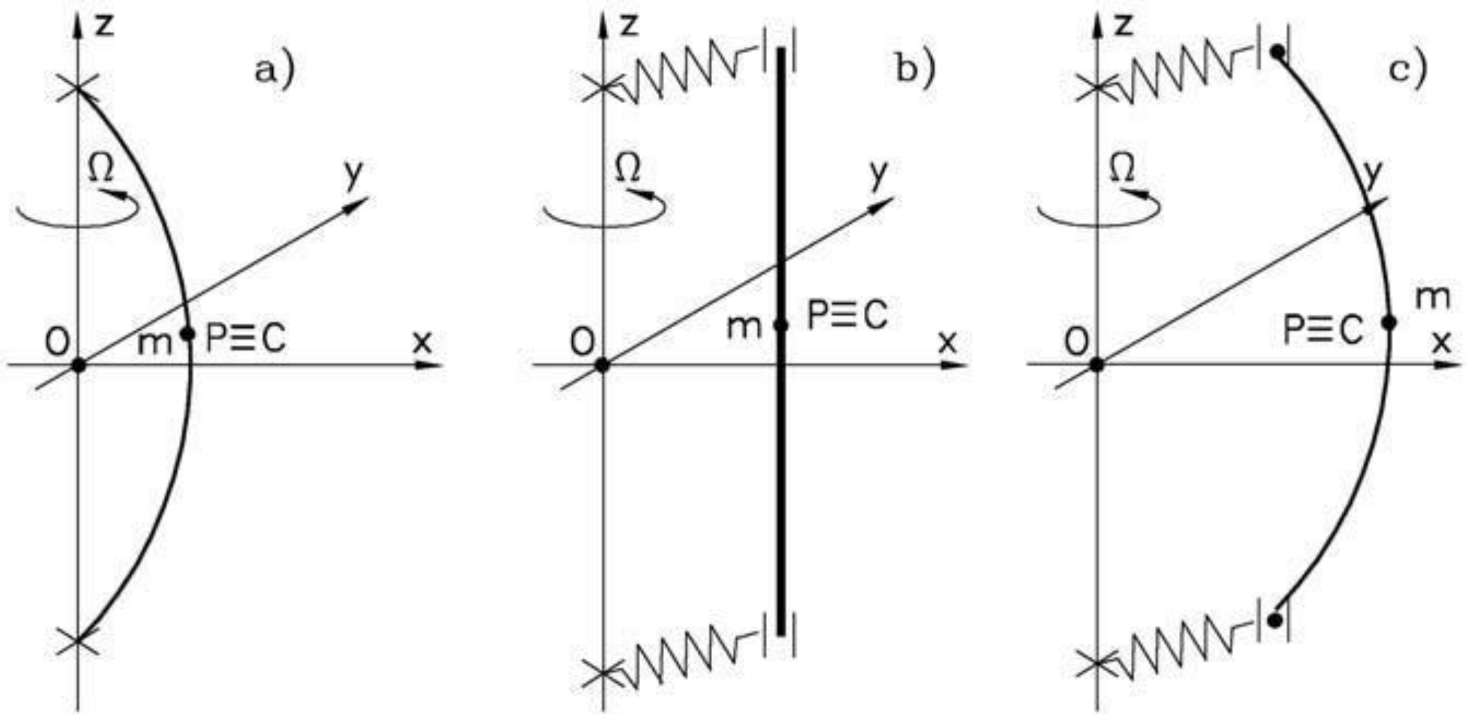
3.1 SISTEMAS GIRANTES –
SLIDES EXTRAS – LIVRO GENTA

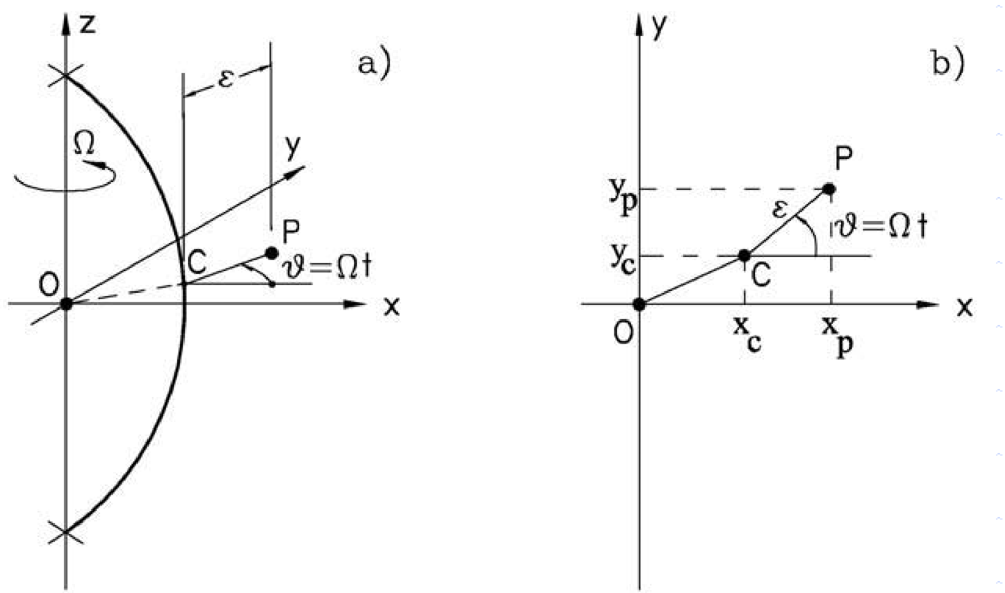
Rotor de Jeffcott – sem amortecimento

Rotor Jeffcott com diferentes modelos de mancais. O centro de massa coincide com a linha neutra do eixo.



◈ Rotor de Jeffcott – Equação de Movimento

Supondo que o centro de massa encontra-se em P, a uma distância ε da linha neutra do eixo, ponto C, é possível definir a posição deste ponto em relação à referência inercial.



$$\overline{P-O} = r_P(t) = \begin{Bmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_C(t) + \varepsilon\cos(\Omega t) \\ y_C(t) + \varepsilon\sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{r}_P(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{y}_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_C(t) - \varepsilon\,\Omega\sin(\Omega t) \\ \dot{y}_C(t) + \varepsilon\,\Omega\cos(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

Rotor de Jeffcott – Equação de Movimento

A energia cinética é:

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \varepsilon^2\Omega^2 + 2\varepsilon\Omega\left[-\dot{x}_C \sin(\Omega t) + \dot{y}_C \cos(\Omega t)\right]\right)$$

e a energia potencial, U

$$U = \frac{1}{2} k\left(x_C^2 + y_C^2\right).$$

Aplicando a Equação de Lagrange, $L = T - U$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

onde q_i são as coordenadas generalizadas (x_C e y_C).

Rotor de Jeffcott – Equação de Movimento

Assumindo que as forças externas atuam em P, as forças generalizadas, Q_i, podem ser facilmente obtidas supondo um deslocamento virtual do ponto C $[\delta x_C \ \delta y_C]^T$

→ O trabalho virtual será:

$$W = F_x \, \delta x_C + F_y \, \delta y_C$$

É então é possível encontrar a equação de movimento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C}\right) = m\,\ddot{x}_C - m\varepsilon\,\Omega^2 \cos(\Omega t) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_C} = k\ x_C$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_C}\right) = m\,\ddot{y}_C - m\varepsilon\,\Omega^2 \sin(\Omega t) \qquad \frac{\partial L}{\partial y_C} = k\ y_C$$

Rotor de Jeffcott – Equação de Movimento

Assim:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_C(t)+k\,x_C(t)=m\varepsilon\,\Omega^2\cos(\Omega t)+F_x \\ m\,\ddot{y}_C(t)+k\,y_C(t)=m\varepsilon\,\Omega^2\sin(\Omega t)+F_y \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\{\ddot{q}_C(t)\}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\{q_C(t)\}=\begin{Bmatrix} m\varepsilon\,\Omega^2\cos(\Omega t)+F_x \\ \boxed{m\varepsilon\,\Omega^2\sin(\Omega t)}+F_y \end{Bmatrix}$$

$$f_x=A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)=F(\Omega)e^{i\Omega t}+F^*(\Omega)e^{-i\Omega t}$$

$$\boxed{F(\Omega)=\frac{A-iB}{2}}$$

$$F(\Omega)_x=\frac{m\varepsilon\,\Omega^2}{2}$$

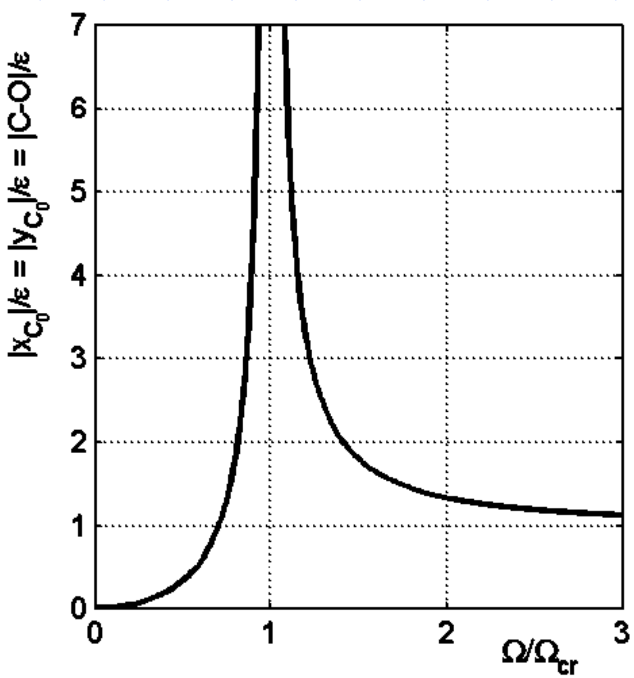
$$F(\Omega)_y=-i\frac{m\varepsilon\,\Omega^2}{2}$$

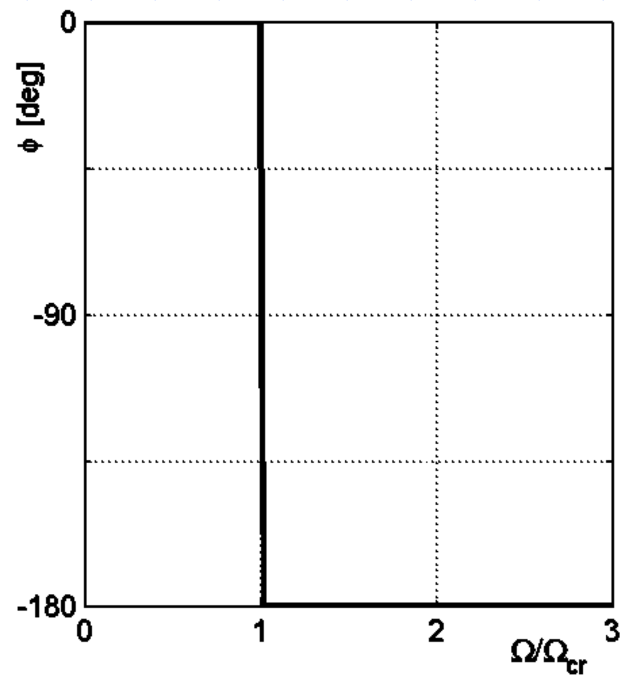
Rotor de Jeffcott – Excitação de desbalanceamento

Se $F_x = F_y = 0$ no domínio da frequência, temos:

$$\left[-\Omega^2 M + K\right] Q(\Omega) = \begin{Bmatrix} \dfrac{m\varepsilon\,\Omega^2}{2} \\ -i\,\dfrac{m\varepsilon\,\Omega^2}{2} \end{Bmatrix}$$

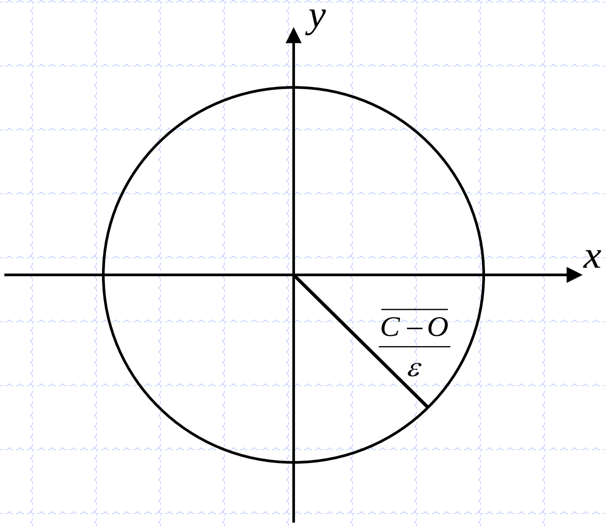
$$\left|X_{C_0}(\Omega)\right| = \left|Y_{C_0}(\Omega)\right| = \frac{m\varepsilon\,\Omega^2}{k - m\Omega^2}$$





Rotor de Jeffcott – Excitação de desbalanceamento

No tempo, o bamboleio é dado por uma circunferência



A amplitude é

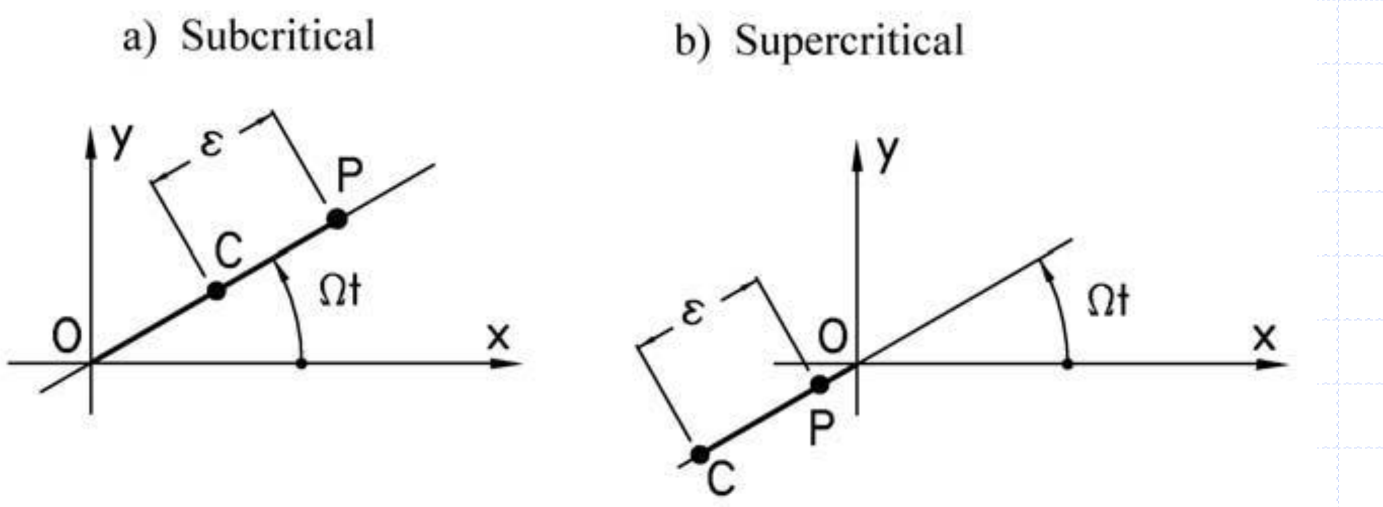
$$\frac{\overline{C-O}}{\varepsilon} = \sqrt{\left(x_{C_0} \cos\Omega t\right)^2 + \left(y_{C_0} \sin\Omega t\right)^2}$$

$$= \frac{x_{C_0}}{\varepsilon} = \frac{y_{C_0}}{\varepsilon} = \frac{\Omega^2/\Omega_{cr}^2}{1-\Omega^2/\Omega_{cr}^2}$$

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rotor de Jeffcott – Excitação de desbalanceamento

- Se $\Omega < \Omega_{cr}$ a amplitude do bamboleio cresce a medida que Ω aumenta;
- O ponto máximo de x_{C0} e y_{C0} ocorre quando $\Omega = \Omega_{cr}$ → tende para infinito;
- Se $\Omega > \Omega_{cr}$ a amplitude tende a zero → ponto mínimo de x_{C0} e y_{C0} .



Rotor de Jeffcott – Coordenadas Complexas

Representando a posição do ponto c em variáveis complexas

$$r_C(t) = x_C(t) + i y_C(t)$$

A equação de movimento pode ser escrita da seguinte forma

$$m\ddot{r}_C(t) + k\, r_C(t) = m\varepsilon\,\Omega^2 e^{i\Omega t} + F_r(t)$$

Onde

$$F_r(t) = F_x(t) + iF_y(t)$$

Rotor de Jeffcott – Vibração Livre

Definindo

$$r_C(t) = r_{C_0} e^{st}$$

e substituindo na equação de movimento

$$\left(ms^2 + k\right) r_{C_0} = 0$$

obtem-se:

$$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\Omega_n$$

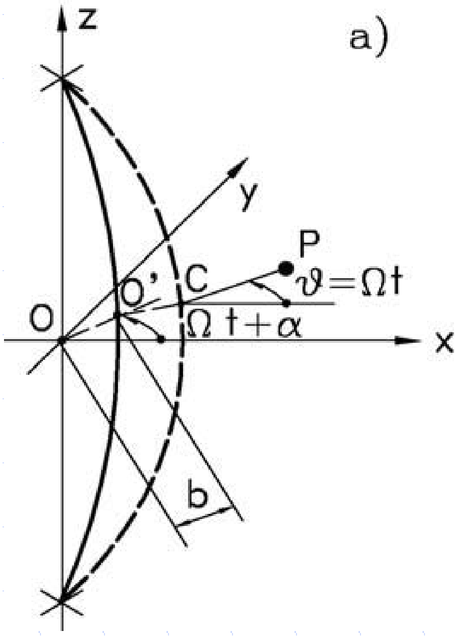
Consequentemente

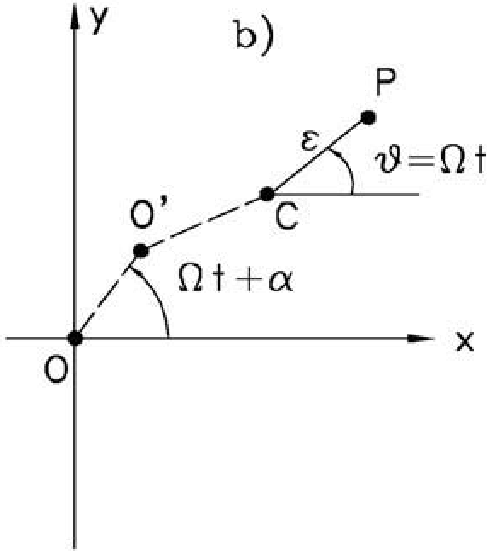
$$r_C(t) = R_1 e^{i\Omega t} + R_2 e^{-i\Omega t}$$

com R_1 e R_2 não necessariamente conjugados complexos.

◆ Rotor de Jeffcott com Empeno

Considerando um eixo que está inicialmente com empeno, ponto O’, a posição OO’ é dada por





$$\overline{O'-O}=\begin{Bmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b\cos(\Omega t+\alpha) \\ b\sin(\Omega t+\alpha) \end{Bmatrix}$$

onde b é o empeno do eixo.

Rotor de Jeffcott com Empeno

A energia potencial será:

$$U = \frac{1}{2}k\left(\overline{C - O'}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(x_C - b\cos(\Omega t + \alpha)\right)^2 + \left(y_C - b\sin(\Omega t + \alpha)\right)^2\right]$$

ou

$$U = \frac{1}{2}k\left[x_C^2 + y_C^2 + b^2 - 2bx_C\cos(\Omega t + \alpha) - 2y_C b\sin(\Omega t + \alpha)\right]$$

Aplicando a Equação de Lagrange

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_C(t) + k\,x_C(t) = kb\cos(\Omega t + \alpha) + m\varepsilon\,\Omega^2\cos(\Omega t) + F_x \\ m\,\ddot{y}_C(t) + k\,y_C(t) = kb\sin(\Omega t + \alpha) + m\varepsilon\,\Omega^2\sin(\Omega t) + F_y \end{cases}$$

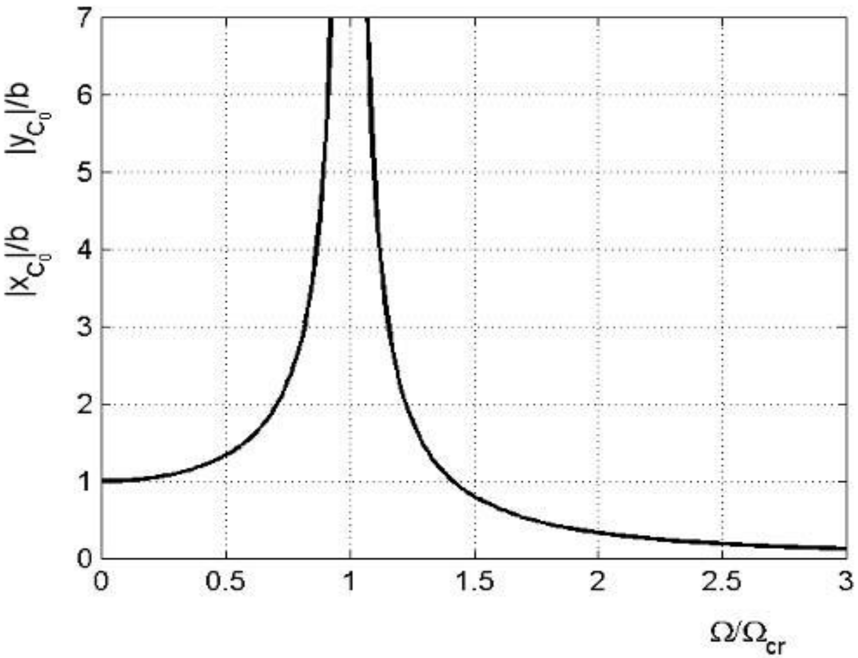
e, na forma complexa

$$m\ddot{r}_C + k\,r_C = kb\,e^{i\alpha}e^{i\Omega t} + m\varepsilon\,\Omega^2 e^{i\Omega t} + F_r(t)$$

Rotor de Jeffcott com Empeno

Considerando apenas o empeno, a resposta será

$$r_C = b\frac{\Omega_{cr}^2}{\Omega_{cr}^2 - \Omega^2} e^{i\alpha} e^{i\Omega t}$$



Note que:

- Considerando apenas o empeno, quando $\Omega \rightarrow \infty$ a resposta tende a zero;
- Quando $\Omega << \Omega_{cr}$ o empeno tem predominância em relação ao desbalanceamento. Depois o efeito é nulo quando $\Omega << \Omega_{cr}$.

Rotor de Jeffcott com Amortecimento

Amortecimento não rotacional – $\boldsymbol{c_{nr}}$ *(mancais ou similares)*

- Possui um efeito de estabilização em toda faixa de trabalho

Amortecimento rotacional – $\boldsymbol{c_r}$ *(amortecimento interno ou associado ao rotor)*

- Reduz a amplitude de vibração quando $\Omega < \Omega_{cr}$ mas trabalhando com $\Omega > \Omega_{cr}$ mostra um viés de instabilidade;

- Equação de movimento:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{nr} + c_r & 0 \\ 0 & c_{nr} + c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & c_r \\ -c_r & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} m\varepsilon\,\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\varepsilon\,\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

Rotor de Jeffcott com Amortecimento – Vibração Livre

- Em notação complexa

$$m\ddot{r}_C + (c_r + c_{nr})\dot{r}_C + (k - ic_r\Omega)r_C = m\varepsilon\,\Omega^2 e^{i\Omega t} + F_r(t)$$

$$r_C = r_{C_0} e^{st}$$

- A equação característica se torna:

$$ms^2 + (c_{nr} + c_r)s + k - i\Omega c_r = 0$$

- A solução é dada por: $s = \sigma + iw$

$$s_{1,2} = -\frac{c_{nr} + c_r}{2m} \pm \sqrt{\frac{(c_r + c_{nr})^2 - 4m(k - i\Omega c_r)}{4m^2}}$$

Rotor de Jeffcott com Amortecimento – Vibração Livre

- As soluções são:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{c_{nr} + c_r}{2m} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega c_r}{m}\right)^2} - \Gamma}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\Omega c_r}{m}\right)^2} - \Gamma}$$

- Onde:

$$\Gamma = \frac{k}{m} - \frac{(c_r + c_{nr})^2}{4m^2}$$

Rotor de Jeffcott com Amortecimento – Vibração Livre

- O sinal de σ pode ser positivo ou negativo, levando à um sistema estável ou instável, respectivamente:

$$\Omega < \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1+\frac{c_{nr}}{c_r}\right) \longrightarrow \textbf{Estável}$$

- Velocidade subcrítica: em geral estável;
- Velocidade supercrítica: dependendo de c_r o sistema pode se tornar instável;
- Se

$$c_{nr} = 0 \;\Rightarrow\; \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow \textbf{Instável}$$

- $\boldsymbol{c_{nr}}$ restringe a instabilidade provocada por $\boldsymbol{c_r}$.

Rotor de Jeffcott com Amortecimento – Vibração Livre

- As equações das soluções podem ser reescritas na forma não dimensional:

$$\begin{cases} \sigma^* = -(\zeta_r + \zeta_{nr}) \pm \sqrt{\sqrt{\Gamma^{*2} + \Omega^{*2}\,\zeta_r^2} - \Gamma^*} \\ \omega^* = \pm \operatorname{sgn}(\Omega^*)\sqrt{\sqrt{\Gamma^{*2} + \Omega^{*2}\,\zeta_r^2} - \Gamma^*} \end{cases}$$

- Onde:

$$\omega^* = \omega / \sqrt{k/\mathrm{m}} \qquad \sigma^* = \sigma / \sqrt{k/\mathrm{m}}$$

$$\Omega^* = \Omega / \sqrt{k/\mathrm{m}} \qquad \Gamma^* = \left[1 - (\zeta_{nr} + \zeta_r)^2\right]/2$$

$$\zeta_r = cr / 2\sqrt{km} \qquad \zeta_{nr} = c_n / 2\sqrt{km}$$

◈ Rotor de Jeffcott com Amortecimento – Diagrama de Campbell

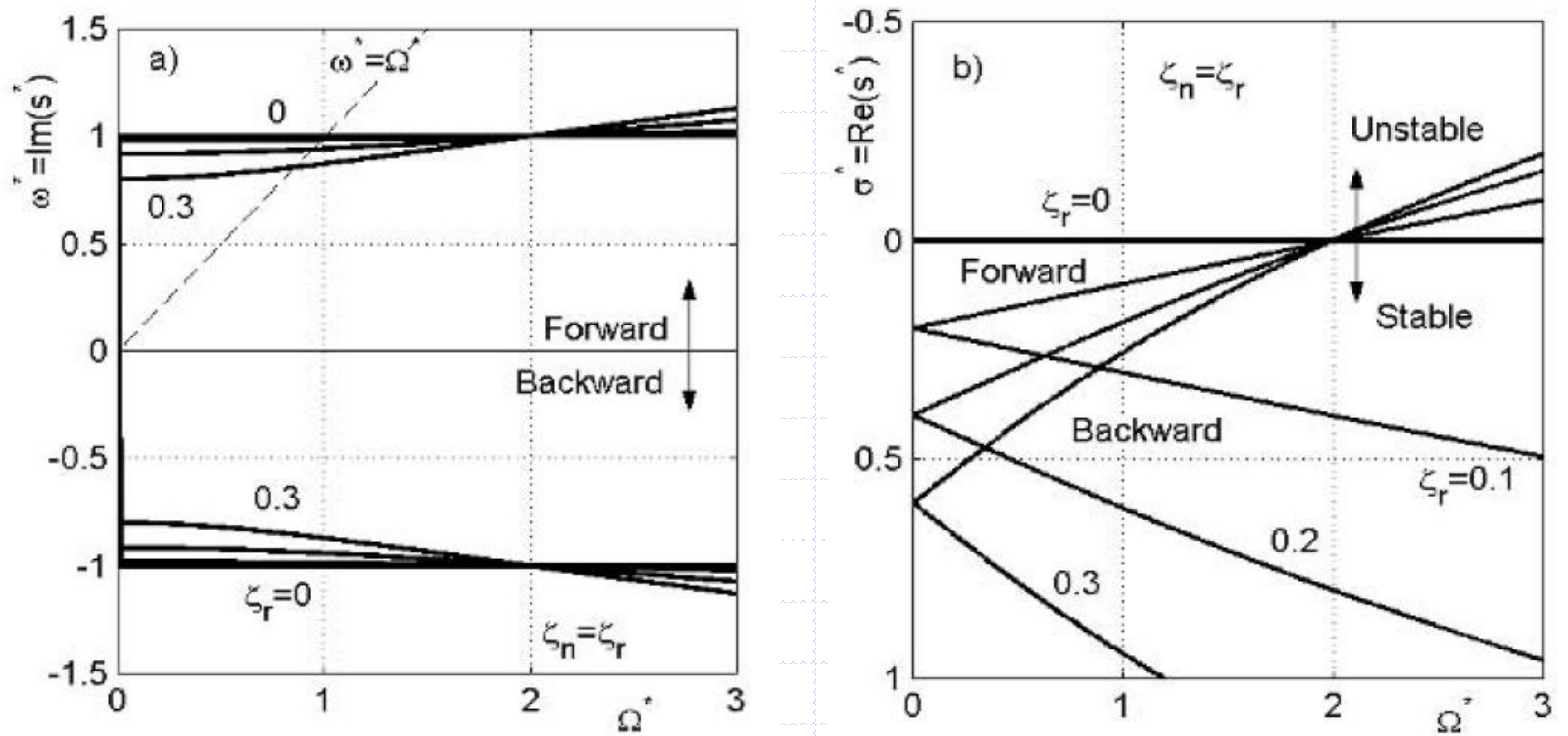


Diagrama de Campbell

Rotor de Jeffcott com amortecimento – Desbalanceamento

- Para levar em conta o desbalanceamento devemos recorrer à seguinte equação:

$$m\ddot{r}_C + \left(c_r + c_{nr}\right)\dot{r}_C + \left(k - ic_r\Omega\right)r_C = m\varepsilon\,\Omega^2 e^{i\Omega t} + F_r\left(t\right)$$

- Em coordenadas complexas, a resposta ao desbalanceamento é:

$$r_C = r_{C_0} e^{i\Omega t}$$

- Com isso:

$$r_{C_0}(-m\Omega^2 + i\Omega c_{nr} + k) = m\varepsilon\Omega^2$$

Rotor de Jeffcott com amortecimento – Desbalanceamento

- A amplitude r_{C_0} é complexa e pode ser separada em sua parte real e imaginária:

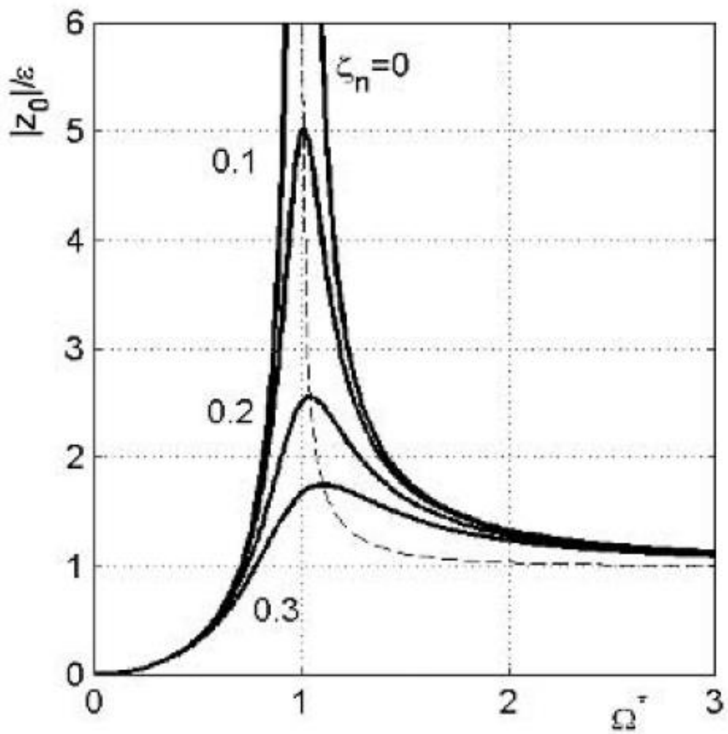
$$\mathrm{Re}(r_{C_0}) = \frac{m\varepsilon\Omega^2(k - m\Omega^2)}{(k - m\Omega^2)^2 + \Omega^2 c_{nr}^{\ 2}} = \varepsilon\frac{\Omega^{*2}(1 - \Omega^{*2})}{(1 - \Omega^{*2})^2 + 4\zeta_{nr}^2\Omega^{*2}}$$

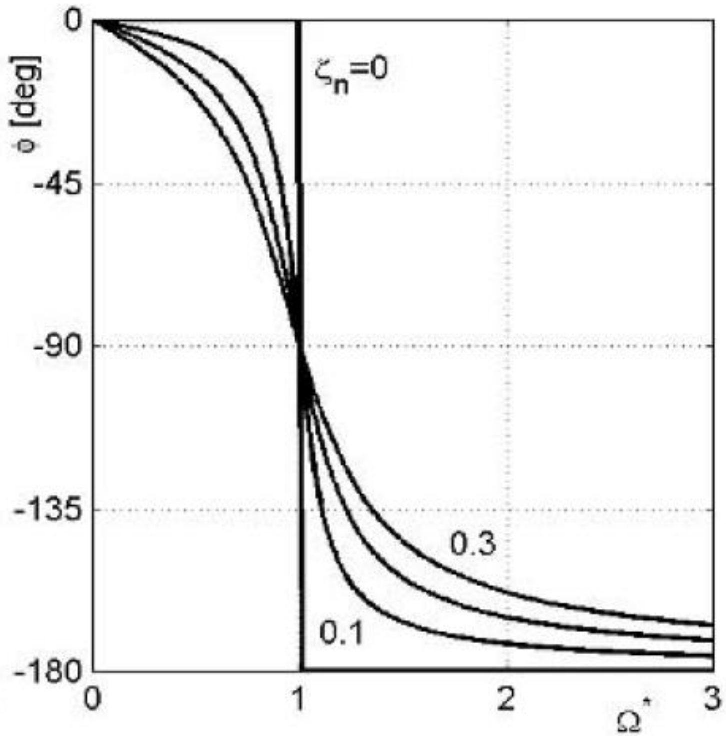
$$\mathrm{Im}(r_{C_0}) = -\frac{m\varepsilon\Omega^3 c_{nr}}{(k - m\Omega^2)^2 + \Omega^2 c_{nr}^{\ 2}} = -\varepsilon\frac{2\Omega^{*3}\zeta_{nr}}{(1 - \Omega^{*2})^2 + 4\zeta_{nr}^2\Omega^{*2}}$$

$$\left|r_{C_0}\right| = \varepsilon\frac{\Omega^{*2}}{\sqrt{(1 - \Omega^{*2})^2 + 4\zeta_{nr}^2\Omega^{*2}}}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{-2\Omega^{*}\zeta_{nr}}{1 - \Omega^{*2}}\right)$$

◆ Rotor de Jeffcott com amortecimento – Desbalanceamento



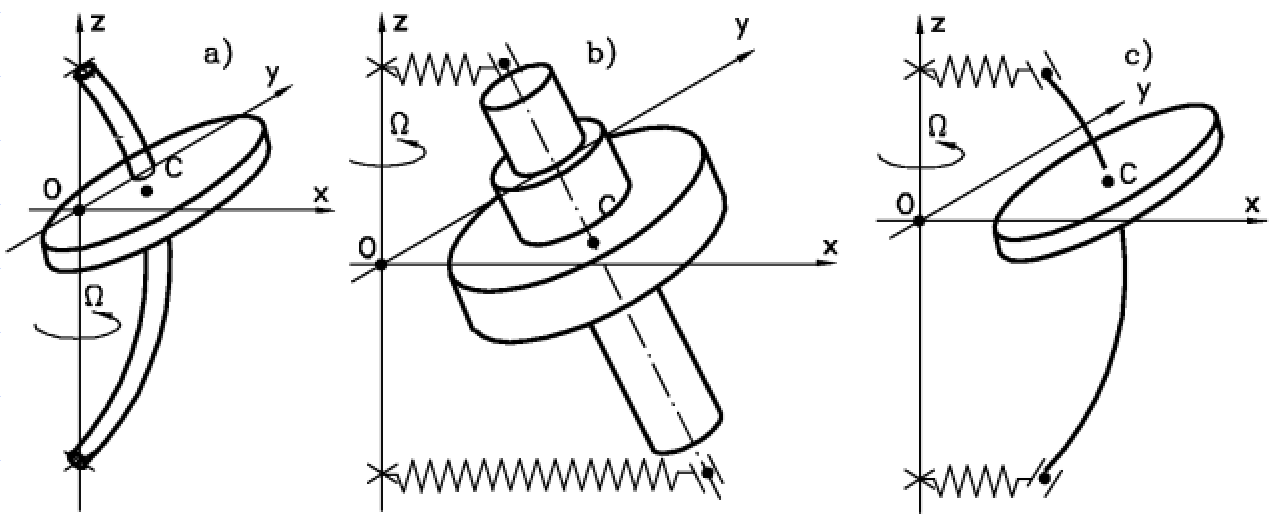


Resposta ao desbalanceamento de um Rotor de Jeffcott com amortecimento: amplitude adimensional (|*rco/ε*|) e fase (ϕ) versus rotação adimensional (*Ω/Ωn*)

DINÂMICA DE ROTORES
MODELO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE

Modelo de Quatro Graus de Liberdade (4GL)

- Rotor de Jeffcott;
- Inclusão do Efeito Girsocópico;
- Inclusão da Inércia translacional (J_t) e polar (J_p) no modelo.



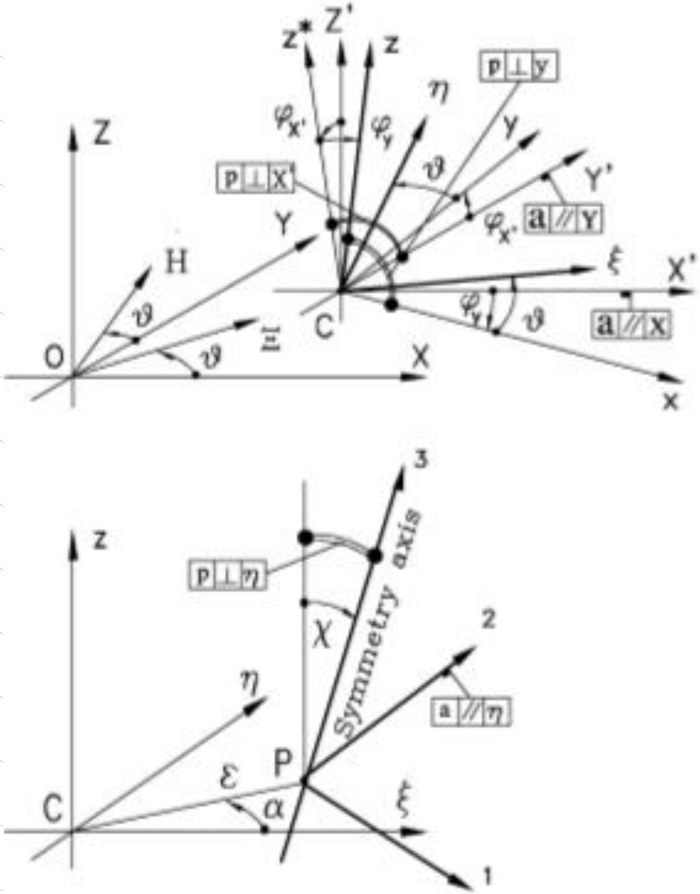
Modelo de 4GL: Coordenadas Generalizadas

Coordenadas generalizadas

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_{X'} & \sin\phi_{X'} \\ 0 & -\sin\phi_{X'} & \cos\phi_{X'} \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & -\sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{bmatrix}$$

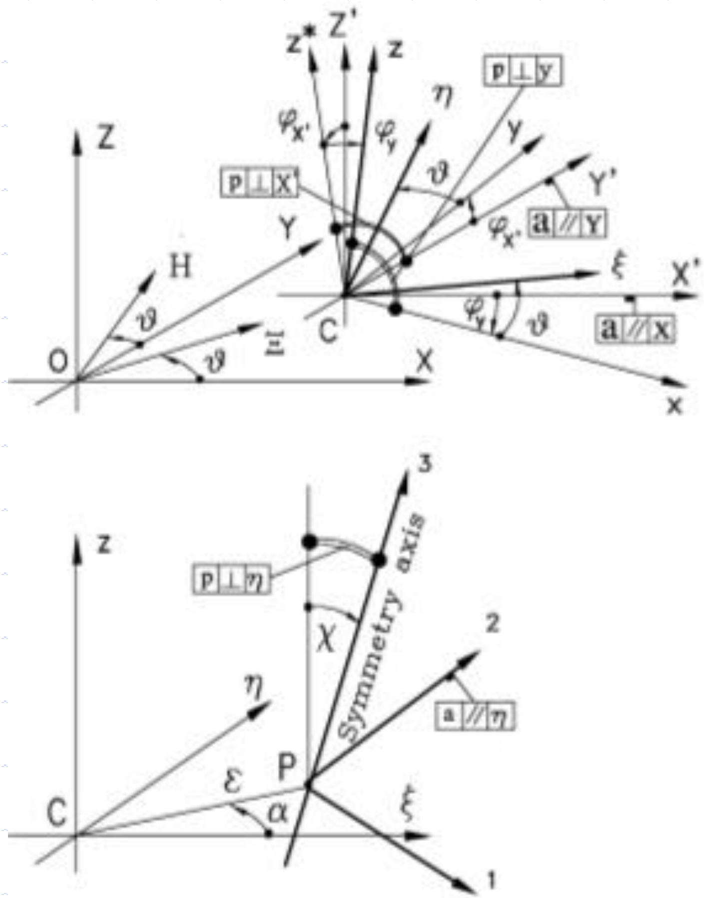
$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



onde $\theta = \Omega t$

Modelo de 4GL: Coordenadas Generalizadas

Considera-se que os eixos principais, dados por P123, estão representados por J_p. Assume-se que J_p está no plano ξz. O desbalanceamento estático está dado pela distância PC (com módulo ε e defasagem α). Para considerar um desbalanceamento dinâmico, considera-se que o J_p de desloca angularmente χ de η. Assim, a quarta matriz R_4 que permite a transformação do sistema Cξηz para os eixos principais de inercia, P123, é dada por



$$R_4 = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{bmatrix}$$

Modelo de 4GL: Coordenadas Generalizadas

A velocidade do centro de gravidade P e a velocidade angular expressada a partir do sistema principal de inercia devem ser calculadas para achar a energia cinética do corpo rígido.

Para tal, a posição do ponto P é dada por:

$$\overline{PO} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + R_1^T R_2^T R_3^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\overline{PO} = \begin{Bmatrix} X + \varepsilon \cos(\theta + \alpha) \\ Y + \varepsilon \sin(\theta + \alpha) \\ Z + \varepsilon \left[\phi_{X'} \sin(\theta + \alpha) - \phi_y \cos(\theta + \alpha) \right] \end{Bmatrix}$$

Modelo de 4GL: Energia Cinética

- A energia cinética do sistema é dada por:

$$T = T_t + T_r = \left(\frac{1}{2} m V_P^2\right) + \left(\frac{1}{2} \Omega_{123}^{'T} \; J \; \Omega_{123}^{'}\right)$$

- Onde:
  - V_P é o vetor de velocidade no centro de massa do rotor;
  - Ω'_{123} é o vetor de velocidade angular;
  - J é a matriz de inércia, dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}$$

Modelo de 4GL: Energia Cinética

Como a velocidade de PO é dada por

$$V_P = \begin{Bmatrix} \dot{X} - \varepsilon\Omega\sin\left(\theta+\alpha\right) \\ \dot{Y} + \varepsilon\Omega\cos\left(\theta+\alpha\right) \\ \dot{Z} + \varepsilon\left[\left(\Omega\phi_{X'} - \dot{\phi}_y\right)\cos\left(\theta+\alpha\right) + \left(\Omega\phi_y - \dot{\phi}_{X'}\right)\sin\left(\theta+\alpha\right)\right] \end{Bmatrix}$$

Assim, a energia cinética de translação é dada por:

$$T_t = \frac{1}{2}m\left\{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + \varepsilon^2\Omega^2 + 2\varepsilon\Omega\left[-\dot{X}\sin\left(\Omega t+\alpha\right) + \dot{Y}\cos\left(\Omega t+\alpha\right)\right]\right\}$$

Modelo de 4GL: Energia Cinética

Para calcular a energia cinética associada com a velocidade angular, primeiro devemos escrever o vetor velocidade angular:

$$\Omega'_{123} = R_4 \left[R_3 \left(R_2 \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{X'Y'Z'} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_y \\ 0 \end{Bmatrix}_{xyz'} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{\xi\eta z} \right]$$

ou

$$\Omega'_{123} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{X'} \cos\theta + \dot{\phi}_y \sin\theta - \chi\Omega \\ -\dot{\phi}_{X'} \sin\theta + \dot{\phi}_y \cos\theta \\ \dot{\phi}_{X'} \left[\chi\cos\theta + \phi_y \right] + \phi_y \chi \sin\theta + \Omega \end{Bmatrix}$$

Modelo de 4GL: Energia Cinética

Assim, a energia cinética associada com a velocidade angular será

$$T_r = \frac{1}{2}\left\{ J_t\left(\dot{\phi}_{X'}^2 + \dot{\phi}_y^2 + \chi^2\,\Omega^2\right) + J_P\left(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\phi}_{X'}\phi_y\right) + 2\Omega\chi\left(J_P - J_t\right)\left[\dot{\phi}_{X'}\cos\theta + \dot{\phi}_y\sin\theta\right]\right\}$$

Modelo de 4GL: Energia Potencial

- A energia potencial do sistema é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} X \\ \phi_y \end{Bmatrix}^T K_{xz} \begin{Bmatrix} X \\ \phi_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} Y \\ \phi_{X'} \end{Bmatrix}^T K_{yz} \begin{Bmatrix} Y \\ \phi_{X'} \end{Bmatrix}$$

- Onde:
  - K_{xz} e K_{yz} são obtidos por análise de tensões ou por MEF e são representados por

$$K_{xz} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \qquad K_{yz} = \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} \\ -K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$$

  - ϕ representa o deslocamento angular
  - X e Y representam os deslocamentos nas respectivas direções;

Modelo de 4GL: Equação de Movimento

- Aplicando a Equação de Lagrange nas Energias Potencial e Cinética, chega-se as seguintes equações para um rotor de 4GL não amortecido:

$$m\ddot{X} + K_{11}X + K_{12}\phi_y = m\varepsilon\Omega^2\cos(\Omega t)$$

$$m\ddot{Y} + K_{11}Y + K_{12}\phi_{X'} = m\varepsilon\Omega^2\sin(\Omega t)$$

$$J_t\ddot{\phi}_{X'} + J_p\Omega\dot{\phi}_y - K_{12}Y + K_{22}\phi_{X'} = -\chi\Omega^2(J_t - J_p)\sin(\Omega t)$$

$$J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{X'} + K_{12}X + K_{22}\phi_y = \chi\Omega^2(J_t - J_p)\cos(\Omega t)$$

- Onde χ é o erro angular entre os eixos de corpo rígido e de rotação, e ε é a excentricidade entre os centro geométrico e de massa;

Modelo de 4GL: Equação de Movimento

Simplificadamente:

$$[M]\{\ddot{q}\}+\left[G(\Omega)\right]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}$$

Adicionando amortecimento via função de Rayleigh, tem-se:

$$[M]\{\ddot{q}\}+\left[C+G(\Omega)\right]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}$$

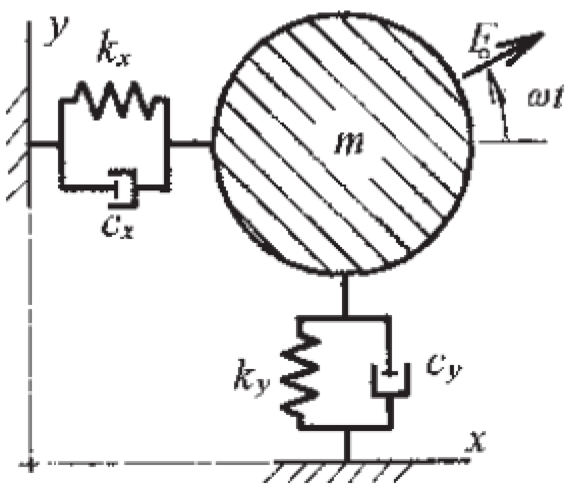
não é considerado o amortecimento rotacional.

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\phi}_{X'} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix}+\Omega\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\phi}_{X'} \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi}_y \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} & -K_{12} \\ 0 & 0 & -K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \phi_{X'} \\ Y \\ \phi_y \end{Bmatrix}=\Omega^2\begin{Bmatrix} m\varepsilon\cos(\Omega t+\alpha) \\ \chi\left(J_t-J_p\right)\cos(\Omega t) \\ m\varepsilon\sin(\Omega t+\alpha) \\ -\chi\left(J_t-J_p\right)\sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

3.1 SISTEMAS GIRANTES –
SLIDES EXTRAS – LIVRO ADAMS

Modelo Linear Simples



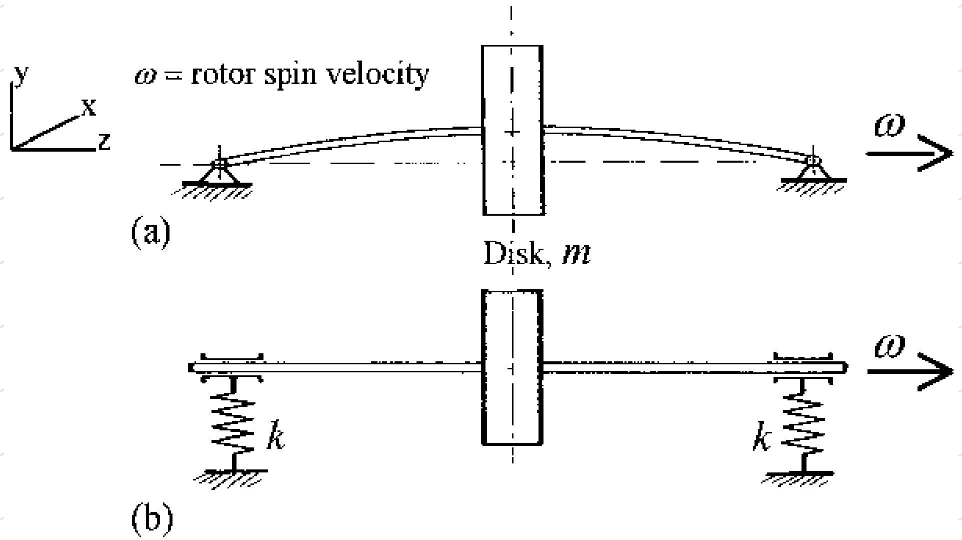
$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = F_0\sin(\omega t) \end{cases}$$

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

- Em geral c_{xy} / c_{yx} são ≠ 0, assim como k_{xy} / k_{yx} .

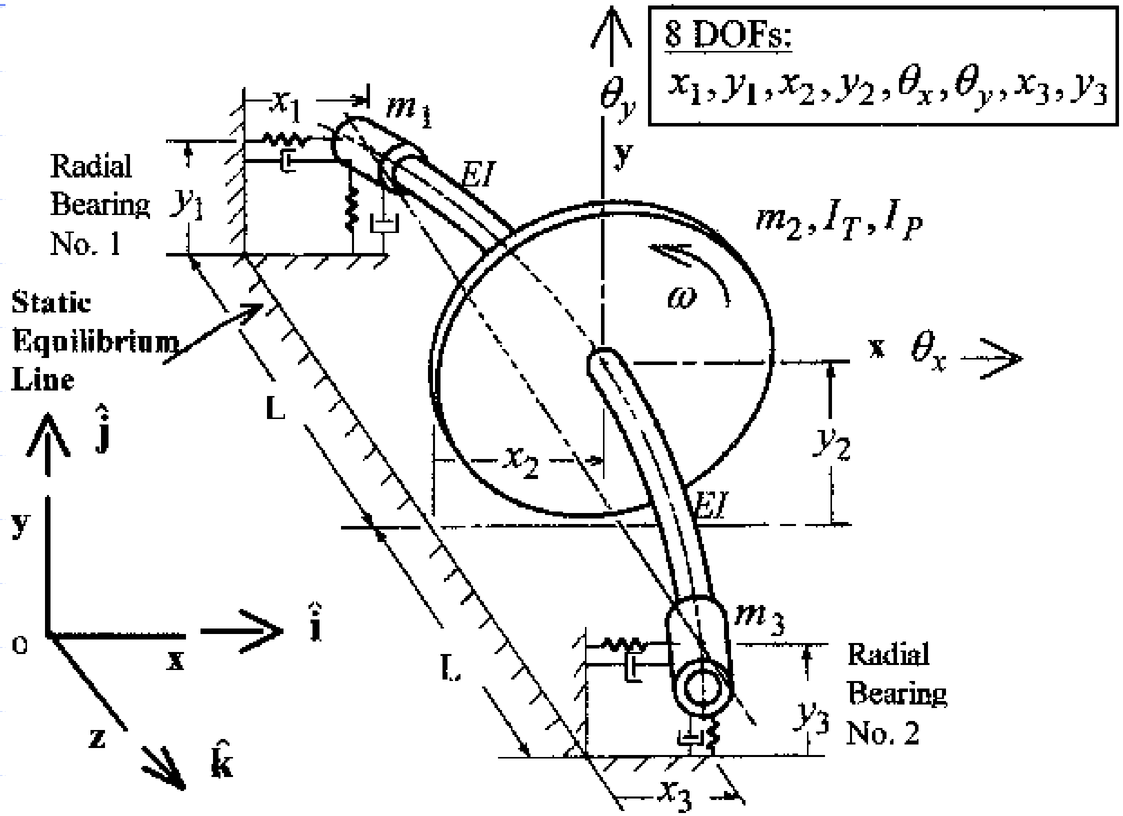
Modelo Linear Simples



- Figura Jeffcott com disco central

$$k_x = k_y = \frac{48EI}{L^3}$$

- Modelo simples com rigidez nos mancais



- Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i\ , \qquad \text{com } i=1 \text{ à } n \text{ graus de liberdade}$$

Energia Potencial

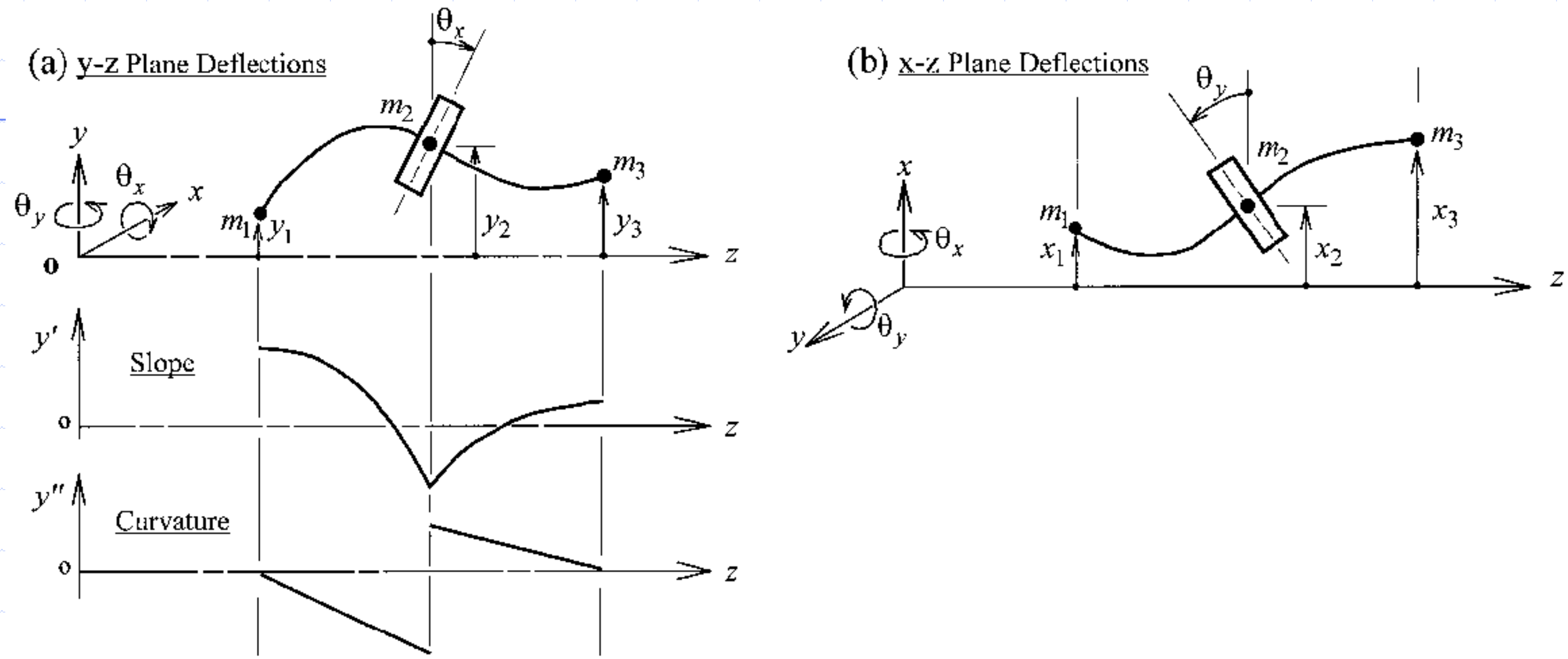
$$U = \int_0^{2L} \frac{M_{xz}^2 + M_{yz}^2}{2EI} dz$$

- Onde: $M_{xz} = EIx''$

  $M_{yz} = EIy''$

e E é o módulo de Young (Elasticidade) e I é o momento de inércia de 2ª ordem.

◆ Energia Potencial – Cálculo de x″ e y″



Com *z* = *0* → *L*

$$x = az^3 + bz + c$$

$$x' = 3az^2 + b$$

$$x'' = 6az$$

- Condições de contorno

$$x(0) = x_1 = c$$

$$x(L) = x_2 = aL^3 + bL + x_1$$

$$x'(L) = \theta_y = 3aL^2 + b$$

$$\theta_x = \theta_y << 1 \Rightarrow \tan\theta_x \cong \theta_x ; \tan\theta_y \cong \theta_y$$

Energia Potencial – Cálculo de x″ e y″

- Assim, para $z = 0 \rightarrow L$ $\begin{cases} x'' = \dfrac{3}{L^3}\left(x_1 - x_2 + \theta_y L\right)z \\ y'' = \dfrac{3}{L^3}\left(y_1 - y_2 - \theta_x L\right)z \end{cases}$

<u>Com $z = L \rightarrow 2L$</u>

$$x = a\left(2L - z\right)^3 + b\left(2L - z\right) + c$$

$$x' = -3a\left(2L - z\right)^2 - b$$

$$x'' = 6a\left(2L - z\right)$$

- Condições de contorno

$$x\left(2L\right) = x_3 = c$$

$$x\left(L\right) = x_2 = L^3 + bL + x_3$$

$$x'\left(L\right) = \theta_y = -3aL^2 - b$$

Energia Potencial – Cálculo de x″ e y″

- Para $z = L \rightarrow 2L$ $\begin{cases} x'' = \dfrac{3}{L^3}\left(x_3 - x_2 - \theta_y L\right)\left(2L - z\right) \\ y'' = \dfrac{3}{L^3}\left(y_3 - y_2 - \theta_x L\right)\left(2L - z\right) \end{cases}$

- Assim,

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^L \left[x''^2 + y''^2\right]dz + \int_L^{2L} \left[x''^2 + y''^2\right]dz$$

$$U = \frac{3EI}{2L^3}\Big(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1\theta_y L - 2x_3\theta_y L + 2\theta_y^2 L^2 + y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2x_2x_3 - 2y_1\theta_x L - 2y_3\theta_x L + 2\theta_x^2 L^2\Big)$$

Energia Cinética

- Cálculo da Energia Cinética (T) de m_1, m_2 e do disco em seu centro de massa ($G = 0$)

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + I_T\left(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2\right) + m_3\left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right)\right]$$

- Onde: $I_T = \frac{1}{4} m_2 R^2 \qquad I_P = \frac{1}{2} m_2 R^2$

- As forças generalizadas devido aos mancais:

$$f_x^{(n)} = -k_{xx}^{(n)} x - k_{xy}^{(n)} y - c_{xx}^{(n)} \dot{x} - c_{xy}^{(n)} \dot{y}$$
$$f_y^{(n)} = -k_{yx}^{(n)} x - k_{yy}^{(n)} y - c_{yx}^{(n)} \dot{x} - c_{yy}^{(n)} \dot{y}$$

com $n = 1$ a 2 mancais.

Energia Cinética – Efeito Giroscópico

- Sabe-se que:

$$\dot{\overline{H}} = M$$

A variação na quantidade de movimento angular é igual a soma dos momentos provocados pelas forças externas

- Sendo

$$\overline{H} = I_T \dot{\theta}_x \, \vec{i} + I_T \dot{\theta}_y \, \vec{j} + I_P \omega \vec{k}$$

o momento angular com ω constante.

- Para considerar a precessão do eixo do disco, considera-se a velocidade angular

$$\Omega = \dot{\theta}_x \, \vec{i} + \dot{\theta}_y \, \vec{j}$$

Energia Cinética – Efeito Giroscópico

- Considerando uma porção de $\dot{\overline{H}}$ diferenciando $\dot{\theta}_x$ e $\dot{\theta}_y$ e outra porção diferenciando o vetor base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), a variação de $\dot{\overline{H}}$ é dada por:

$$\dot{\overline{H}} = \dot{\overline{H}}_\Omega + \overline{\Omega} \times \overline{H}$$

- Como

$$\dot{\overline{H}}_\Omega = I_T \ddot{\theta}_x \, \vec{i} + I_T \ddot{\theta}_y \, \vec{j}$$

- Já que ω constante, e

$$\overline{\Omega} \times \overline{H} = I_p \omega \dot{\theta}_y \, \vec{i} - I_p \omega \dot{\theta}_x \, \vec{j}$$

- Assim,

$$\begin{aligned} M_x &= I_T \ddot{\theta}_x + I_P \omega \dot{\theta}_y \\ M_y &= I_T \ddot{\theta}_y - I_P \omega \dot{\theta}_x \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} M_x - I_P \omega \dot{\theta}_y = I_T \ddot{\theta}_x \\ M_y + I_P \omega \dot{\theta}_x = I_T \ddot{\theta}_y \end{cases}$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- A energia cinética do centro de massa do disco devido a rotação é

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)$$

- Por outro lado, esta expressão não pode ser usada na Equação de Lagrange devido a que w_x, w_y e w_z não são diferenciáveis em relação ao tempo em nenhuma das três coordenadas angulares que poderiam especificar a posição angular do eixo.

- *Esta orientação é dada pelos ângulos de Euler.*

- Hipóteses:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_T \qquad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \Rightarrow \text{termos fixos ao disco (rotacionando)}$$

$$\theta_x = \theta_y << 1 \qquad \vec{I}, \vec{J}, \vec{K} \Rightarrow \text{termos inerciais não rotacionais (fixo)}$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- Ângulos de Euler:

$\Rightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ alinhados com $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$

$\Rightarrow$ rotacionar o disco em θ_y (i.e. $\vec{i}\,\vec{k}$ sobre $\vec{j} = \vec{J}$)

$$\Rightarrow \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k} \rightarrow \vec{i}'\ \vec{j}'\ \vec{k}'\ (\vec{j}' = \vec{j} = \vec{J})$$

$\Rightarrow$ rotacionar o disco em θ_x sobre o eixo x (i.e. $\vec{j}'\vec{k}'$ sobre $\vec{i}'$)

$$\Rightarrow \vec{i}'\ \vec{j}'\ \vec{k}' \rightarrow \vec{i}''\ \vec{j}''\ \vec{k}''\ (\vec{i}'' = \vec{i}')$$

$\Rightarrow$ rotacionar o disco em ϕ (i.e. $\vec{i}''\ \vec{j}''$ sobre $\vec{k}''$)

$$\Rightarrow \vec{i}''\ \vec{j}''\ \vec{k}'' \rightarrow \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ \ (\vec{k}'' = \vec{k})$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- Definindo o vetor de velocidade angular como

$$\overline{\omega}_{total} = \dot{\theta}_y \vec{J} + \dot{\theta}_x \vec{i}\,' + \omega \vec{k}$$

e $\omega = \dot{\phi}$

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \vec{i}\,'' \\ \vec{j}\,'' \\ \vec{k}\,'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}\,'' \\ \vec{j}\,'' \\ \vec{k}\,'' \end{Bmatrix}$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- Ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[R_{\phi}\right]\left[R_{\theta_x}\right]\left[R_{\theta_y}\right]}_{[R]} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix}$$

- Como $[R]$ é ortogonal → $[R]^{-1} = [R]^{T}$

$$\begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} = \left[R\right]^{T} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- Assim, obtêm-se

$$\vec{J} = (\sin\phi\cos\theta_x)\vec{i} + (\cos\phi\sin\theta_x)\vec{j} - \sin\theta_x\vec{k}$$

- Como $\vec{i}'' = \vec{i}'$

$$\vec{i}' = \cos\phi\,\vec{i} - \sin\phi\,\vec{j}$$

- Assim, substituindo em $\overline{\omega}_{total}$

$$\overline{\omega} = \left(\dot{\theta}_y \sin\phi\cos\theta_x + \dot{\theta}_x \cos\phi\right)\vec{i} + \left(\dot{\theta}_y \cos\phi\cos\theta_x - \dot{\theta}_x\sin\phi\right)\vec{j} + \left(-\dot{\theta}_y \sin\theta_x + \omega\right)\vec{k}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_T \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) + \frac{1}{2} I_P \omega_z^2$$

Energia Cinética (Forma alternativa) – Método Lagrangeano

- Considerando

$$\cos\theta_x \cong 1 \qquad \theta_x = \theta_y \qquad \sin^2\theta_x << \sin\theta_x$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left[I_T\left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) + I_P\left(\omega^2 - 2\omega\theta_y\dot{\theta}_x\right)\right]$$

- Considerando a translação

$$T_{disco} = T_{eg} + T_{rot}$$

$$T_{disco} = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + I_T\left(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2\right) + \right.$$

$$\left. + I_P\left(\omega^2 - 2\omega\theta_y\dot{\theta}_x\right) + m_3\left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right)\right]$$

Equação de Movimento (forma matricial)

Substituindo as equações U, T, as forças generalizadas, e, incluindo estas últimas equações, obtém-se:

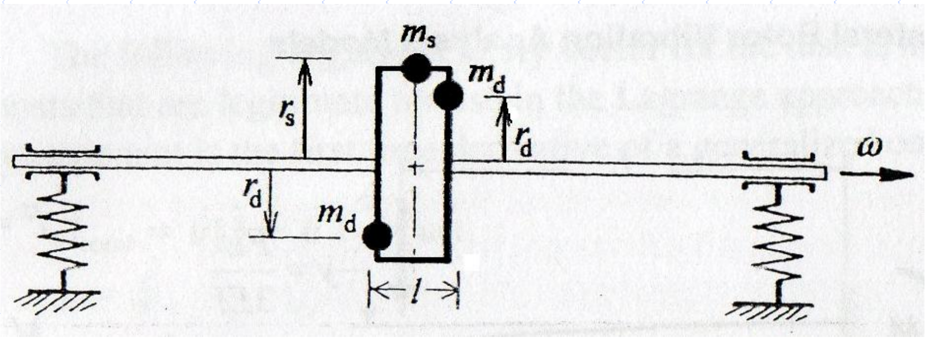
$$
\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_1\ddot{y}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \\ m_2\ddot{y}_2 \\ I_T\ddot{\theta}_x \\ I_T\ddot{\theta}_y \\ m_3\ddot{x}_3 \\ m_3\ddot{y}_3 \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
c_{xx}^{(1)} & c_{xy}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{yx}^{(1)} & c_{yy}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_P\omega & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -I_P\omega & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xx}^{(2)} & c_{xy}^{(2)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yx}^{(2)} & c_{xx}^{(2)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix}
+
$$

$$
\frac{3EI}{L^3}+
\begin{bmatrix}
1+\bar{k}_{xx}^{(1)} & \bar{k}_{xy}^{(1)} & -1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\
\bar{k}_{yx}^{(1)} & 1+\bar{k}_{yy}^{(1)} & 0 & -1 & -L & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & L \\
L & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & -L & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -L & 1+\bar{k}_{xx}^{(2)} & \bar{k}_{xy}^{(2)} \\
0 & 0 & 0 & -1 & L & 0 & \bar{k}_{yx}^{(2)} & 1+\bar{k}_{xx}^{(2)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}
= \{R\}
$$

$$
\bar{k}_{ij}^{(n)} = \frac{L^3}{3EI} k_{ij}^{(n)}
$$

Equação de Movimento (forma matricial)

Considerando desbalanceamento estático e dinâmico, como mostrado na figura abaixo



$$[M]\{\ddot{q}\}+\left[C+G(\Omega)\right]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_s r_s \cos\omega t \\ m_s r_s \sin\omega t \\ m_d r_d\, l\cos(\omega t+\phi) \\ m_d r_d\, l\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$