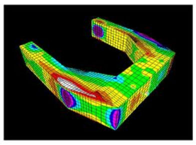
Departamento de Engenharia Mecânica

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Trabalho Prático

Professor responsável: Adriano Scremin - Bloco IV, Sala: 7-21



Prazo

O relatório deve ser entregue impreterivelmente até as 24 h do dia 5 de junho de 2017.

Instruções para o relatório

O relatório deve conter:

1. A forma fraca do problema para um elemento genérico *(e)*.
2. O modelo local de elementos finitos para os elementos linear e quadrático genéricos (para os problemas que envolvem viga, apresente o modelo só para o elemento de viga).
3. Os respectivos modelos globais de elementos finitos (linear e quadrático) para malha de 2 elementos com as condições de contorno impostas.
4. Implemente um código computacional para cada tipo de elemento em qualquer linguagem - anexe a sua listagem ao relatório - para processar a série de dados do seu problema. Comente-o para tornar mais fácil a leitura dele. A partir dos dados da malha, da geometria e das propriedades materiais, o código deve processá-los para obter as matrizes e demais vetores do modelo de elementos finitos, e deve impor as condições de contorno, montar e resolver o sistema de equações algébricas e apresentar os resultados.
5. Compare graficamente a solução de elementos finitos de cada tipo de elemento com a solução exata do problema. Para cada tipo de problema obtenha soluções com malhas de 2, 4, 8, 16 e 32 elementos (em alguns problemas essa sequência deve ser adaptada, mas obedecendo sempre a progressão geométrica de razão 2).
6. Implemente no código computacional a obtenção do erro nas normas L^2 e da energia.
7. Obtenha o erro em ambas as normas para as malhas empregadas no Item 5 e, para cada tipo de elemento, plote num gráfico log $\times$ log as normas do erro na ordenada e o número de graus de liberdade na abcissa.
8. Comente os resultados obtidos no gráfico à luz da teoria de predição de erro do MEF.
9. O relatório deve ser apresentado impresso em folha A4 e não deve exceder 8 páginas, excluída a listagem do código.

Problemas sorteados

Problema 1: A seguinte equação diferencial aparece na modelagem matemática do problema de condução de calor em regime permanente numa barra termicamente isolada:

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{d}{dx}T\right) = q, \quad 0 < x < L$$

$$T(0) = T_0, \qquad \left[k\frac{d}{dx}T + \beta(T - T_\infty) + \hat{q}\right]\Big|_{x=L} = 0$$

onde T é a temperatura, k é a condutividade térmica e q é a geração de calor. Considere que $q = 5000$ W.m^{-3}, $\hat{q} = 0$, $L = 0,1$ m, $k = 0,01$ W. m^{-1}.° C^{-1}, $\beta = 25$ W. m^{-2}.° C^{-1}, $T_0 = 50$ °C e $T_\infty = 5$ °C. Determine a distribuição de temperatura ao longo da barra. A solução exata é:

$$-\frac{q\,x^2}{2k} + \frac{qL(2\,k + \beta\,L) + 2\,\beta\,k(T_\infty - T_0)}{2k\,(k + \beta\,L)}\,x + T_0$$

Problema 2: Considere a condução de calor em regime permanente num fio elétrico de seção circular que dissipa energia por efeito joule. Seja R_0 o raio da seção do fio, K_e a sua condutividade elétrica e I a corrente elétrica por unidade de área que ele conduz. A taxa de geração de calor por unidade de volume é dada por $q_e = I^2/K_e$. Despreze qualquer variação da condutividade térmica e elétrica do fio. As equações governantes do problema são:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{d}{dr}T\right) = q_e, \quad 0 < r < R_0$$

$$\left(kr\frac{d}{dr}T\right)\bigg|_{r=0} = 0, \qquad T(R_0) = T_0$$

Determine a distribuição de temperatura ao longo do raio do fio e o fluxo de calor $Q = -2\pi R_0 L k (dT/dr)|_{R_0}$ utilizando *(i)* o campo de temperatura e *(ii)* as equações de balanço. Para comparação, a distribuição radial exata de temperatura é:

$$T(r) = T_0 + \frac{q_e R_0^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right]$$

Dados para o fio: $R_0 = 5,0$ mm, $k = 391$ W. m^{-1}.$^\circ$ C^{-1}, $K_e = 0,00133\ \Omega^{-1}$. m^{-1} e $I = 26000$ A. m^{-2}. Considere $T_0 = 60$ °C.

Problema 3: Determine a distribuição de temperatura em regime permanente na aleta mostrada na Figura 1. Considere que a largura da aleta é $l = 500$ mm, a temperatura na raiz da aleta $T_0 = 250$ °C, a condutividade térmica $k = 2,4$ W. m^{-1}.$^\circ$ C^{-1}, o coeficiente de convecção térmica $\beta = 26$ W. m^{-2}.$^\circ$ C^{-1} e a temperatura ambiente $T_\infty = 75$ °C. A equação que rege a distribuição de temperatura em regime permanente é:

$$-\frac{d}{dx}\left(kA\frac{d}{dx}T\right) + \beta P\, T = \beta P\, T_\infty, \quad 0 < x < L$$

onde A e P são respectivamente a área e o perímetro da seção transversal. A extremidade esquerda da aleta troca calor com o meio por convecção natural, ou seja, tem-se aí a condição de Robin:

$$\left(-k\frac{d}{dx}T + \beta\,(T - T_\infty)\right)\bigg|_{x=0} = 0$$

A solução analítica do problema é:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\,\frac{\beta\ \mathrm{senh}\,(a\,x) + k\,a\ \cosh(a\,x)}{\beta\ \mathrm{senh}\,(a\,l) + k\,a\ \cosh(a\,l)}$$

onde $a = \sqrt{\dfrac{\beta P}{kA}}$, $l = 75$ mm é a altura da aleta, $b = 6$ mm sua base e $L = 500$ mm sua largura.

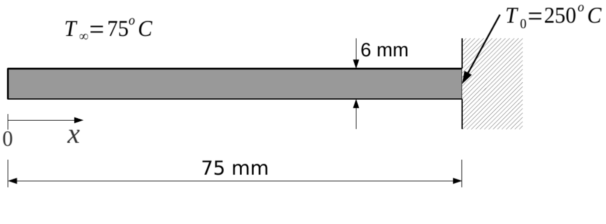


Figura 1: Problema 3.

Problema 4: Considere um elemento de combustível nuclear esférico, consistindo de uma esfera de material físsil envolto por uma casca esférica de alumínio como mostrado na Figura 2. A fissão nuclear é uma fonte de energia térmica que varia não uniformemente do centro para a periferia. Deseja-se determinar a distribuição de temperatura no elemento de combustível nuclear e no revestimento de alumínio.

As equações governantes para as duas regiões são as mesmas, com exceção da ausência de fonte de calor no revestimento aluminizado. As equações são:

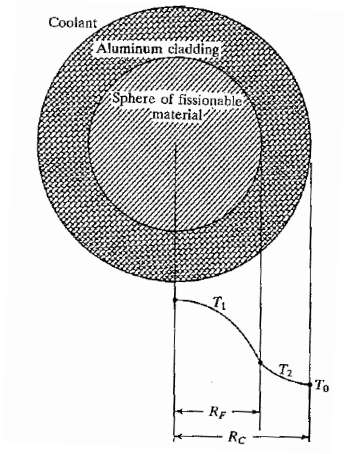


Figura 2: Problema 4.

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 k_1 \frac{d}{dr}T_1\right) = q, \quad 0 < r < R_F$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 k_2 \frac{d}{dr}T_2\right) = 0, \quad R_F < r < R_C$$

onde os subscritos 1 e 2 referem-se ao elemento de combustível nuclear e o revestimento, respectivamente. A geração de calor por unidade de volume na esfera de combustível é da forma:

$$q = q_0\left[1 + c\left(\frac{r}{R_F}\right)^2\right]$$

onde q_0 e c são constantes dependentes do material nuclear. As condições de contorno são:

$$\left.\left(k_1 r^2 \frac{d}{dr}T_1\right)\right|_{r=0} = 0$$

$$T_1|_{r=R_F} = T_2|_{r=R_F}\,, \qquad T_2|_{r=R_C} = T_0$$

A solução exata é:

$$T_1 = T_0 + \frac{q_0 R_F^2}{6k_1}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{R_F}\right)^2\right] + \frac{3}{10}c\left[1-\left(\frac{r}{R_F}\right)^4\right]\right\} + \frac{q_0 R_F^2}{3k_2}\left(1+\frac{3}{5}c\right)\left(1-\frac{R_F}{R_C}\right)$$
$$T_2 = T_0 + \frac{q_0 R_F^2}{3k_2}\left(1+\frac{3}{5}c\right)\left(\frac{R_F}{r}-\frac{R_F}{R_C}\right)$$

Considere que $T_0 = 200\,°\mathrm{C}$, $R_C = 5,0$ mm, $R_F = 3,0$ mm, $k_1 = 2,10$ W$\cdot$m$^{-1}\cdot°$C^{-1}, $k_2 = 250$ W$\cdot$m$^{-1}\cdot°$C^{-1}, $q_0 = 1,91\cdot 10^8$ W$\cdot$m^{-3} e $c = 0,0312$.

Problema 5: Considere o escoamento de fluido viscoso sobre um plano inclinado, como mostrado na Figura 3. A equação do movimento ao longo da coordenada z para o escoamento do fluido em regime permanente laminar é dada por:

$$-\mu\frac{d^2}{dx^2}w = \rho g\cos\beta \quad 0 < x < L$$

onde w é a componente da velocidade na direção z, μ é a viscosidade do fluido, ρ é a sua densidade, g é a aceleração da gravidade e β é o ângulo entre o plano inclinado e a vertical. As condições de contorno associadas ao problema são tensão de cisalhamento nula em $x = 0$ e velocidade nula em $x = L$:

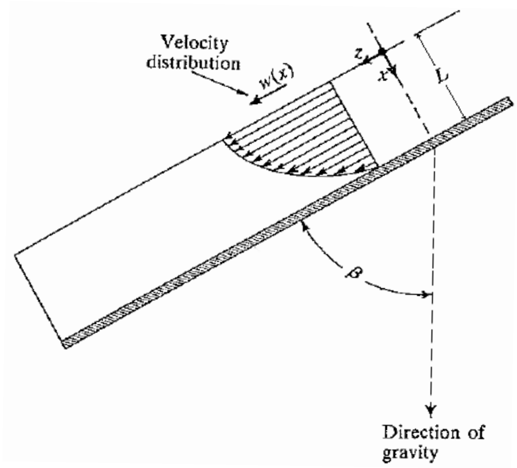


Figura 3: Problema 5.

$$\left(\mu \frac{d}{dx}\, w\right)\bigg|_{x=0} = 0, \qquad w(L) = 0$$

A solução exata do problema é:

$$w = \frac{\rho g L^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Determine a distribuição de velocidade do fluido ao longo da direção z e avalie a tensão de cisalhamento na parede, empregando *(i)* a distribuição de velocidade e *(ii)* as equações de equilíbrio, e compare com o valor exato.

Considere que $L = 10$ mm. $\beta = 15\ °$, $\mu = 1,000 \cdot 10^{-3}$ N$\cdot$ s$\cdot$ m^{-2}, $\rho = 1000$ kg$\cdot$ m^{-3} e $g = 9,81$ m$\cdot$ s^{-2}.

Problema 6: Considere o escoamento em regime permanente de um fluido viscoso ao longo de um tubo cilíndrico suficientemente longo de raio R_0. A equação governante é:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\mu\, r \frac{d}{dr}\, w\right) = f_0, \quad 0 < r < R_0$$

onde w é a velocidade na direção axial, μ é a viscosidade e f_0 é o gradiente de pressão. As condições de contorno são:

$$\left(r\, \mu \frac{d}{dr}\, w\right)\bigg|_{r=0} = 0, \qquad w(R_0) = 0$$

Explore a simetria do problema e determine a distribuição da velocidade na seção transversal do tubo. A solução exata é:

$$w = \frac{f_0 R_0^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right] \tag{6}$$

Considere que $R_0 = 45$ mm, $\mu = 2,510 \cdot 10^{-2}$ N$\cdot$ s$\cdot$ m^{-2} e $f_0 = 8,89 \cdot 10^3$ Pa$\cdot$ m^{-1}.

Problema 7: Considere o escoamento laminar em regime permanente de dois fluidos incompressíveis e imiscíveis entre duas placas paralelas fixas sob a influência de um gradiente de pressão na direção x. O escoamento é ajustado de forma que o fluido I, mais denso e mais viscoso, ocupa a parte inferior e o fluido II, menos denso e menos viscoso, a parte superior, conforme mostra Figura 4. Deseja-se obter as distribuições de velocidade horizontal u_1 e u_2 em cada região.

A equação governante para cada fluido é:

$$-\mu_1 \frac{d^2}{dy^2}\, u_1 = f_0, \quad -b < y < 0$$
$$-\mu_2 \frac{d^2}{dy^2}\, u_2 = f_0, \quad 0 < y < +b$$

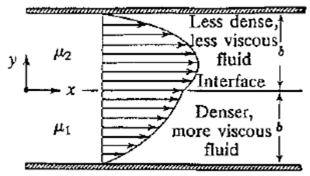


Figura 4: Problema 7.

onde f_0 é o gradiente de pressão na direção x. As condições de contorno são:

$$u_1(-b) = u_2(+b) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0)$$

A solução exata é:

$$u_i = \frac{f_0 b^2}{2\mu_i}\left[\frac{2\mu_i}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \qquad (i=1,2)$$

Considere que $b = 25$ mm, $\mu_1 = 1,000\cdot 10^{-2}$ N$\cdot$ s$\cdot$ m^{-2}, $\mu_2 = 2,510\cdot 10^{-2}$ N$\cdot$ s$\cdot$ m^{-2} e $f_0 = 7,51\cdot 10^3$ Pa$\cdot$ m^{-1}.

Problema 8: A equação governante da deformação axial de uma barra sob a ação da força distribuída f é:

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{d}{dx}\,u\right) = f, \qquad 0 < x < L$$

onde E é o módulo de elasticidade e A é a área da seção transversal. Determine o deslocamento axial ao longo de uma barra de comprimento $L = 0,700$ m, fixa à esquerda e à direita, submetida a uma força uniformemente distribuída $f = 500$ kN $\cdot$ m^{-1}. A área da seção transversal A varia linearmente conforme a expressão $A_0 + A_1\,x$ .Dados $A_0 = A_1 = 4,0\cdot 10^{-3}$ [SI] e $E = 207\cdot 10^{11}$ Pa. A solução exata é:

$$u = \frac{f}{E\,A_1}\left(\frac{\ln(1+\dfrac{A_1}{A_0}\,x)}{\ln(1+\dfrac{A_1}{A_0}\,L)}\,L - x\right)$$

Problema 9: Determine o deslocamento axial ao longo da barra de seção não uniforme e de materiais distintos fixamente apoiada à esquerda e submetida a uma mola de constante elástica k à direita, conforme indicado na Figura 5, quando a força $2P = 900$ kN e uma força linearmente distribuída no primeiro trecho à esquerda $p_0 x$ são aplicadas. Os dados, exceto $p_0 = 3500$ [kN$\cdot$ m^{-2}], encontram-se indicados na Figura 5. A condição de contorno à direita é:

$$EA\,\frac{d}{dx}\,u + ku = 0$$

A solução exata é:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{x}{9\rho k L(7\rho+8)}\left(\dfrac{1}{294}p_0 L^2\left(16(63\rho+64) - 147(7\rho+8)\dfrac{x^2}{L^2}\right) - 2P(21\rho+20)\right), & 0 \le x < \dfrac{4}{7}\,L \\
\dfrac{8}{63\rho k(7\rho+8)}\left(\dfrac{8}{147}p_0 L^2 - P\right)\left(21\rho + 36 - 28\dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{4}{7}\,L \le x < \dfrac{6}{7}\,L \\
\dfrac{8}{3\rho k(7\rho+8)}\left(\dfrac{8}{147}p_0 L^2 - P\right)\left(\rho + 4 - 4\dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{6}{7}\,L \le x < L
\end{array}$$

onde $\rho = \dfrac{E_{\text{aço}}A}{kL}$, A é área da seção transversal no trecho de maior diâmetro e L é o comprimento total.

Problema 10: Considere a viga de aço carregada e apoiada conforme a Figura 6. Determine a deflexão v, a força cortante V e o momento fletor M ao longo da viga. Explore a simetria da viga. O módulo de elasticidade do aço é $E = 207\cdot 10^{11}$ Pa. Os demais dados encontram-se na própria figura. A equação que rege a deflexão de uma viga é:

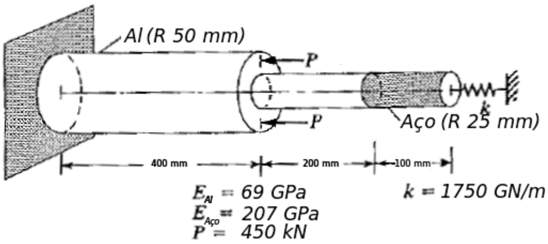


Figura 5: Problema 9.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2}{dx^2}\,v\right) = f, \qquad 0 < x < L$$

A solução exata é:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{f_0 L^3 x}{1000\,EI_1}\left(6 + 27\,\dfrac{I_1}{I_2} - 50\,\dfrac{x^2}{L^2}\right), \quad 0 \leq x < \dfrac{L}{5} \\
\dfrac{f_0 L^4}{15000\,EI_2}\left(11 - 12\,\dfrac{I_2}{I_1} - 475\dfrac{x}{L} - 150\,\dfrac{x^2}{L^2} + 1250\,\dfrac{x^3}{L^3} - 625\,\dfrac{x^4}{L^4}\right), \quad \dfrac{L}{5} \leq x < \dfrac{4}{5}\,L \\
-\dfrac{f_0 L^4}{1000\,EI_1}\left(44 - 27\,\dfrac{I_2}{I_1}\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) - 144\dfrac{x}{L} + 150\,\dfrac{x^2}{L^2} - 50\,\dfrac{x^3}{L^3}\right), \quad \dfrac{4}{5} \leq x < L
\end{array}$$

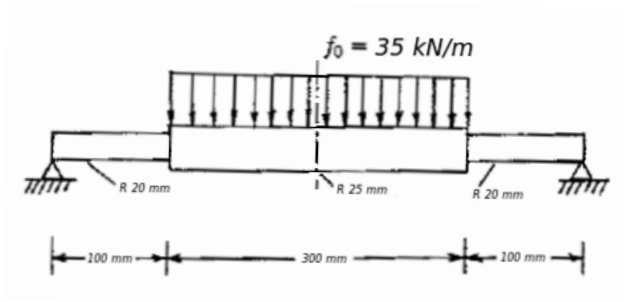


Figura 6: Problema 10.

Problema 11: Determine a distribuição de temperatura em regime permanente na aleta mostrada na Figura 1. Considere que a largura da aleta é $l = 500$ mm, a temperatura na raiz da aleta $T_0 = 250$ °C, a condutividade térmica $k = 2,4\ \mathrm{W.\,m^{-1}.^{\circ}\,C^{-1}}$, o coeficiente de convecção térmica $\beta = 26\ \mathrm{W.\,m^{-2}.^{\circ}\,C^{-1}}$ e a temperatura ambiente $T_\infty = 75$ °C. A equação que rege a distribuição de temperatura em regime permanente é:

$$-\frac{d}{dx}\left(kA\frac{d}{dx}\,T\right) + P\beta T = P\beta T_\infty, \quad 0 < x < L$$

onde A e P são respectivamente a área e o perímetro da seção transversal.

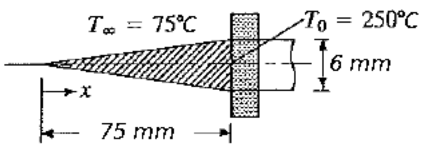


Figura 7: Problema 11.