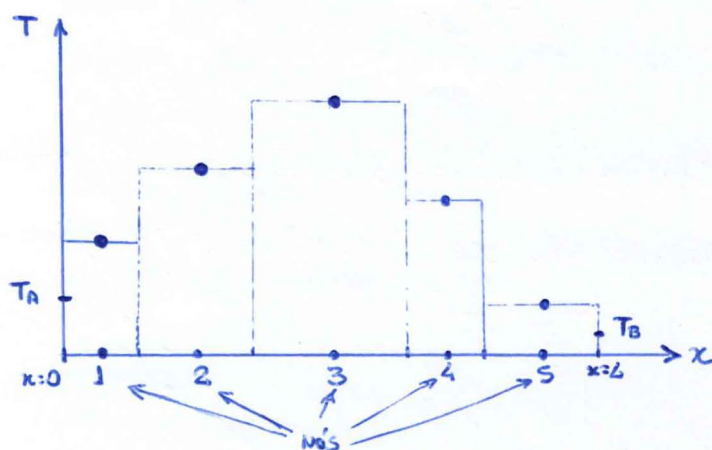


FIG. 2.13: REGRAS DO RETÂNGULO

2.2.6. ALGORITMO:

- 1) LER OS DADOS: T_A , T_B , FUNÇÃO $k(T)$, L , A , N , Δx_p (PARA CADA VOLUME), I (NÚMERO DE ITERAÇÕES), $\dot{q}_p$ (PARA CADA VOLUME)
- 2) OBTER x_p , Δx_0 , Δx_e DE CADA VOLUME DE CONTROLE
- 3) ESTIMAR T_p , USANDO POR EXEMPLO, $T_p = \frac{T_A + T_B}{2}$, $p=1, 2, \dots, N$.

- 4) CALCULAR $K_p(T_p)$, $p = 1, 2, \dots, N$.
- 5) CALCULAR K_w E K_e . (PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLES)
- 6) CALCULAR OS COEFICIENTES (q_w, q_e, q_p) E TERMOS-FONTES ($\dot{h}_p$) DE TODOS OS VOLUMES DE CONTROLES
- 7) COM O MÉTODO TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA OBTER T_p .
- 8) VOLTAR AO ITEM 4 ATÉ ATINGIR I (NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES) OU ATÉ QUE ALGUM OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA SEJA SATISFEITO.
- 9) IMPRIMIR E VISUALIZAR $T_p(x_p)$.
- 10) CALCULAR AS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS: q_o, q_z E $\bar{T}$.

2.2.7. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

CASO 1: CONSIDERANDO-SE K E $\dot{q}$ CONSTANTES. NESTE CASO, A EQ. (2.7) PODE SER ESCRITA COMO:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{K} = 0 \quad (2.51)$$

QUE SE TRATA DE UMA EQUAÇÃO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, AS SEGUINTESS CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$\begin{cases} T(0) = T_A \\ T(L) = T_B \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\quad (2.53)$$

TEM-SE AS SEGUINTESS EXPRESSÕES PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE:

$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)}{L} x + \frac{\dot{q}}{2K} (L - x)x \quad (2.54)$$

(PERFIL QUADRÁTICO)

$$q(x) = \left[K \frac{(T_A - T_B)}{L} + \dot{q} x - \frac{\dot{q} L}{2} \right] A \quad (2.55)$$

$$\bar{T} = \frac{(T_A + T_B)}{2} + \frac{\dot{q} L^2}{12 K} \quad (2.56)$$

CASO 2: BASEADO NAS SEGUINTESS HIPÓTESES / CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$(2.57)$$

$$\dot{q} = 0$$

$$(2.58)$$

$$K(T) = e^T$$

$$T(0) = 0$$

(2.59) (14)

$$T(L) = L = A = 1$$

(2.60)

A EQ. (2.7) PODE SER EXPRESSA COMO

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.61)$$

CUJAS EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

$$T(x) = \ln [1 + (e-1)x] \quad (2.62)$$

$$q = 1 - e \quad (2.63)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{e-1} \quad (2.64)$$

CASO 3: TENDO-SE COMO BASE $\dot{q} = 0$ E k CONSTANTE, TEM-SE QUE A EQ. (2.7) PODE SER ESCRITA COMO

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.65)$$

QUE SE CONSTITUI EM UMA EQUAÇÃO DE LAPLACE. NESTE CASO, AS EXPRESSÕES PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)}{L} x \quad (2.66)$$

(PERFIL LINEAR)

$$q = k \frac{(T_A - T_B)}{L} A \quad (2.67)$$

$$\bar{T} = \frac{T_A + T_B}{2} \quad (2.68)$$

QUE SÃO OBTIDAS AO SEREM CONSIDERADAS AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DADAS PELAS Eqs. (2.8) E (2.9).

2.3. CONDUÇÃO DE CALOR EM PAREDE PLANA E CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN.

ADMITINDO-SE A EQ. (2.7), REESCRITA ABAIXO:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

QUE REGE A CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE EM UMA PAREDE PLANA

E AS SEGUINTESS CONDIÇÕES DE CONTORNO

$$\begin{cases} T(0) = T_A & (\text{C.C. DIRICHLET}) \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\begin{cases} -\left[k A \left(\frac{dT}{dx} \right) \right]_{x=L} = q_L & (\text{C.C. NEUMANN}) \end{cases} \quad (2.70)$$

DESEJA-SE VERIFICAR QUAIS SÃO AS MUDANÇAS A SEREM REALIZADAS COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS APRESENTADOS NAS SEÇÕES 2.2.3 E 2.2.4. OBSERVANDO-SE A EQ. (2.70), NOTA-SE QUE TANTO $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$ QUANTO $T(L) = T_L$ SÃO DESCONHECIDOS.

NOTA-SE, TAMBÉM, QUE A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS JÁ APRESENTADOS DEVERÁ OCORRER PARA O ÚLTIMO NÓ ($P=N$), NO QUAL A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN SERÁ APLICADA.

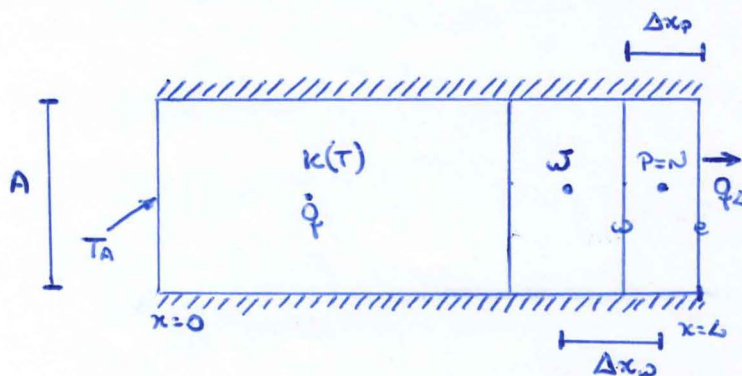


FIG. 2.14: CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

PARTINDO-SE DA EQ. (2.18), REESCREVA A SEGUIR,

$$\left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0$$

APLICADA AO ÚLTIMO NÓ, $P=N$, TEM-SE:

$$-q_L - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.71)$$

UTILIZANDO-SE AS EDS. (2.20) E (2.70) - CONDIÇÃO DE CONTORNO - NA EQ. (2.71), OBTÉM-SE

$$-q_L - k_w A \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.72)$$

OU SEJA,

$$\left(\frac{k_w A}{\Delta x_w} \right) T_p = \left(\frac{k_w A}{\Delta x_w} \right) T_w + (\dot{q}_p \Delta x_p A - q_L) \quad (2.73)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) POSSUI OS SEGUINTE COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\begin{cases} q_e = 0 & (2.74) \\ q_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} & (2.75) \\ q_p = q_w & (2.76) \end{cases}$$

$$h_p = \dot{q}_p \Delta x_p A - q_L \quad (2.77)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, PARA O CONTO RNO CONSIDERADO ($x=L$), SE q ENTRA NO DOMÍNIO, SEU VALOR CONHECIDO (DADO) DEVE SER NEGATIVO.

APÓS OBTER A SOLUÇÃO DE T NOS NÓS $P=1, 2, \dots, N$, T_L PODE SER AVALIADO DA EQ. (2.75) APROXIMADA, OU SEJA,

$$-k_L A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_N/2} = q_L \quad (2.78)$$

OU SEJA,

$$T_L = T_N - \frac{q_L \Delta x_N}{2 k_L A} \quad (2.79)$$

SE $k=k(T)$, DEVE-SE NOTAR QUE A OBTENÇÃO DE T_L É FEITA ITERATIVAMENTE.

2.4. CONDUÇÃO DE CALOR EM PAREDE PLANA E CONDIÇÃO DE CONTO RNO DE ROBIN
ADMITINDO-SE NOVAMENTE A EQ. (2.7):

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

E AS SEGUINTE S CONDIÇÕES DE CONTO RNO:

$$\begin{cases} T(0) = T_A & \text{(C.C. DIRICHLET)} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{cases} q_L = - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h A (T_L - T_\infty) \end{cases} \quad (2.81)$$

CONDUÇÃO CONVECÇÃO

NESTE CASO, SÃO DESCONHECIDOS T_L , $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$ E q_L .

DE MODO SEMELHANTE AO OCORRIDO NA SEÇÃO ANTERIOR, A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA EM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS DAS SEÇÕES 2.2.3 E 2.2.4 SERÁ REALIZADA PARA O ÚLTIMO VOLUME ($P=N$).

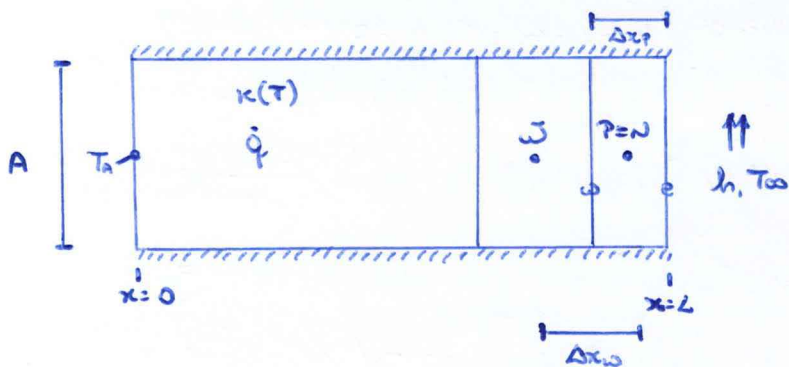


FIG. 2.15: CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE ROBIN.

NESTE CASO, TORNA-SE NECESSÁRIO AVALIAR T_L . PARA TANTO, É DISCRETIZADA A EQ. (2.81), OU SEJA,

$$-k_2 A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_N / 2} = h A (T_L - T_{\infty}) \quad (2.82)$$

ISOLANDO-SE T_L , OBTÉM-SE:

$$T_L = \frac{(2k_2 T_N + h \Delta x_N T_{\infty})}{(2k_2 + h \Delta x_N)} \quad (2.83)$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EDS. (2.20), (2.42) E (2.83) NA EQ. (2.18), OBTÉM-SE

$$\left[\frac{2k_2}{\Delta x_N} \frac{(2k_2 T_N + h \Delta x_N T_{\infty})}{(2k_2 + h \Delta x_N)} - \frac{2k_2}{\Delta x_N} T_N - \frac{k_W}{\Delta x_W} T_N + \frac{k_W}{\Delta x_W} T_W + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.84)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.31) POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$\begin{cases} a_e = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\begin{cases} a_w = \frac{k_W A}{\Delta x_W} \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\begin{cases} a_p = a_w + \frac{2k_2 A h}{2k_2 + h \Delta x_N} \end{cases} \quad (2.87)$$

$$b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_2 A h T_{\infty}}{2k_2 + h \Delta x_N} \quad (2.88)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, SE FOR MANTIDA T_L , EQ. (2.83), NO LUGAR DE T_B DA SEÇÃO 2.2.4,

OS COEFICIENTES E TERMO-FONTE OBTIDOS SÃO EXATAMENTE OS MESMOS DAS EDS. (2.44) A (2.47).

2.5. DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE (18)

2.5.1. MODELO MATEMÁTICO:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} = C \quad (2.89)$$

QUE REGE O ESCOAMENTO LAMINAR, PLENAMENTE DESENVOLVIDO, EM UM DUTO CIRCULAR.

μ : VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO $[Pa.s]$ - CONSTANTE, POR HIPÓTESE

r : RAIO LOCAL $[m]$

u : COMPONENTE DO VETOR VELOCIDADE NA DIREÇÃO x $[m/s]$

p : PRESSÃO $[Pa]$

C : VALOR CONSTANTE $[Pa/m]$

L : COMPRIMENTO DO DUTO $[m]$

R : RAIO DO DUTO $[m]$

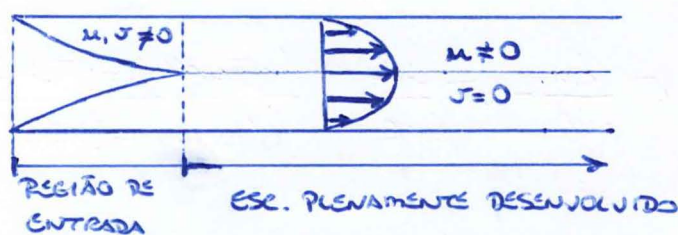


FIG. 2.16: PERFIS DE ESCOAMENTOS.

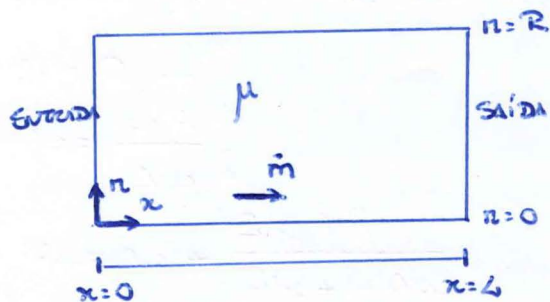


FIG. 2.17: DOMÍNIO PARA A QML.

CONDIÇÕES DE CONTOURNO ADOPTADAS:

- DIRICHLET: $(r=R) \quad u(R) = 0$ (NÃO DESLIZAMENTO) (2.90)

- NEUMANN $(r=0) \quad \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0$ (SIMETRIA) (2.91)

2.5.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE:

- PERFIL DE VELOCIDADES, $u(r)$

- VELOCIDADE MÁXIMA, u_{max} , QUE É O MÁXIMO VALOR DE $u(r)$
- VELOCIDADE MÉDIA,

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_A u(r) dA \quad (2.92)$$

SENDO A A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL AO ESCOAMENTO,

$$A = \pi R^2 \quad (2.93)$$

- FORÇA DO FLUIDO SOBRE O DUTO, AVALIADO COMO

$$F_\mu = A_R \tau_R = -2\pi\mu RL \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=R} \quad (2.94)$$

2.5.3. SOLUÇÃO ANALÍTICA

CONSIDERANDO-SE O MODELO MATEMÁTICO DADO PELA EQ. (2.89) E AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO FORNECIDAS, EQS. (2.90) E (2.91), TEM-SE AS SEGUINTE EXPRESSÕES PARA AVALIAR AS VARIÁVEIS DE INTERESSE APRESENTADAS NA SEÇÃO ANTERIOR:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = -\frac{R^2 C}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.95)$$

$$\bar{u} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) = -\frac{R^2 C}{8\mu} \quad (2.96)$$

$$u_{max} = 2\bar{u} \quad (2.97)$$

$$F_\mu = -\pi R^2 L \left(\frac{dp}{dx} \right) = -\pi R^2 C L \quad (2.98)$$

UMA VEZ QUE

$$\frac{du}{dr} = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(-\frac{2r}{R^2} \right) = \frac{R}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.99)$$

2.5.4. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

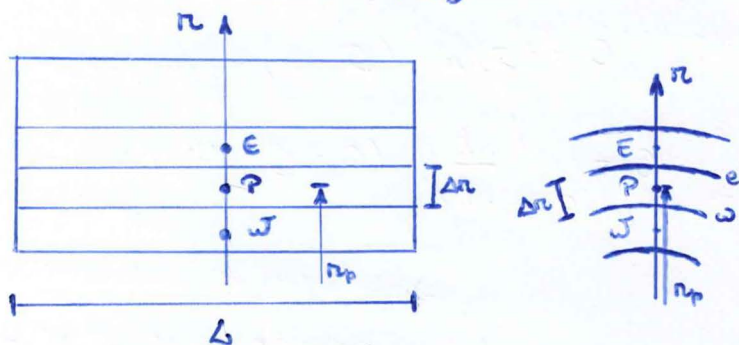


FIG. 2.18: VOLUMES DE CONTROLE
(SISTEMA RADIAL, COORDENADAS CILÍNDRICAS)

DEVE-SE REALIZAR A INTEGRAÇÃO DA EQ. (2.89) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE V MOSTRADO NA FIG. 2.18. ADMITINDO-SE, AINDA, UMA MALHA UNIFORME, OU SEJA, Δn CONSTANTE, TEM-SE:

$$\iiint_{VC} \frac{\mu}{n} \frac{d}{dn} \left(n \frac{du}{dn} \right) dV = \iiint_{VC} C dV \quad (2.100)$$

OU SEJA,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{n_w}^{n_e} \frac{\mu}{n} \frac{d}{dn} \left(n \frac{du}{dn} \right) n dr dx d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{n_w}^{n_e} C n dr dx d\theta \quad (2.101)$$

QUE RESULTA EM:

$$\mu \left[\left(n \frac{du}{dn} \right)_e - \left(n \frac{du}{dn} \right)_w \right] \cdot 2\pi L = C \cdot n_p \Delta n \cdot 2\pi L \quad (2.102)$$

OU SEJA,

$$\mu \left[\left(n \frac{du}{dn} \right)_e - \left(n \frac{du}{dn} \right)_w \right] = C n_p \Delta n \quad (2.103)$$

DEVE-SE, ENTÃO, REALIZAR APROXIMAÇÕES PARA OS TERMOS $\left(n \frac{du}{dn} \right)_e$ E $\left(n \frac{du}{dn} \right)_w$. EMPREGANDO-SE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO DO TIPO CDS:

$$\left(n \frac{du}{dn} \right)_e \approx n_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta n} \quad (2.104)$$

$$\left(n \frac{du}{dn} \right)_w \approx n_w \frac{(u_p - u_w)}{\Delta n} \quad (2.105)$$

E SUBSTITUINDO-SE AS EQS. (2.104) E (2.105) NA EQ. (2.103), TEM-SE:

$$\mu \left[n_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta n} - n_w \frac{(u_p - u_w)}{\Delta n} \right] = C n_p \Delta n \quad (2.106)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$n_e (u_e - u_p) - n_w (u_p - u_w) = \frac{C (\Delta n)^2 n_p}{\mu} \quad (2.107)$$

OU SEJA,

$$(n_e + n_w) u_p = (n_w) u_w + (n_e) u_e - \frac{C (\Delta n)^2 n_p}{\mu} \quad (2.108)$$

QUE NA FORMA

$$a_p u_p = a_w u_w + a_e u_e + I_p \quad (2.109)$$

POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMOS-FONTES

$$\text{COEFICIENTES} \begin{cases} a_w = n_w \\ a_e = n_e \\ a_p = a_w + a_e \end{cases} \quad (2.110)$$

$$(2.111)$$

$$(2.112)$$

$$\text{TERMO-FONTES: } I_p = - \frac{C (\Delta n)^2 n_p}{\mu} \quad (2.113)$$

QUE É VÁLIDA PARA OS VOLUMES INTERNOS, OU SEJA, $P = 2, 3, \dots, N-1$.

- CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

• CONTOURNO EXTERNO: $n=R$, $u(R) = 0$: (NÃO DESLIZAMENTO)

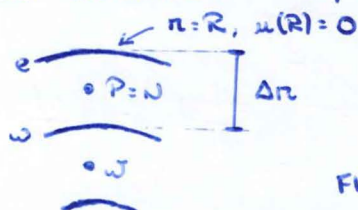


FIG. 2.19: CONDIÇÃO DE CONTOURNO EM $n=R$.

NESTE CASO, COMO NÃO EXISTE VOLUME VIZINHO E, A APROXIMAÇÃO DE $\left(n \frac{du}{dn}\right)_e$ SERÁ FEITA EMPREGANDO-SE UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO DO TIPO UDS:

$$\left(n \frac{du}{dn}\right)_e \approx n_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta n/2} = 2 n_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta n} = 2 \cdot R \frac{(0 - u_p)}{\Delta n} = - \frac{2 R u_p}{\Delta n} \quad (2.114)$$

SUBSTITUINDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.105) E (2.114) NA EQ. (2.103), TEM-SE

$$\mu \left[- \frac{2 R u_p}{\Delta n} - n_w \frac{(u_p - u_w)}{\Delta n} \right] = C n_p \Delta n \quad (2.115)$$

OU SEJA,

$$- 2 R u_p - n_w (u_p - u_w) = \frac{C n_p (\Delta n)^2}{\mu} \quad (2.116)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (2.109) APRESENTA COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTES:

$$a_w = n_w \quad (2.117)$$

$$a_e = 0 \quad (2.118)$$

$$a_p = a_w + 2 R \quad (2.119)$$

$$I_p = - \frac{C n_p (\Delta n)^2}{\mu} \quad (2.120)$$

• CONTOURNO INTERNO: $n=0$, $\frac{du}{dn} = 0$ (SÍMETRIA)

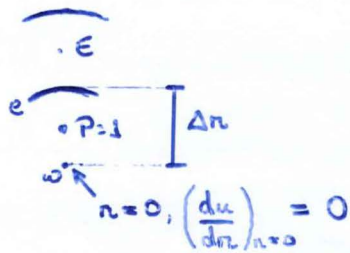


FIG. 2.20: CONDIÇÃO DE CONTOURNO EM $n=0$.

NESTE CASO, NÃO EXISTE VOLUME VIZINHO ω , DE MODO QUE A APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS PARA $\left(n \frac{du}{dn}\right)_0$ É IMPRATICÁVEL. TEM-SE, DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO, PORÉM:

$$\left(n \frac{du}{dn}\right)_0 = n_0 \cdot \left(\frac{du}{dn}\right)_{n=0} = 0 \cdot 0 = 0 \quad (2.121)$$

SUBSTITUINDO-SE, ENTÃO, AS EDS. (2.104) E (2.121) NA EQ. (2.103) TEM-SE

$$\mu \left[n_e \left(\frac{u_e - u_p}{\Delta n} \right) - 0 \right] = C n_p \Delta n \quad (2.122)$$

OU SEJA,

$$n_e (u_e - u_p) = \frac{C n_p (\Delta n)^2}{\mu} \quad (2.123)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.109) POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$a_\omega = 0 \quad (2.124)$$

$$a_e = n_e \quad (2.125)$$

$$a_p = a_e \quad (2.126)$$

$$b_p = - \frac{C n_p (\Delta n)^2}{\mu} \quad (2.127)$$

- VARIÁVEIS DE INTERESSE:

• VELOCIDADE MÉDIA: $\bar{u}$:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{A} \int_A u(n) dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr \approx \frac{1}{\pi R^2} \sum_{p=1}^N \left[u_p \cdot 2\pi n_p \cdot \Delta n \right] = \\ &= \frac{2 \Delta n}{R^2} \sum_{p=1}^N (u_p n_p) \end{aligned} \quad (2.128)$$

(OBTIDA AO SE CONSIDERAR A REGRA DO RETÂNGULO PARA A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA).

• VELOCIDADE MÁXIMA: $u_{\max}$.

A VELOCIDADE MÁXIMA OCORRE EM UM PONTO DO ESCOAMENTO NO QUAL $\frac{du}{dn} = 0$. OBSERVA-SE QUE, NESTE CASO, ESSE PONTO CORRESPONDE AO CONTOURNO $n=0$. PARA A AVALIAÇÃO DE $u_{\max}$, SERÃO EMPREGADOS, ALÉM DO PONTO EM QUE $n=0$, OS NÓS 1 E 2 DO DOMÍNIO. SERÁ ADMITIDO, TAMBÉM, QUE PELOS PONTOS $n=0$, 1 E 2 A VELOCIDADE POSSA SER APROXIMADA POR UMA PARÁBOLA.

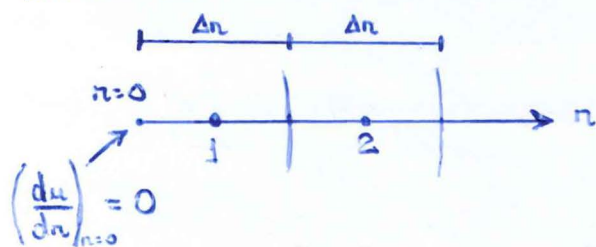


FIG. 2.21: NÓS EMPREGADOS NA APROXIMAÇÃO DE $u_{\max}$.

NESSE CASO, É POSSÍVEL EXPRESSAR $u(n)$ ENTRE $n=0$ E O NÓ $P=2$ COMO

$$u(n) = an^2 + bn + c \quad (2.129)$$

DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO EM $n=0$, SABE-SE QUE $\left(\frac{du}{dn}\right)_{n=0} = 0$ DE MODO QUE

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_{n=0} = (2an + b)\Big|_{n=0} = b = 0 \quad \therefore b = 0 \quad (2.130)$$

ASSIM,

$$u(n) = an^2 + c \quad (2.131)$$

EMPREGANDO-SE A VELOCIDADE OBTIDA EM $P=1$, TEM-SE DA EQ. (2.131):

$$u_1 = a \left(\frac{\Delta n}{2}\right)^2 + c \quad (2.132)$$

DE MODO ANÁLOGO PARA $P=2$, TEM-SE

$$u_2 = a \left(\frac{3\Delta n}{2}\right)^2 + c \quad (2.133)$$

MULTIPLICANDO-SE A EQ. (2.132) POR (-9) E SOMANDO-SE À EQ. (2.133),

OBTÉM-SE:

$$-9u_1 + u_2 = -8c \quad (2.134)$$

OU MELHOR

$$c = \frac{9u_1 - u_2}{8} \quad (2.135)$$

UTILIZANDO-SE A EQ. (2.131) EM $r=0$ (COORDENADA DO MÁXIMO):

(24)

$$u(r=0) = u_{\max} = 0^2 \cdot a + c \quad (2.136)$$

OU SEJA,

$$u_{\max} = c \quad (2.137)$$

DE MODO QUE

$$u_{\max} = \frac{9u_1 - u_2}{8} \quad (2.138)$$

CASO SE PREFIRA APROXIMAR A VELOCIDADE MÁXIMA UTILIZANDO-SE APENAS OS PONTOS

$r=0$ E $r=1$, TEM-SE QUE:

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0 \approx \frac{u_1 - u_{\max}}{\Delta r/2} \quad (2.139)$$

DE ONDE OBTÉM-SE QUE

$$u_{\max} = u_1 \quad (2.140)$$

• FORÇA: F_μ .

PELA DEFINIÇÃO DADA PELA EQ. (2.94) TEM-SE:

$$F_\mu = A_R \cdot \bar{\sigma}_R = -2\pi\mu RL \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=R}$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, UMA APROXIMAÇÃO COM UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO DO TIPO UDS PARA $\left(\frac{du}{dr} \right)_{r=R}$ E RECORDANDO-SE DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO: $u=R$,

$u_R = 0$, TEM-SE:

$$F_\mu = -2\pi\mu RL \cdot \frac{(u_R - u_N)}{\Delta r/2} = -2\pi\mu RL \frac{(0 - u_N)}{\Delta r/2} = \frac{4\pi\mu RL u_N}{\Delta r} \quad (2.141)$$

2.5.5. ALGORITMO:

1) USR OS DADOS: R, C, μ, L, N

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO: $\Delta r = \frac{R}{N}$

3) CALCULAR n_p, n_w E n_e DE CADA VOLUME

4) CALCULAR OS COEFICIENTES (a_w, a_p, a_e) E TERMOS-FONTE (b_p) DE CADA VOLUME

- 5) com o método TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES E OBTER u_p .
- 6) calcular $\bar{u}$, u_{max} e F_μ .
- 7) IMPRIMIR E VISUALIZAR OS RESULTADOS.