



3. SISTEMAS GIRANTES

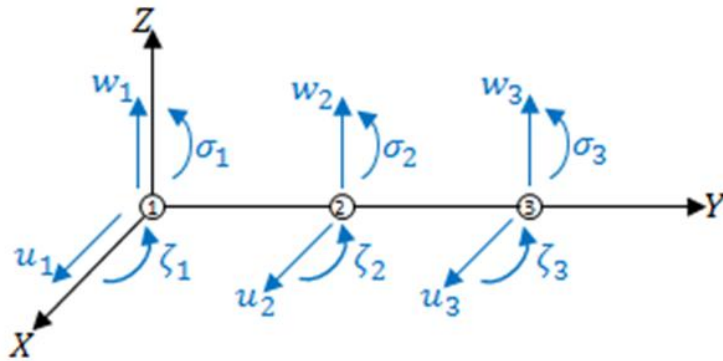
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

◆ Equações do Rotor: Introdução

- Agora são abordados modelos de rotores que são utilizados em turbo máquinas.
- As equações gerais são apresentadas e os métodos numéricos usados para resolver estas equações serão introduzidos.
- Se propõe um programa de elementos finitos baseados nas equações e métodos numéricos anteriormente apresentados

Equações do Rotor: Introdução

No caso de um elemento com 3 nós:



$$q(y) = \{N\}^T \{q\}$$

Deslocamento espacial

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1(y) \\ N_2(y) \\ N_3(y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{y}{L} \left(1 - \frac{2y}{L}\right) \\ 1 - \left(\frac{2y}{L}\right)^2 \\ \frac{y}{L} \left(1 + \frac{2y}{L}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\{N'\} = \frac{\partial}{\partial y} \{N\} = \begin{Bmatrix} -\frac{L-4y}{L^2} \\ -\frac{8y}{L^2} \\ \frac{L-4y}{L^2} \end{Bmatrix}$$

Funções de interpolação

◆ Equações do Rotor: Introdução

Incluindo o deslocamento espacial na equação de energia potencial U

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N'\}^T EI_x dY}_{K^1} \{\sigma\} + \frac{1}{2} \{\zeta\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N'\}^T EI_y dY}_{K^2} \{\zeta\} + \frac{1}{2} \{\zeta\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T G^* S dY}_{K^3} \{\zeta\} + \\
 & + \frac{1}{2} \{\zeta\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N'\}^T G^* S dY}_{K^4} \{u\} + \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N\}^T G^* S dY}_{K^5} \{\zeta\} + \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N'\}^T G^* S dY}_{K^6} \{u\} + \\
 & + \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T G^* S dY}_{K^7} \{\sigma\} + \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \underbrace{\left(-\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N'\}^T G^* S dY \right)}_{K^8} \{w\} \\
 & + \frac{1}{2} \{w\}^T \underbrace{\left(-\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N\}^T G^* S dY \right)}_{K^9} \{\sigma\} + \frac{1}{2} \{w\}^T \underbrace{\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{N'\} \{N'\}^T G^* S dY}_{K^{10}} \{w\},
 \end{aligned}$$

K^e

Incluindo a velocidade espacial na equação de energia cinética T

$$\dot{q}(y) = \{N\}^T \{\dot{q}\}$$

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T dy}_{M^1} \{\dot{u}\} + \frac{1}{2} \{\dot{w}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T dy}_{M^2} \{\dot{w}\} + \frac{1}{2} \{\dot{\sigma}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T dy}_{M^3} \{\dot{\sigma}\} + \\
 & \frac{1}{2} \{\dot{\zeta}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T dy}_{M^4} \{\dot{\zeta}\} + \rho I L \Omega^2 + \frac{1}{2} \{\dot{\zeta}\}^T \underbrace{2 \rho I \Omega \int_{-L/2}^{L/2} \{N\} \{N\}^T dy}_{G} \{\dot{\sigma}\}
 \end{aligned}$$

M^e, G^e

◆ Equações do Rotor: Introdução

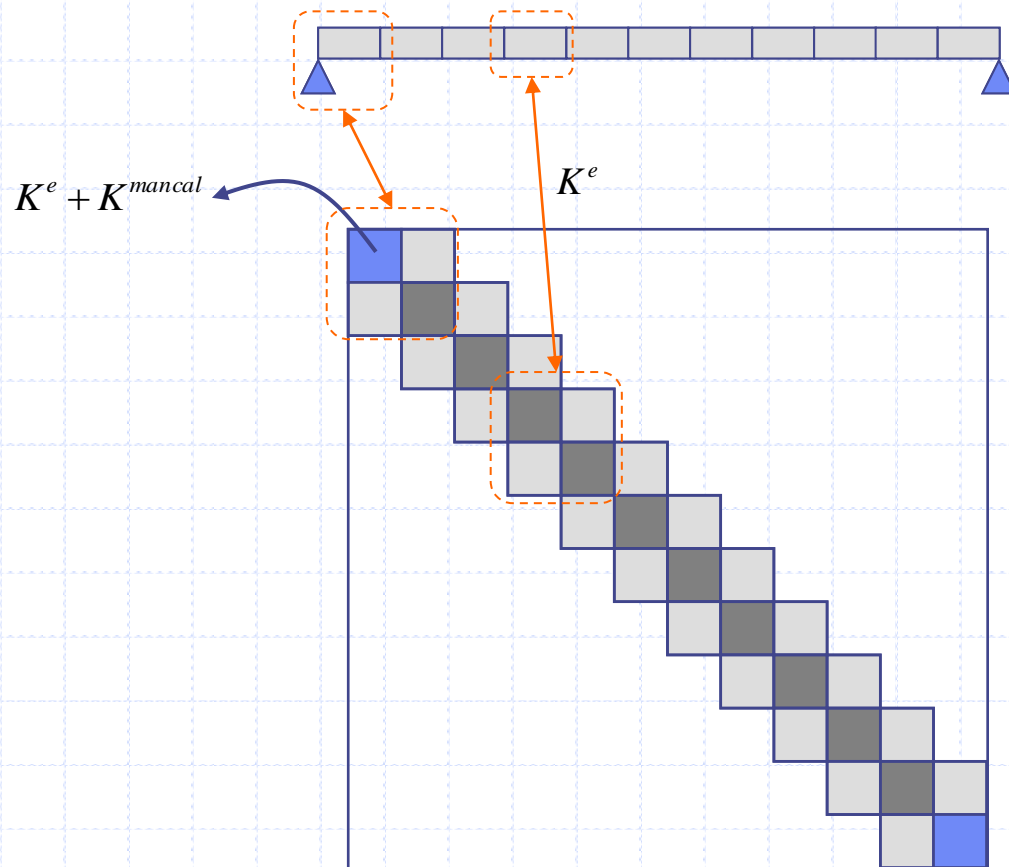
O amortecimento e rigidez adicionados pelos mancais, são representados pelas matrizes abaixo e são somados aos nós respectivos da matriz global.

$$C^{mancal} = \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} & c_{X\sigma} & c_{X\zeta} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} & c_{Z\sigma} & c_{Z\zeta} \\ c_{\sigma X} & c_{\sigma Z} & c_{\sigma\sigma} & c_{\sigma\zeta} \\ c_{\zeta X} & c_{\zeta Z} & c_{\zeta\sigma} & c_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$$

$$K^{mancal} = \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} & k_{X\sigma} & k_{X\zeta} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} & k_{Z\sigma} & k_{Z\zeta} \\ k_{\sigma X} & k_{\sigma Z} & k_{\sigma\sigma} & k_{\sigma\zeta} \\ k_{\zeta X} & k_{\zeta Z} & k_{\zeta\sigma} & k_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$$

◆ Equações do Rotor: Introdução

Que pode ser exemplificada pela seguinte figura



◆ Elementos Finitos: O Disco

Serão considerados quatro graus de liberdade no nó do rotor: dois deslocamentos u e w , e dois giros ao redor do eixo X e Y que são, respectivamente, θ e ψ . Assim, se δ é o vetor deslocamento nodal do centro do disco:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T$$

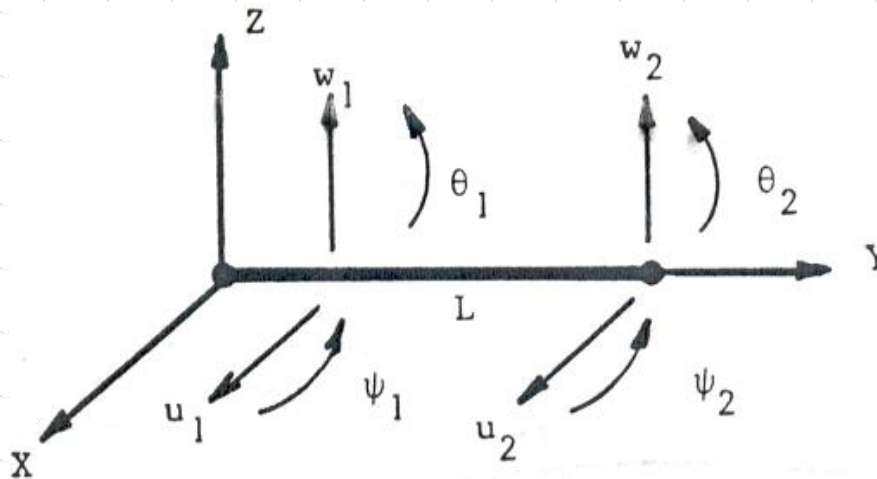
a aplicação da equação de Lagrange para a equação da energia cinética do disco resulta em :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

onde a primeira matriz é a matriz de inércia clássica e a segunda é a matriz giroscópica (efeito de Coriolis).

◆ Elementos Finitos: O Eixo

O eixo é modelado como uma viga com seção transversal circular constante. O elemento usado possui dois nós com quatro graus de liberdade cada um deles. Assim, as matrizes que resultarão, após aplicada alguma técnica (equações de Lagrange é uma delas), são de ordem oito (quatro deslocamentos e quatro giros) como pode ser visualizado na imagem abaixo.



Então, as relações entre deslocamentos e giros são:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

O vetor deslocamento nodal é:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T$$

que incluem os deslocamentos δu e δw correspondendo, respectivamente, aos movimentos nas direções X e Y , tal que

$$\delta_u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

O elemento finito é construído de:

$$u = N_1(y) \delta_u$$

$$w = N_2(y) \delta_w$$

onde $N_1(y)$ e $N_2(y)$ são as funções típicas de deslocamento de uma viga a flexão:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right]$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right]$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

A energia cinética do eixo é obtida da equação geral da energia cinética do eixo, em forma compacta:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy$$



$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w} \right] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{d N_1^T}{d y} \frac{d N_1}{d y} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{d N_2^T}{d y} \frac{d N_2}{d y} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int \delta \dot{u}^T \frac{N_1^T}{d y} \frac{N_2}{d y} \delta w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned}$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

Substituindo $N1(y)$ e $N2(y)$ na equação da energia cinética, após a integração:

$$T_s = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} \\ + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta w + \rho I L \Omega^2$$

Onde as matrizes M_1 e M_2 são matrizes de massa clássica, M_3 e M_4 dão a influencia dos efeitos secundários de rotação de inércia e M_5 apresenta o efeito giroscópio.

Como tem sido observado previamente, o ultimo termo que é uma constante não será considerado daqui em mais.

◆ Elementos Finitos: O Eixo

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + G \dot{\delta}$$

onde M e M_s são obtidos respectivamente de M_1, M_2 e M_3, M_4 , e a matriz G vem de M_5 . Estas matrizes são:

◆ Elementos Finitos: O Eixo

$$M = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

$$G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

A energia de deformação do eixo é obtida da equação geral da energia de deformação do eixo:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{d y^2} \frac{d^2 N_1}{d y^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{d y^2} \frac{d^2 N_2}{d y^2} \delta w \right] dy \\ + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d N_1^T}{d y} \frac{d N_1}{d y} \delta u + \delta w^T \frac{d N_2^T}{d y} \frac{d N_2}{d y} \delta w \right] dy$$

Após a integração, U toma a forma:

$$U = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w$$

onde K_1 e K_2 são matrizes de rigidez clássica, e K_3 e K_4 as matrizes devidas às forças axiais

◆ Elementos Finitos: O Eixo

É também frequentemente necessário considerar o efeito de cisalhamento, o qual é caracterizado pela quantidade:

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$$

com o módulo de cisalhamento:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e $S_r (\cong S)$ é a área reduzida da secção transversal.

◆ Elementos Finitos: O Eixo

A influência do efeito de cisalhamento que da a matriz K_s não é demonstrada aqui, mas a sua influência é incluída na matriz de rigidez clássica.

A matriz de rigidez clássica K_c vem de K_1 , K_2 e K_s , e a matriz K_F devido à força axial vem de K_3 e K_4 .

Assim, se as equações de Lagrange são aplicadas à equação da energia potencial:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K \delta$$

Onde:

$$K = K_C + K_F$$

◆ Elementos Finitos: O Eixo

As expressões das matrizes são as seguintes:

$$K_C = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix}$$

se $a = 0$, a matriz acima é a matriz de rigidez clássica de uma viga fina em flexão

◆ Elementos Finitos: O Eixo

$$K_F = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

◆ Elementos Finitos: Mancais e Acoplamentos

As principais características relacionam forças e deslocamentos. Por outro lado, a influência dos giros e momentos de flexões é desconsiderada. As matrizes são diretamente obtidas das equações abaixo:

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w}$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u}$$

◆ Elementos Finitos: Mancais e Acoplamentos

como $F_\theta = F_\psi = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

A primeira é uma matriz de rigidez e a segunda uma matriz de amortecimento viscoso.

Estas matrizes são geralmente não simétricas (isto é, $k_{xz} \neq k_{zx}$ e $c_{xz} \neq c_{zx}$) e seus termos podem variar significativamente com a velocidade de rotação.

◆ Elementos Finitos: Desbalanceamento

A expressão geral para a energia cinética de massa desbalanceada é:

$$T_u \simeq m_u \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)$$

Aplicando a equação de Lagrange a esta obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

com

$$\delta = [u, w]^T$$

◆ Elementos Finitos: Desbalanceamento

- Essa expressão corresponde a uma massa desbalanceada situada sobre o eixo z em $t=0$.
- Quando um rotor industrial é estudado, a influencia de varias massas desbalanceadas agindo simultaneamente tem que ser consideradas.
- Para a massa desbalanceada situada em $t=0$, em uma posição angular α com respeito ao eixo z, a força é :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix}$$

que pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = F_2 \sin \Omega t + F_3 \cos \Omega t$$

◆ Elementos Finitos: Desbalanceamento

Sendo

$$F_2 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix}$$

e

$$F_3 = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

◆ Elementos Finitos: Exemplo 1

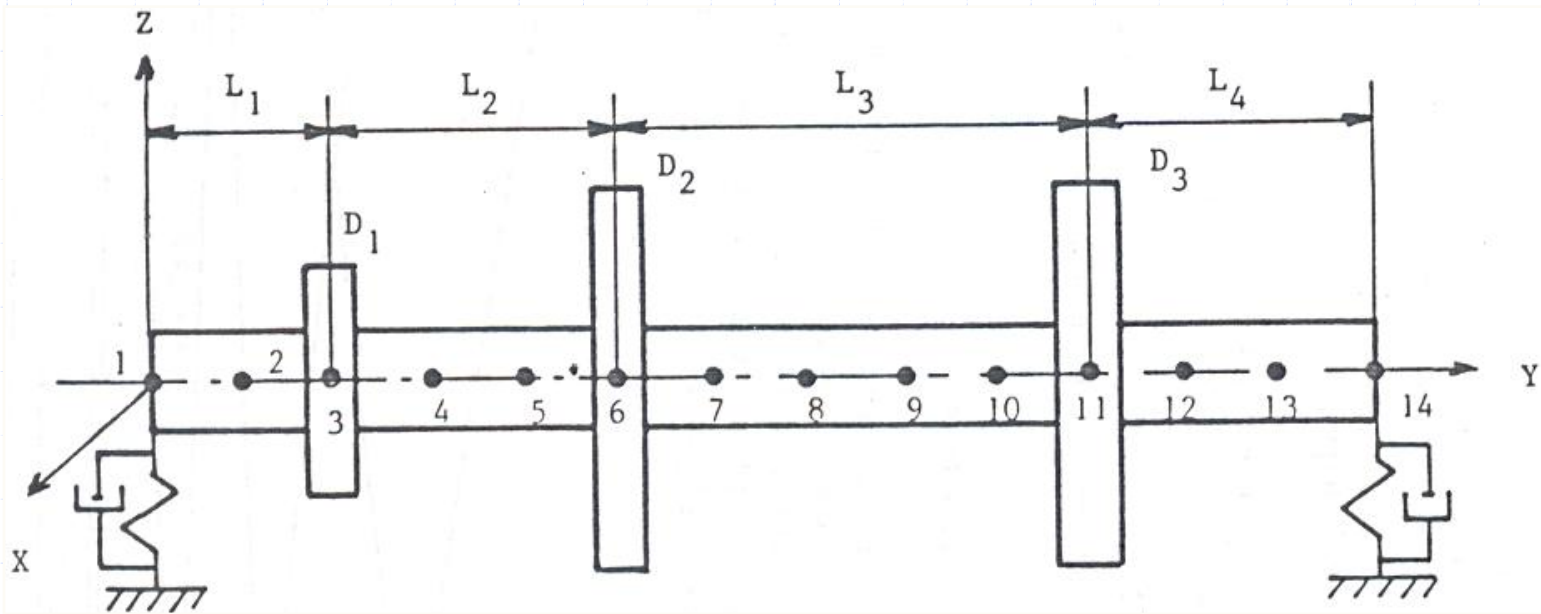
-Exemplos de modelos simples usando elementos finitos.

-O primeiro exemplo mostra o grau de confiabilidade que pode ser dado ao método modal de resolução.

-A seguir, é mostrada uma representação das frequências naturais em função da rigidez do mancal.

◆ Elementos Finitos: Exemplo 1

Rotor composto por um eixo de 0,1 m de diâmetro, três discos distribuídos ao longo do mesmo e dois mancais flexíveis em cada um de seus extremos.



◆ Elementos Finitos: Exemplo 1

- O modelo possui 13 elementos finitos de eixo com os mesmos comprimentos.
- O eixo é dividido em seções com os seguintes valores para cada uma delas:

$$L1 = 0,2 \text{ m}; \quad L2 = 0,3 \text{ m}; \quad L3 = 0,5 \text{ m}; \quad L4 = 0,3 \text{ m}$$

- Os discos e eixo são feitos de aço e suas características físicas são:

$$E = 20 \cdot 10^{10} \text{ N} / \text{m}^2$$

$$\rho = 7800 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\nu = 0,3$$

Os dois mancais são assumidos idênticos e caracterizados por:

$$k_{xx} = 5 \cdot 10^7 \text{ N} / \text{m}; \quad k_{zz} = 7 \cdot 10^7 \text{ N} / \text{m}; \quad k_{xz} = k_{zx} = 0$$

$$c_{xx} = 5 \cdot 10^2 \text{ N} / \text{m}; \quad c_{zz} = 7 \cdot 10^2 \text{ N} / \text{m}; \quad c_{xz} = c_{zx} = 0$$

A velocidade de rotação do rotor varia de 0 a 30 000 rpm.

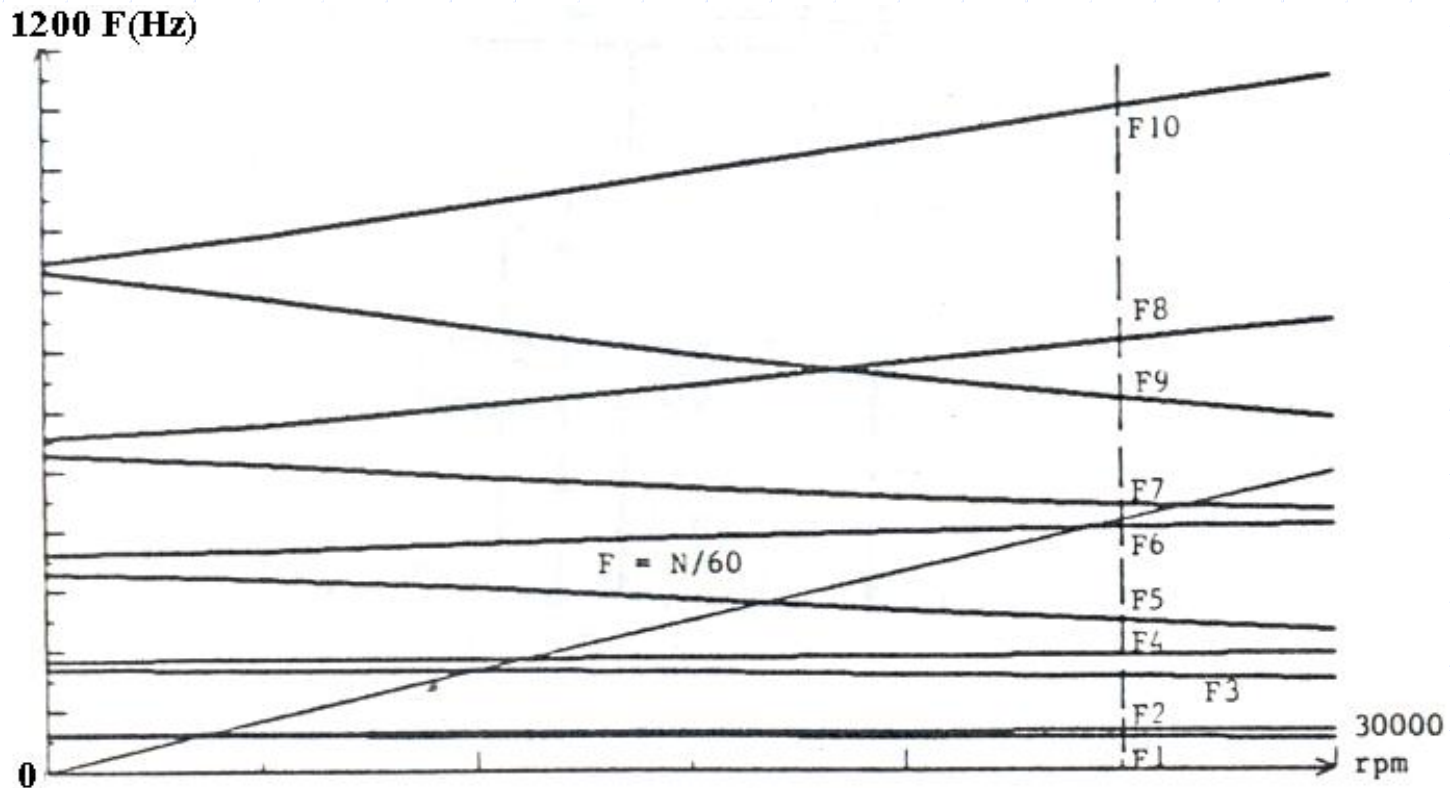
◆ Elementos Finitos: Exemplo 1-Diagrama de Campbell

Os dados dos discos são dados pela seguinte tabela:

DISK	D_1	D_2	D_3
Thickness (m)	0.05	0.05	0.06
Inner radius (m)	0.05	0.05	0.05
Outer radius (m)	0.12	0.2	0.2

◆ Elementos Finitos: Exemplo 1-Diagrama de Campbell

As dez primeiras frequências naturais calculadas são apresentadas na figura abaixo:



Elementos Finitos: Exemplo 1-Diagrama de Campbell

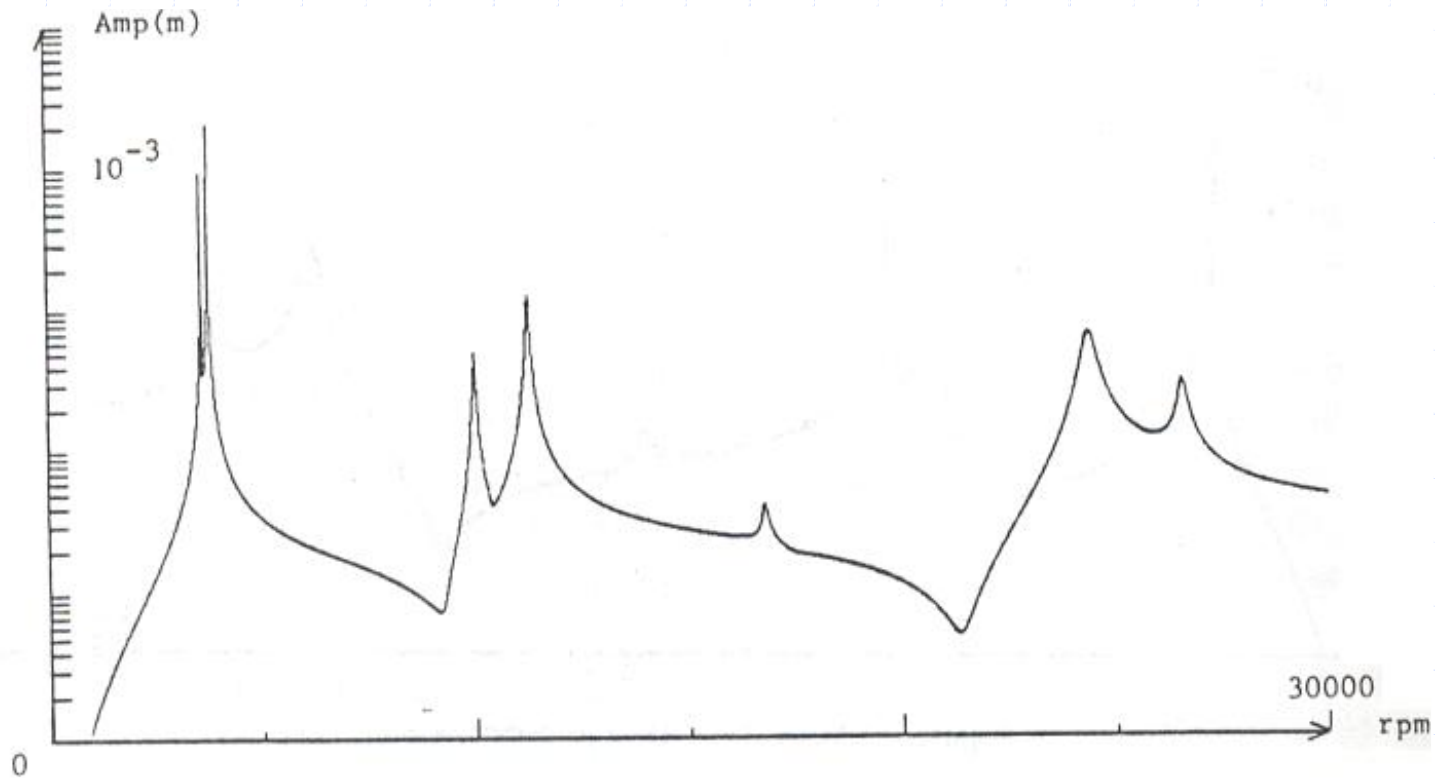
As frequências naturais em Hz para uma rotação constante de 25 000 rpm

Table 2 Frequencies in hertz at 25 000 rpm

FREQUENCY	REFERENCE VALUE	2 MODES	4 MODES	6 MODES	8 MODES	10 MODES	12 MODES	14 MODES
F1	55.408	56.135 1.3%	56.127 1.3%	55.690 0.51%	55.472 0.12%	55.471 0.11%	55.429 0.04%	55.424 0.03%
F2	67.209	68.062 1.3%	68.051 1.3%	67.473 0.39%	67.267 0.09%	67.266 0.09%	67.228 0.03%	67.223 0.02%
F3	157.90		160.30 1.5%	160.23 1.1%	159.97 1.1%	158.38 0.3%	158.08 0.11%	157.93 0.02%
F4	193.71		196.30 1.3%	196.25 1.3%	195.94 1.1%	194.13 0.22%	193.86 0.08%	193.73 0.01%
F5	249.90			270.63 8.3%	254.53 1.8%	253.37 1.4%	251.12 0.49%	250.99 0.44%
F6	407.62			448.57 10%	413.06 1.3%	410.80 0.78%	409.51 0.46%	408.61 0.24%
F7	446.62				453.03 1.4%	452.31 1.3%	448.14 0.34%	447.27 0.14%
F8	715.03				759.81 6.2%	758.39 6.1%	720.24 0.73%	720.17 0.72%
F9	622.65					635.89 2.1%	628.18 0.89%	624.50 0.3%
F10	1093.0					1142.6 4.5%	1122.6 2.71%	1104.7 1.1%

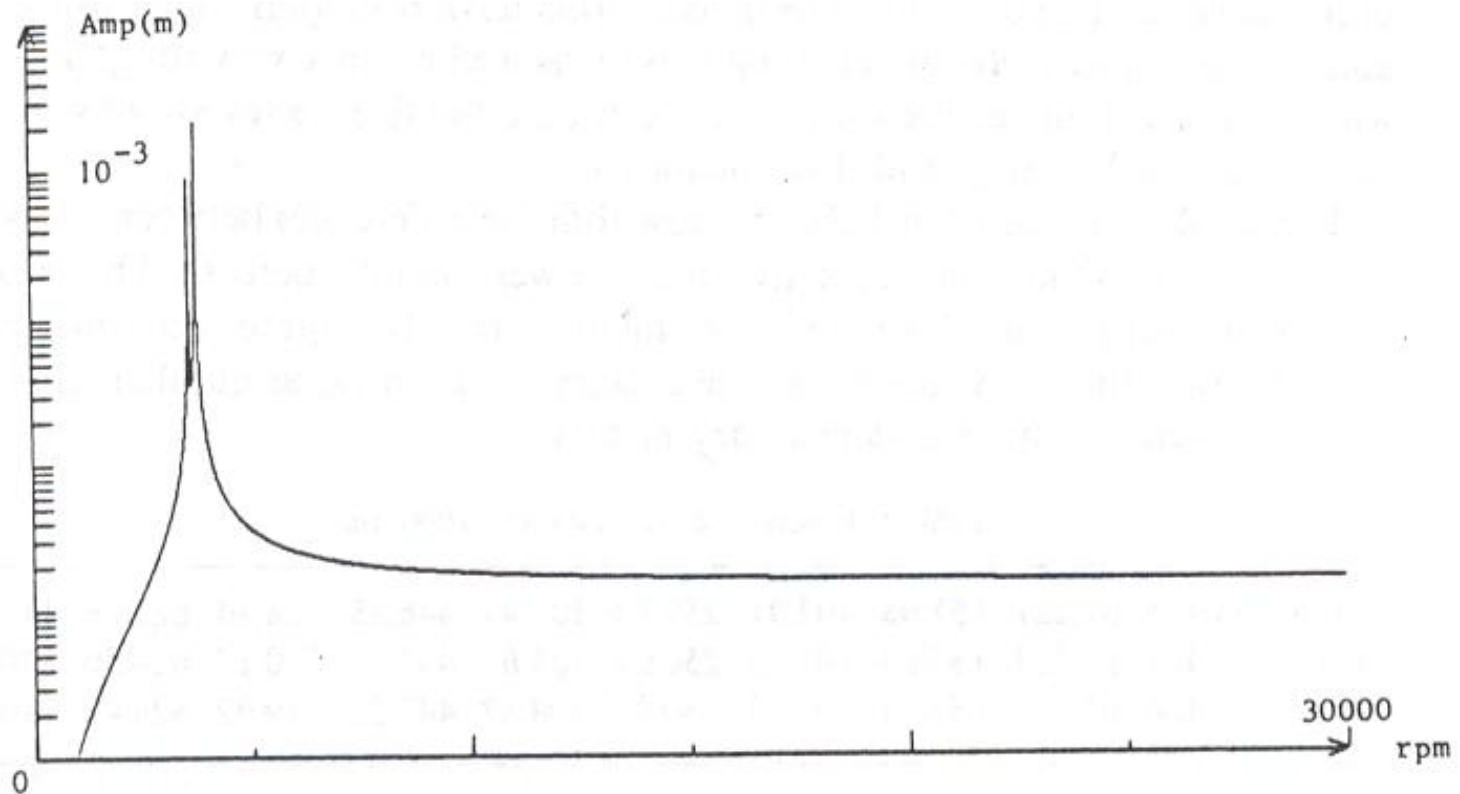
◆ Elementos Finitos: Resposta ao desbalanceamento

- Assume-se uma massa desbalanceada de 200 g mm situada sobre o disco D_2 .
- A resposta de deslocamento no nó 6 é mostrada na figura abaixo:



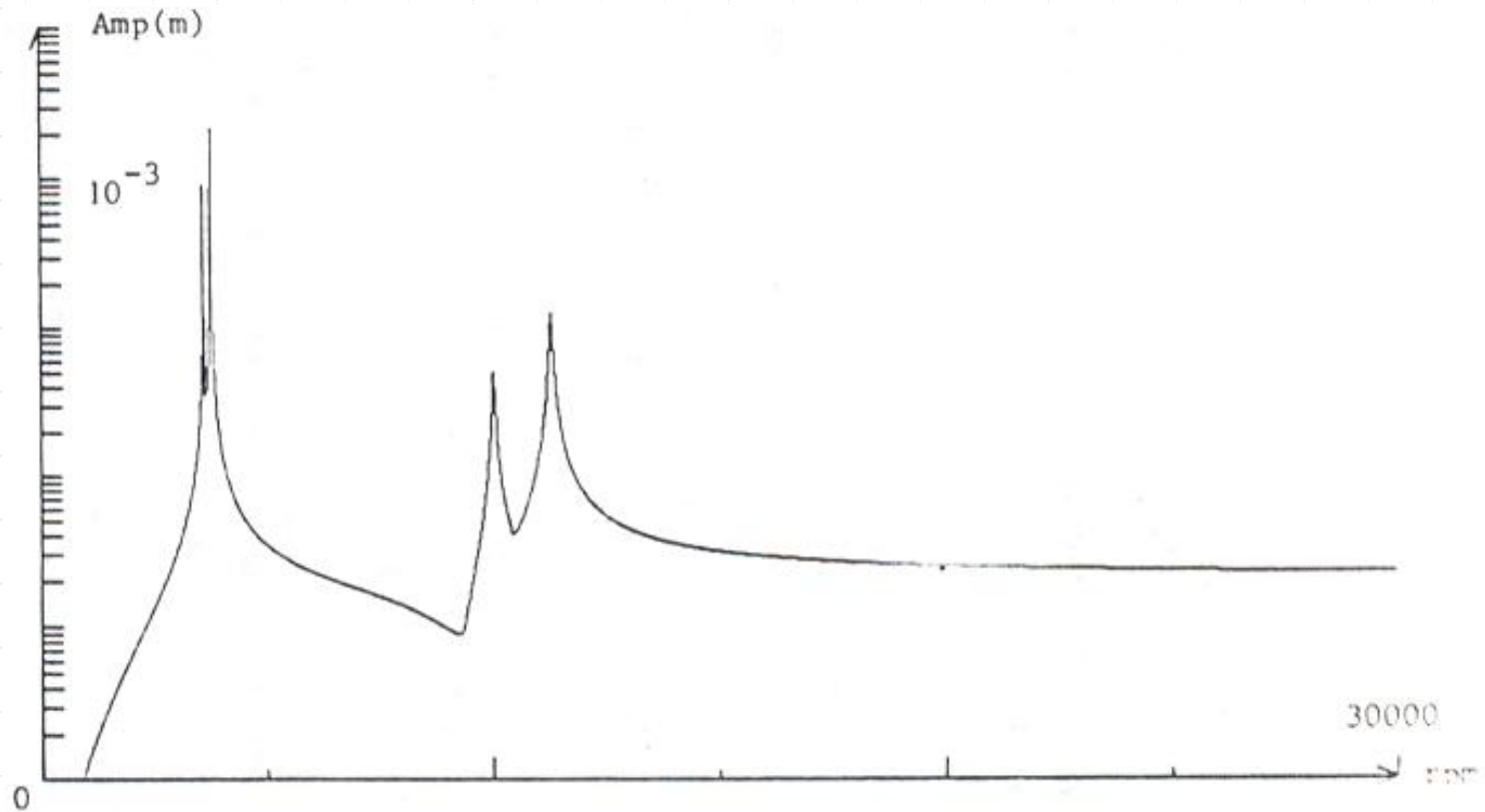
◆ Elementos Finitos: Resposta ao desbalanceamento

Considerando dois modos ($n=2$) na resposta



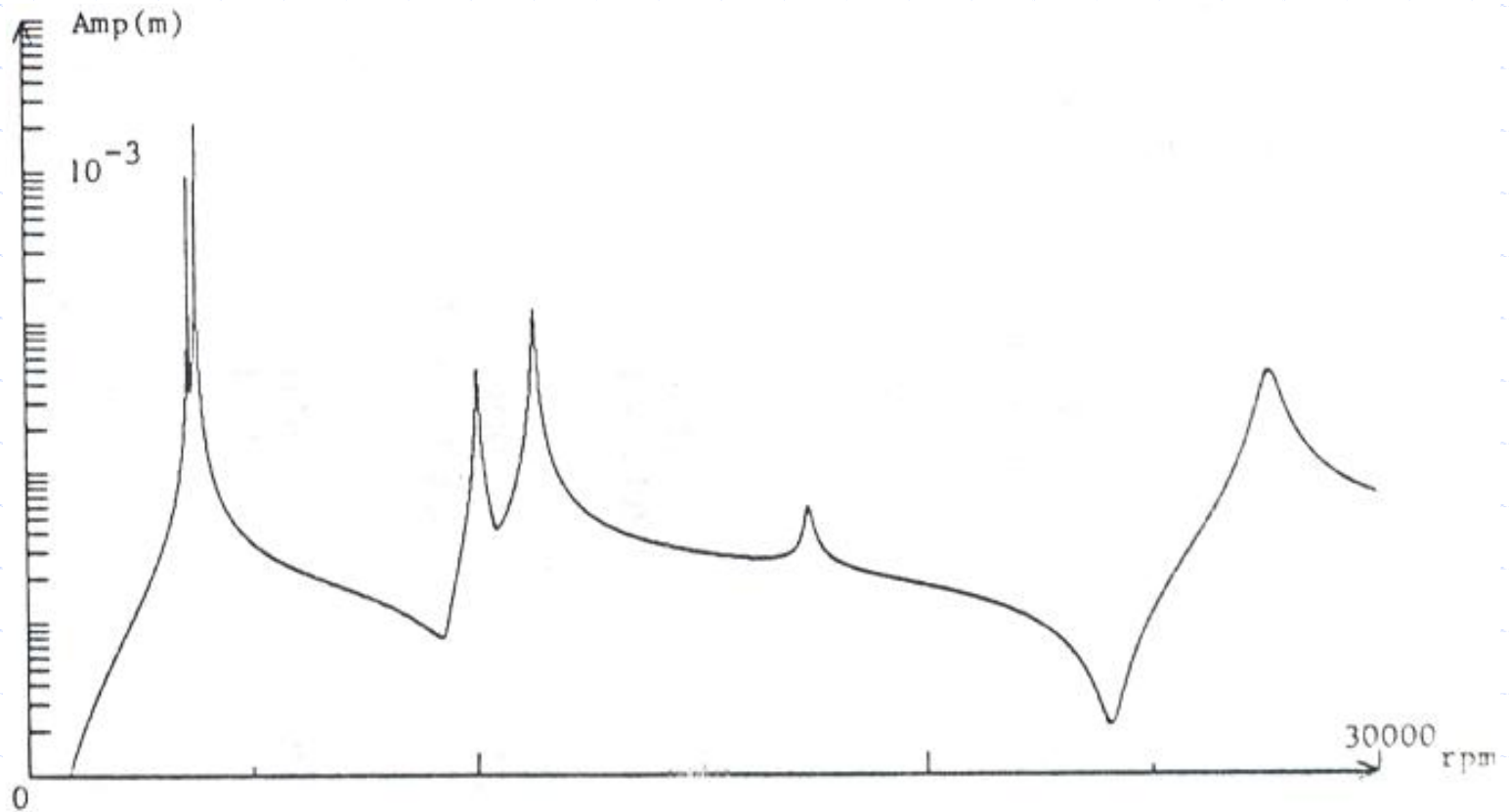
◆ Elementos Finitos: Resposta ao desbalanceamento

Considerando quatro modos ($n=4$) na resposta



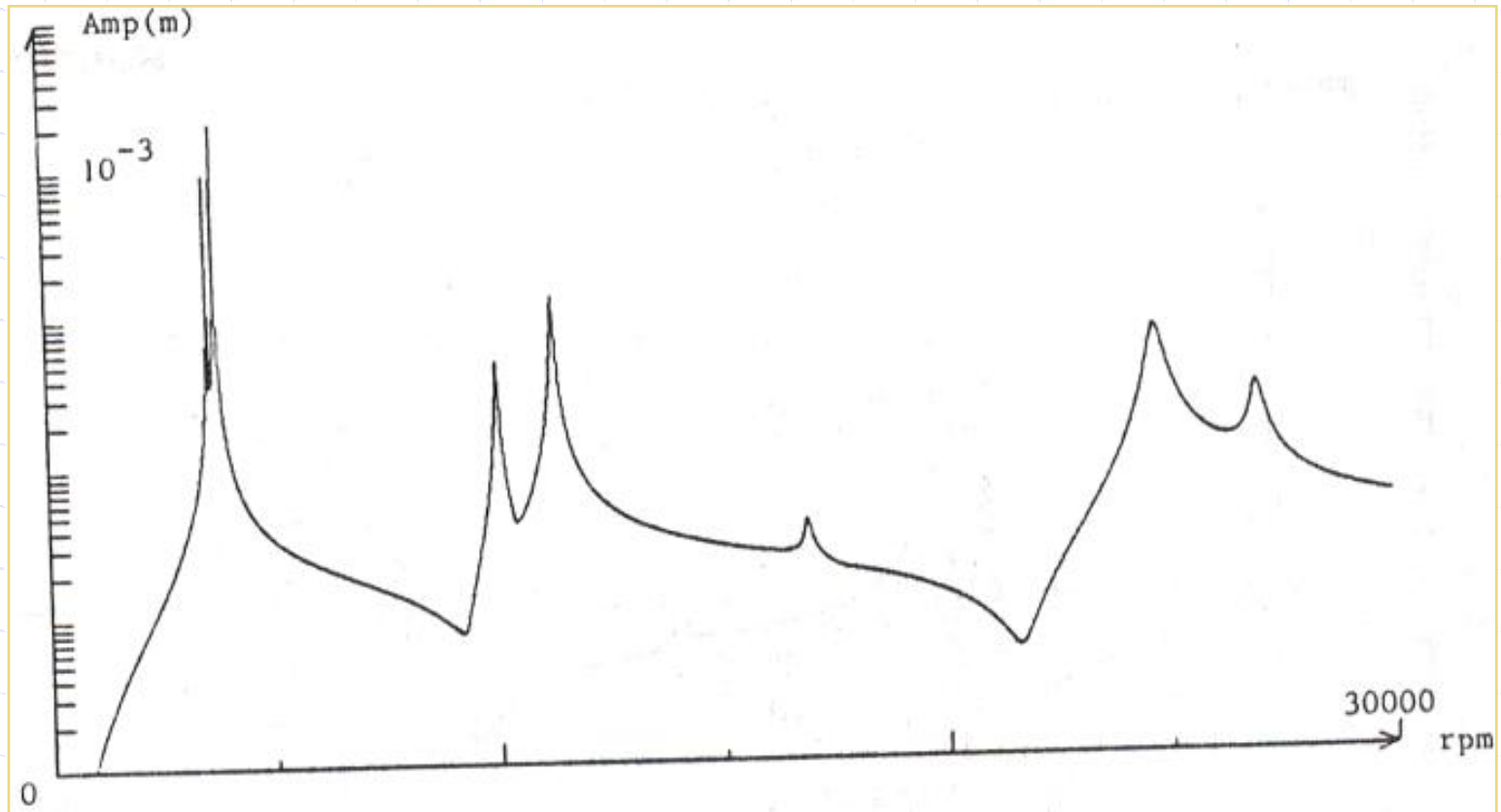
◆ Elementos Finitos: Resposta ao desbalanceamento

Considerando seis modos ($n=6$) na resposta



◆ Elementos Finitos: Resposta ao desbalanceamento

Considerando oito modos ($n=8$) na resposta



Elementos Finitos: Rotações Críticas

Na seguinte tabela esta apresentada a velocidade crítica

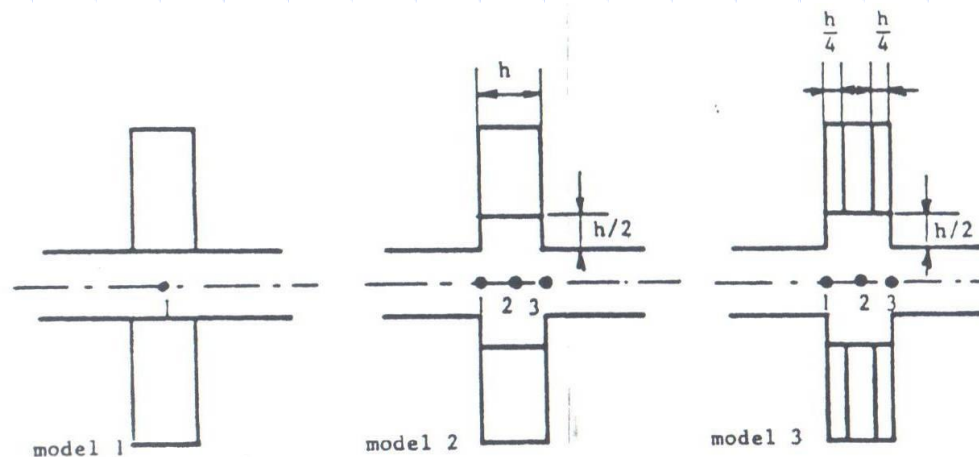
CRITICAL SPEED	REFERENCE VALUE	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 14$
C1	3620.5 0.938×10^{-3}	3621.3 0.91×10^{-3} -3%	3621.3 0.911×10^{-3} -2.9%	3620.8 0.938×10^{-3} 0%	3620.6 0.940×10^{-3} 0.21%	3620.6 0.940×10^{-3} 0.21%	3620.5 0.937×10^{-3} -0.11%	3620.5 0.938×10^{-3} 0%
C2	3798.3 0.210×10^{-2}	3799.6 0.218×10^{-2} 3.8%	3799.6 0.218×10^{-2} 3.8%	3798.7 0.209×10^{-2} -0.48%	3798.4 0.204×10^{-2} -0.48%	3798.4 0.209×10^{-2} -0.48%	3798.3 0.210×10^{-2} 0%	3798.3 0.210×10^{-2} 0%
C3	10018 0.499×10^{-4}		10042 0.505×10^{-4} 1.2%	10041 0.503×10^{-4} 0.8%	10038 0.495×10^{-4} -0.8%	10022 0.496×10^{-4} -0.60%	10020 0.502×10^{-4} 0.60%	10018 0.502×10^{-4} 0.60%
C4	11281 0.130×10^{-3}		11313 0.126×10^{-3} -3.1%	11313 0.127×10^{-3} -2.3%	11310 0.133×10^{-3} 2.3%	11286 0.132×10^{-3} 1.5%	11283 0.130×10^{-3} 0%	11281 0.130×10^{-3} 0%
C5	16787 0.421×10^{-5}			17394 0.584×10^{-5} 39%	16918 0.410×10^{-5} -2.6%	16883 0.428×10^{-5} 1.7%	16824 0.427×10^{-5} 1.4%	16817 0.420×10^{-5} -0.24%
C6	24418 0.684×10^{-4}				24769 0.722×10^{-4} 5.6%	24622 0.654×10^{-4} -3.6%	24539 0.658×10^{-4} -3.8%	24481 0.705×10^{-4} 3.1%
C7	26611 0.311×10^{-4}			24651 0.485×10^{-4} 56%	27003 0.294×10^{-4} -5.5%	26942 0.276×10^{-4} -11%	26704 0.332×10^{-4} 6.7%	26645 0.322×10^{-4} 3.5%

◆ Elementos Finitos: Modelo do Disco

Modelo 1: o disco é fixado ao eixo através de um ponto. O disco não muda a rigidez do eixo e concentra a sua inercia no ponto.

Modelo 2: o disco é montado através de ajuste por interferência. Deve-se aumentar, na largura do disco (h), o diâmetro do eixo em $h/2$.

Modelo 3: se a largura do disco é tal que abarca 3 nós da malha por exemplo, o disco deve ser alocado em partes em cada um dos mesmos.



◆ Elementos Finitos: Mapa de Rigidez

O diagrama de rigidez do mancal é a representação da evolução das frequências naturais do rotor versus a rigidez dos mancais que são consideradas:

- Idênticas para todos os mancais;
- Iguais à rigidez equivalente

Com

$$k_x = \sqrt{k_{xx}^2 + \Omega^2 c_{xx}^2}$$

$$k_x = k_z = k$$

$$k_{xz} = k_{zx} = c_{xz} = c_{zx} = 0$$

onde Ω é a velocidade angular de rotação.

◆ Elementos Finitos: Mapa de Rigidez



-Este diagrama é muito útil na fase preliminar de projeto de um rotor, dando informação acerca da rigidez comparativa entre o eixo e o mancal. Ele é recomendado (muitas vezes solicitado) por normas de turbomáquinas, tal como a “American Petroleum Institute” (API).

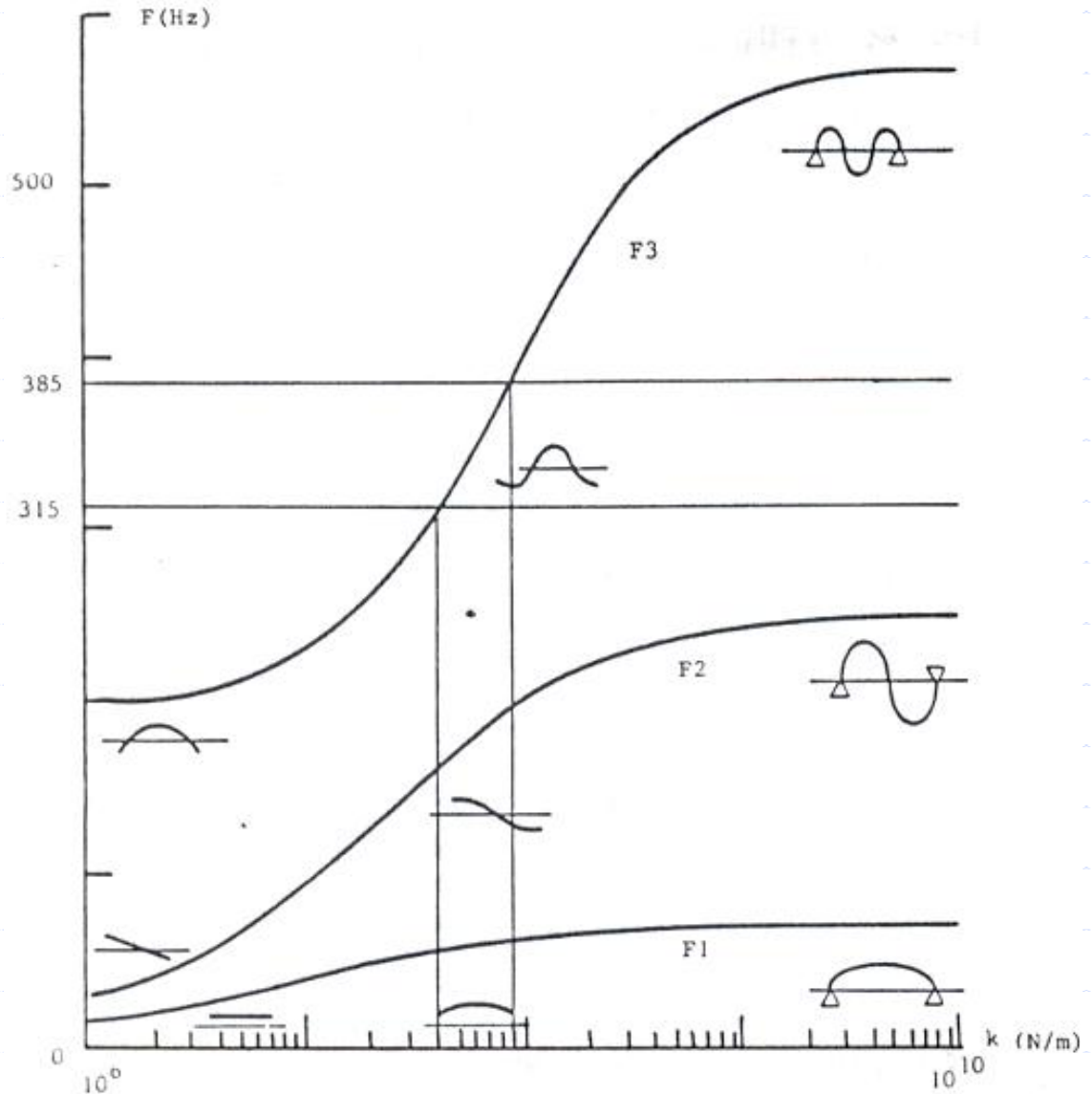
-Quando o efeito giroscópico é pequeno, as frequências naturais não são função da velocidade de rotação. Se a velocidade de operação do rotor é 21.000 *rpm* (350 Hz), as frequências naturais na faixa de 315-385 Hz devem ser eliminadas ($\pm 10\%$ da velocidade de operação). Concluindo que a rigidez equivalente do mancal deve estar fora da faixa 4×10^7 a 9×10^7 N/m.

-Quando o efeito giroscópico é significativo, é necessário incluir na predição das frequência naturais a influência da velocidade nominal de rotação (21.000 *rpm*). Seis frequências aparecem agora (3 em FW, 3 em BW), ver o **segundo diagrama**. O que pode-se concluir que a rigidez equivalente do mancal dever estar fora da faixa entre 2×10^7 e 5×10^7 N/m (velocidade critica do tipo FW) ou 1×10^8 e $3,1 \times 10^8$ N/m (velocidade critica do tipo BW). O diagrama da API da uma ideia da rigidez que deve ser usada no mancais p/este tipo de máquinas.

◆ Elementos Finitos: Mapa de Rigidez

A rigidez equivalente do mancal deve estar fora da faixa 4×10^7 a 9×10^7 N/m

Frequências naturais sem efeito giroscópico versus rigidez equivalente



◆ Elementos Finitos: Mapa de Rigidez

A rigidez equivalente do mancal deve estar fora da faixa entre 2×10^7 e 5×10^7 N/m (velocidade crítica do tipo FW) ou 1×10^8 e $3,1 \times 10^8$ N/m (velocidade crítica do tipo BW)

Frequências naturais incluindo efeito giroscópico versus rigidez equivalente

