DINÂMICA DE ROTORES

Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Msc. Thiago da Silva
Lucas Bortolotto
Samuel Cavalli

Universidade Federal do Paraná

1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

F) MODOS ASSUMIDOS

Modos Assumidos

- Assume-se a reposta de um sistema continuo da forma

coordenadas espaciais

$$\boxed{y(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\,q_i(t)}$$

funções de teste

- Sabe-se também que:

<u>Energia Cinética</u>

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t)$$

Coeficientes inerciais

<u>Energia Potencial</u>

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}q_i(t)q_j(t)$$

Coef. matriz de rigidez

Modos Assumidos – Energia Cinética e Potencial

Por exemplo, as energia cinética e potencial em uma **BARRA** são dadas por:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \;= \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\dot{q}_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\dot{q}_j(t)\right] dx$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left[\int_0^L \rho A(x)\phi_i(x)\,\phi_j(x)dx\right]}_{m_{ij}}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \;= \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{d\phi_i(x)}{dx}q_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{d\phi_j(x)}{dx}q_j(t)\right] dx$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left[\int_0^L EA(x)\phi_i'(x)\,\phi_j'(x)dx\right]}_{k_{ij}}q_i(t)q_j(t)$$

Modos Assumidos – Energia Cinética e Potencial

Por exemplo, as energia cinética e potencial em uma **VIGA** são dadas por:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \quad = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\dot{q}_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\dot{q}_j(t)\right] dx$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\boxed{\left[\int_0^L \rho A(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx\right]}}_{m_{ij}}\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx \quad = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}q_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}q_j(t)\right] dx$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\boxed{\left[\int_0^L EI(x)\phi_i''(x)\,\phi_j''(x)dx\right]}}_{k_{ij}}q_i(t)q_j(t)$$

◆ Modos Assumidos – Energia Cinética e Potencial

- Além disso, para BARRA e VIGA, as funções de teste são diferentes – dependendo também das condições de contorno, conforme abaixo:

BARRA

End Conditions of Bar	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

VIGA

End Conditions of Beam	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Fixed-free	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Free-free	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n(\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$

Modos Assumidos

Aplicando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \qquad k = 1, \ldots, n.$$

sobre a energia cinética e potencial e considerando as forças generalizadas atuando sobre o sistema, obtemos a equação de movimento do sistema não amortecido:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j = Q_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Modos Assumidos

Onde Q_i são as forças não conservativas generalizadas. Assumindo que a força externa é apresentada em forma distribuída e concentrada em x_i cujo modelo matemático é: $f(x,t)+F_i\ \delta(x-x_i),\ com\ i=1\ldots n$, isto é, n forças concentradas, cada uma delas nos pontos x_i do sistema.

Note que para definir o esforço *Fi* foi utilizado o delta de Dirac, $\delta(x-x_i)=0$ com $x \neq x_i$ e que cumpre com a relação:

$$\int_0^L \delta(x-x_i)dx = 1$$

Isso representa um esforço concentrado.

Modos Assumidos

O trabalho virtual das forças não conservativas é dado por:

$$\overline{\delta}W(t)=\int_0^L\left[f\left(x,t\right)+F_i(t)\delta(x-x_i)\right]\delta y(x,t)dx$$

$$=\int_0^L\left[f\left(x,t\right)+F_i(t)\delta(x-x_i)\right]\sum_{r=1}^{n}\phi_r(x)\delta q_r(t)dx$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left[\int_0^L\left[f(x,t)\phi_r(x)dx+\sum_{i=1}^{l}F_i(t)\phi_r(x_i)\right]\delta q_r(t)\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{n}Q_r(t)\delta q_r(t)$$

Modos Assumidos

Concluindo que a força generalizada é dada por:

$$Q_r(t) = \int_0^L f(x,t)\phi_r(x)dx + \sum_{i=1}^{l} F_i(t)\phi_r(x_i)$$

com *r = 1 a n*

Assim, matricialmente, a equação de movimento não amortecido por modos assumidos é:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\}$$

Modos Assumidos - Barra

Considere uma vibração longitudinal não uniforme, engastada – livre (em x=0 e x=l, respectivamente), com uma mola de rigidez k fixada no extremo livre e cujos dados são apresentados abaixo, encontrar a equação de movimento.

$$m(x) = \frac{6}{5} m \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$EA(x) = \frac{6}{5} EA \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Modos Assumidos - Aplicação

Solução: Da teoria do contínuo, cálculo dos modos de uma barra com engastada - livre, assume-se a seguinte função de teste ou modo assumido para o presente trabalho:

$$\phi_i(x) = \sin(2i-1)\frac{\pi x}{2L}$$

com *i = 1 a n*

Modos Assumidos - Aplicação

A energia cinética toma a forma geral:

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\dot{q}_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)\dot{q}_j(t)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_i(t)\;\dot{q}_j(t)\int_0^L m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

Modos Assumidos - Aplicação

Os coeficientes da matriz de inércia são:

$$m_{ij} = \int_0^L m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \frac{6}{5}m\int_0^L \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\sin(2i-1)\frac{\pi x}{2L}\sin(2j-1)\frac{\pi x}{2L}dx$$

com *i,j = 1 a n*

Por outro lado a energia potencial possui a seguinte expressão:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx + \frac{1}{2}k\left[y(L,t)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EA(x)\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}q_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x}q_j(t)\right]dx + \frac{1}{2}k\left[\sum_{i=1}^n \phi_i(x_L)q_i(t)\right]\left[\sum_{j=1}^n \phi_j(x_L)q_j(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n q_i(t)q_j(t)\left[\int_0^L EA(x)\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x}dx + k\phi_i(x_L)\phi_j(x_L)\right]$$

Modos Assumidos - Aplicação

Os coeficientes da matriz de rigidez:

$$k_{ij} = \int_0^L EA(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx + k\phi_i(x_L) k\phi_j(x_L)$$

$$= \frac{6}{5} EA(2i-1)\frac{\pi}{2L}(2j-1)\frac{\pi}{2L}\int_0^L \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\cos(2i-1)\frac{\pi x}{2L}\cos(2j-1)\frac{\pi x}{2L}dx + k(-1)^{i+j}$$

com *i,j = 1 a n*

Assumindo uma força externa distribuída do tipo:

$$f(x,t) = f_0 \mu(t)$$

Sendo $\mu(t)$ a função degrau e f_0 uma função constante.

Modos Assumidos - Aplicação

A força generalizada será:

$$f_r(t) = \int_0^L f(x,t)\phi_r(x)dx = f_0\mu(t)\int_0^L \sin(2r-1)\frac{\pi x}{2L}dx$$

$$= \frac{2 f_0 L}{(2i-1)}\mu(t)$$

Com as matrizes de massa (M) e rigidez (K) e com a força generalizada a equação de movimento é obtida, o que é o objetivo no exercício.

Modos Assumidos - Viga

Energia Cinética:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} m_s \left(\frac{\partial y(x_s,t)}{\partial t}\right)^2}$$

Como

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) q_i(t)$$

coordenadas generalizadas

modos assumidos

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}$$

Modos Assumidos - Resumo

$$m_{ij} = \int \rho A \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_s \phi_i(x_s)\phi_j(x_s)$$

Energia Potencial:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx + \frac{1}{2}k_i \omega(x_i,t)^2$$

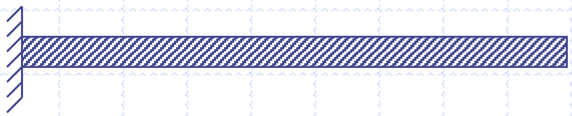
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI\phi_i''(x)\phi_j''(x)dx + k_i \phi_i(x_i)\phi_j(x_i)$$

Modos Assumidos x Coeficientes de Influência

Modos Assumidos

Sistema contínuo

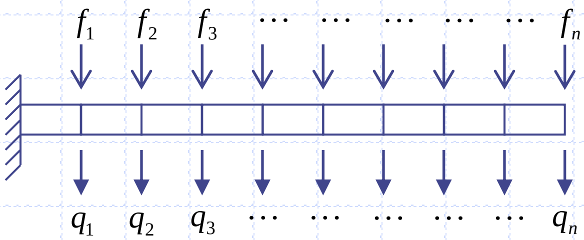


$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) q_i(t)$$

Sistema discreto

$$M_{n\times n}\ddot{q}(t)_{n\times 1} + K_{n\times n} q(t)_{n\times 1} = f(t)_{n\times n}$$

Coeficientes de Influência



$$M_{n\times n}\ddot{q}(t)_{n\times 1} + K_{n\times n} q(t)_{n\times 1} = f(t)_{n\times n}$$

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

G) PROBLEMA DE AUTOVALORES E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Problema de Autovalores

- Conforme estudado nos métodos anteriores, a equação de movimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade é dada por:

$$M\ \ddot{q}(t) + C\ \dot{q}(t) + K\ q(t) = f(t)$$

- Para obter a solução de equação diferencial homogênea, $f(t) = 0$

$$M\ \ddot{q}(t) + C\ \dot{q}(t) + K\ q(t) = 0$$

- Supondo que a solução é dada por

$$q(t) = \phi\ e^{i\Omega t}$$

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- No sistema não-amortecido ou com amortecimento proporcional, substituindo a solução na equação do sistema, tem-se

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi\, e^{i\Omega t} = 0$$

- Ou

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi = 0$$

- Sendo $\lambda = \Omega^2$, chega-se ao seguinte problema de autovalores

$$\boldsymbol{K}\,\phi_i = \lambda_i \boldsymbol{M}\,\phi_i$$

$\lambda_i \Rightarrow$ i-ésimo autovalor

$\phi_i \Rightarrow$ i-ésimo autovetor associado

$\sqrt{\lambda_i} = \Omega_i$ → frequência natural do sistema não amortecido

ϕ_i → i-ésimo modo de vibrar.

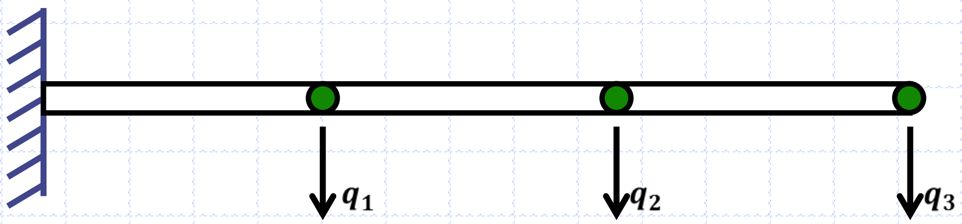
Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- As frequências naturais determinam, para o sistema não amortecido (ou com amortecimento proporcional), as frequências para as quais o sistema possui uma impedância muito baixa ou nula. Ao ser excitado nessa frequência, o sistema responderá com grande amplitude de vibração.

- Os modos de vibrar representam a forma de vibrar do sistema para cada frequência natural do mesmo.

- Quando a frequência de excitação coincide com a alguma das frequências naturais, o sistema amplificará sua vibração, predominantemente na forma de vibrar característica associada á frequência natural excitada.

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional



$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

No Matlab

$$K\phi = \lambda M\phi$$

$$[\Phi, \Lambda] = eig(K, M)$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Sendo os autovalores λ_i e λ_j distindos entre si, tem-se:

$$\lambda_i = \Omega_i^2 \Rightarrow \Omega_i^2 M \phi_i = K \phi_i$$

$$\lambda_j = \Omega_j^2 \Rightarrow \Omega_j^2 M \, \phi_j = K \phi_j$$

E premultiplicando as equações por ϕ_j^T e ϕ_i^T, respectivamente:

$$\Omega_i^2 \; \phi_j^T \; M \; \phi_i = \phi_j^T \; K \; \phi_i$$

$$\Omega_j^2 \; \phi_i^T \; M \, \phi_j = \phi_i^T \; K \; \phi_j$$

- Considerando simetria para M e K, mostra-se que:

$$\phi_i^T \; M \; \phi_j = \phi_j^T \; M \; \phi_i$$

$$\phi_i^T \; K \; \phi_j = \phi_j^T \; K \; \phi_i$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Então,

$$\left(\Omega_i^2 - \Omega_j^2\right)\phi_j^T \; M \,\phi_i = 0$$

- Com isso, se $i \neq j \rightarrow \Omega_i \neq \Omega_j$

$$\phi_j^T M \;\phi_i = 0 \qquad \phi_j^T K \;\phi_i = 0$$

- Isto é, os vetores ϕ_i e ϕ_j são <u>ortogonais</u> em relação a M e K.

- Se $i = j$

$$\phi_j^T M \;\phi_j = m_j \qquad \phi_j^T K \;\phi_j = k_j$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T M \, \Phi \qquad \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T K \, \Phi$$

- Ortogonalizando os autovetores ϕ_i por $\sqrt{m_i}$, ou seja

$$\left[\frac{\phi_1}{\sqrt{m_1}}; \ \frac{\phi_2}{\sqrt{m_2}}; \ldots; \frac{\phi_n}{\sqrt{m_n}} \right] = \Phi_o$$

- Obtêm-se, então:

$$\Phi_o^T M \ \Phi_o = [I] \qquad \Phi_o^T K \ \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Lambda$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Como o amortecimento C é proporcional → $C = \alpha\, M + \beta\, K$
- Assim,

$$\Phi_o^T C\, \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & {c_i}/{m_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_i \Omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Gamma$$

onde ξ_i e Ω_i , são a razão de amortecimento e a frequência natural, respectivamente.

- Devido os ϕ_i serem ortogonais em relação a M, C e K (para amortecimento proporcional), estes vetores podem ser usados como uma base para achar a solução do sistema.

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Supõe-se que a solução do sistema é dada por:

$$\{q(t)\} = \Phi\{p(t)\}$$

- Esta eq. representa uma transformação de coordenadas do espaço de configuração para o espaço modal através da matriz Φ
  - $\{q(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas no espaço de configuração
  - $\{p(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas principais no espaço modal do sistema;

- Aplicando esta eq. na equação do movimento e pré multiplicando tudo por Φ^T

$$[I]\ddot{p}(t) + [\Gamma]\dot{p}(t) + [\Lambda]p(t) = \Phi^T f(t)$$

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Aplicando a Tranformada de Fourier na eq. anterior, tem-se

$$\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right]P(\Omega) = \Phi^T F(\Omega)$$

- Como $Q(\Omega) = \Phi\, P(\Omega)$

- A resposta do sistema será dada por

$$\boxed{Q(\Omega) = \Phi\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right]^{-1}\Phi^T F(\Omega)}$$

$$\boxed{FRF \Rightarrow H(\Omega)}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Dado um sistema

$$M\ddot{q}(t)+C\dot{q}(t)+Kq(t)=f(t)$$

onde as matrizes M, C e K são reais e simétricas e o amortecimento C é não proporcional, assume-se que

$$\{f\}=0 \quad \text{e} \quad \{q\}=\{\phi\}\,e^{st}$$

- Então a eq. acima se torna:

$$\left[s^2M+sC+K\right]\{\phi\}=0$$

- Ou,

$$[D]\,\{\phi\}_i=0, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Para encontrar uma solução ≠ da trivial, $\phi \neq 0$, a matriz D deve ser singular, isto é

$$\det\left|D\right| = 0$$

- Isto leva à equação característica do sistema, com $2n$ raízes:

$$s^{2n} + p_1 s^{2n-1} + \ldots + p_{2n-1} s + p_{2n} = 0$$

e os coeficientes p são reais pois as matrizes M, C e K são reais.

- A solução é encontrada no espaço de estados ($2n$ dimensional), onde a variável de estado é

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Reescrevendo a equação geral em função da variável de estados

$$[C \quad M]_{n\times 2n}\dot{y}(t)_{2n\times 1} + [K \quad 0]_{n\times 2n}y(t)_{2n\times 1} = f(t)_{2n\times 1}$$

Sistema de *n* equações com *2n* incógnitas

- Então, adicionando a igualdade absoluta abaixo, forma-se um sistema de *2n* equações com *2n* incognitas:

$$[M \quad 0]_{n\times 2n}\dot{y}(t)_{2n\times 1} + [0 \quad -M]_{n\times 2n}y(t)_{2n\times 1} = 0_{2n\times 1}$$

- Portanto:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}\dot{y}(t)_{2n\times 1} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2n\times 2n}y(t)_{2n\times 1} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n\times 1}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Ou, simplificadamente

$$A\dot{y}(t)+B\,y(t)=g(t)$$

- Considerando $g(t)=0$ e supondo

$$y(t)=\theta\,e^{st}$$

- Como: $y(t)=\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \phi\,e^{st} \\ s\phi\,e^{st} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \phi \\ s\phi \end{Bmatrix}e^{st}\Rightarrow\theta=\begin{Bmatrix} \phi \\ s\phi \end{Bmatrix}$

- Assim, a equação simplificada torna-se

$$[sA+B]\theta=0$$

- Analogamente, o problema de autovalores para amortecimento geral é

$$B\theta_i=\lambda_i A\theta_i \qquad \text{e} \qquad \lambda=-s$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Se A e B são simétricos, é fácil mostrar como foi visto, que a seguinte relação de ortogonalidade é satisfeita.

$$\theta_j^T A \theta_k = a_j \delta_{jk} \qquad \delta_{jk} \Rightarrow \text{Delta de Kronecker}$$

$$\theta_j^T B \theta_k = b_j \delta_{jk} \qquad j,k = 1,\ldots,2n$$

- Ortonormalizando Θ : $\dfrac{\theta_1}{\sqrt{a_1}},\ldots,\dfrac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}$

- Chega-se a:

$$\theta_j^T A \theta_k = \delta_{jk}$$

$$\theta_j^T B \theta_k = \lambda_j \delta_{jk}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Matricialmente:

$$\Theta^T B \Theta = \Lambda \qquad \Theta^T A \Theta = I$$

- onde

$$\Theta = \left[\theta_1, \ldots, \theta_{2n}\right] \qquad \Lambda = diag\left(\lambda_i\right)$$

Matriz Modal | Matriz Espectral

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Expandindo as condições de ortogonalidade, obtemos:

$$\{\phi_j \quad s_j\phi_j\}_{1x2n}\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2nx2n}\begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k\phi_k \end{Bmatrix}_{2nx1} = \delta_{jk}$$

$$\{\phi_j \quad s_j\phi_j\}_{1x2n}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2nx2n}\begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k\phi_k \end{Bmatrix}_{2nx1} = -s_j\delta_{jk}$$

$$\phi_j^T C\,\phi_k + s_j\phi_j^T M\,\phi_k + \phi_j^T M\phi_k s_k = \delta_{jk}$$

$$(s_j + s_k)\phi_j^T M\,\phi_k + \phi_j^T C\phi_k = \delta_{jk}$$

$$s_j s_k\,\phi_j^T M\,\phi_k - \phi_j^T K\phi_k = -s_j\delta_{jk}$$

Se $j \neq k$, e $s_j = s_k$

$$2s_j\,\phi_j^T M\,\phi_k + \phi_j^T C\phi_k = 0$$

$$s_j = -\frac{\phi_j^T C\phi_k}{2\phi_j^T M\,\phi_k} = -\frac{c_j}{2m_j} = \frac{2\xi_j\Omega_j m_j}{2m_j}$$

$$\boxed{s_j = -\xi_j\Omega_j}$$

$$s_j^2\phi_j^T M\,\phi_k - \phi_j^T K\phi_k = 0$$

$$s_j^2 = \frac{\phi_j^T K\phi_k}{\phi_j^T M\,\phi_k} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j^2$$

$$\boxed{|s_j| = |-\lambda_j| = \Omega_j}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Resposta no domínio da frequência

- Como no espaço de estado a eq. de movimento é dada por

$$A\dot{y}(t)+By(t)=g(t)$$

- E fazendo $\boxed{\{q(t)\}=\Theta\{p(t)\}}$ e pré multiplicando por $\boxed{\Theta^T}$

$$\Theta^T A\Theta\dot{p}(t)+\Theta^T B\Theta p(t)=\Theta^T g(t)$$

- Devido as propriedades de ortogonalidade:

$$I\ \dot{p}(t)+\Lambda\ p(t)=\Theta^T g(t)$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Resposta no domínio da frequência

- Aplicando a transformada de Fourier e reorganizando a equação:

$$[i\Omega\, I + \Lambda]\,\mathrm{P}(\Omega) = \Theta^T G(\Omega)$$

- Sabendo que: $\mathrm{Y}(\Omega) = \Theta\, P(\Omega)$

- Portanto:

$$\mathrm{Y}(\Omega) = \underbrace{\Theta[i\Omega\, I + \Lambda]^{-1}\Theta^{\mathrm{T}}}_{\text{FRF (espaço de estado)}}\, G(\Omega)$$

Modos Assumidos – Discretização

- Tendo a eq. de movimento obtida por modos assumidos

$$M_{n\times n}\ddot{q}(t)_{n\times 1} + K_{n\times n}q(t)_{n\times 1} = f(t)_{n\times n}$$

Do problema de autovalores: $\boxed{\Omega_i \quad \text{e} \quad \psi_i \quad \text{, com } \psi \text{ ortogonalizado}}$

- Fazendo uma transformação de coordenadas e pré-multiplicando por Ψ^T

$$q(t) = \Psi \; p(t)$$

$$\Psi^T M \; \Psi \; \ddot{p}(t) + \Psi^T C \; \Psi \; \dot{p}(t) + \Psi^T K \Psi \; p(t) = \Psi^T F(t)$$

- Com C = amortecimento viscoso proporcional

$$\Psi^T C \Psi = \begin{bmatrix} \setminus & & \\ & 2\xi_i\Omega_i & \\ & & \setminus \end{bmatrix}$$

Modos Assumidos – Discretização

- Como: $$\Psi^T M \Psi = I \rightarrow \Psi^T M = \Psi^{-1}$$

$$\left(\Psi^T\right)^{-1} = M \Psi$$

$$\boxed{C = M \Psi \left[\ 2\xi_i\Omega_i\ \right] \Psi^T M}$$

- Devido as propriedades de ortogonalidade e aplicando a transformada de Fourier:

$$\boxed{\left[-\Omega^2 I + \left[\diagdown\ 2\xi_i\Omega_i\ \diagdown\right] i\Omega + \left[\diagdown\ \lambda_i\ \diagdown\right]\right] P(\Omega) = N(\Omega)}$$

$$P(\Omega) = D^{-1}\ \Psi^T\ F(\Omega)$$

$$D = \left[-\Omega^2 I + i\Omega\left[\diagdown\ 2\xi_i\Omega_i\ \diagdown\right] + \left[\diagdown\ \Omega_i^2\ \diagdown\right]\right]$$

Modos Assumidos – Discretização

- Portanto:

$$\boxed{Q(\Omega) = \Psi D^{-1} \Psi^T F(\Omega)}$$

- Conhecido o vetor *Q(Ω)*, o deslocamento do sistema *y(x, t)*

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) q_i(t) = \Phi(x)\, q(t)$$

$$Y(x,\Omega) = \Phi(x) \Psi D^{-1} \Psi^T F(\Omega)$$

- Forças Generalizadas

$$F_i(t) = \int_0^L f(x,t)\phi_i(x)dx + \sum_{j=1}^{l} P_j(t)\, \phi_i(x_j) \qquad \begin{array}{l} i = 1, n \\ j = 1, l \end{array}$$

Modos Assumidos – Discretização

- Se a excitação distribuída $f(x,t) = 0$ e só existe uma $P(t)$ na coordenada "x_p"

$$F_i(t) = P(t)\ \phi_i(x_p)$$

$$F = P(t)\phi(x_p) = \begin{bmatrix}\phi_1(x_p) & \phi_2(x_p) & \cdots & \phi_n(x_p)\end{bmatrix}_{n\times 1}^T P(t)_{1\times 1}$$

- $P(t)$ é uma função escalar, uma única excitação na coordenada x_p;

- Se $P(t)$ faz-se um vetor de $lx1$ e existe a possibilidade do sistema ser excitado em todos os pontos.

$$F(\Omega) = \underset{nxl}{\Phi(x_p)}\ \underset{lx1}{P(\Omega)} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{p_1}) & \phi_2(x_{p_1}) & \cdots & \phi_n(x_{p_1}) \\ \phi_1(x_{p_2}) & \phi_2(x_{p_2}) & \cdots & \phi_n(x_{p_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_{p_l}) & \phi_2(x_{p_l}) & \cdots & \phi_n(x_{p_l}) \end{bmatrix}_{nxl}^T P(\Omega)_{nxl}$$

Modos Assumidos – Discretização

- Portanto:

$$Y(x,\Omega) = \Phi(x)\Psi D^{-1}\Psi^T F(\Omega)$$

$$\boxed{Y(x,\Omega) = \Phi(x)\Psi D^{-1}\Psi^T \Phi^T(x_p)P(\Omega)}$$

Modos Assumidos – Discretização – SISO

- Neste tipo de sistema

$$P(\Omega)\,\text{ou}\,P(t)\,\text{escalar} \qquad \overset{\text{SISO}}{\Phi\left(x_p\right)} = \text{matriz}_{nx1}$$

$$\Phi(x) = \left[\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)\right]_{1\times n}$$

- A resposta é obtida em qualquer ponto da estrutura;
- Para um ponto especifico de resposta x_R

$$\boxed{Y(x_R,\Omega) = \Phi(x_R)\,\Psi\,D^{-1}\Psi^T\;\Phi^T\left(x_p\right)P(\Omega)}$$

$$\boxed{\alpha(\Omega)_{\left[x_p,x_R\right]} = \Phi(x_R)\,\Psi\,D^{-1}\Psi^T\;\Phi^T\left(x_p\right)}$$

Modos Assumidos – Discretização – MIMO

- Vamos supor que o sistema contínuo, de variável x, tem sido discretizado em l ponto. Então:

$$\Phi^T\left(x_p\right)=\begin{bmatrix}\phi_1\left(x_{p_1}\right) & \phi_2\left(x_{p_1}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_1}\right)\\ \phi_1\left(x_{p_2}\right) & \phi_2\left(x_{p_2}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_2}\right)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1\left(x_{p_l}\right) & \phi_2\left(x_{p_l}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_l}\right)\end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{\Phi\left(x_R\right)=\begin{bmatrix}\phi_1\left(x_{p_1}\right) & \phi_2\left(x_{p_1}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_1}\right)\\ \phi_1\left(x_{p_2}\right) & \phi_2\left(x_{p_2}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_2}\right)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1\left(x_{p_l}\right) & \phi_2\left(x_{p_l}\right) & \cdots & \phi_n\left(x_{p_l}\right)\end{bmatrix}=\Phi\left(x_p\right)}$$

$$\left\{\hat{Y}(\Omega)\right\}=\boxed{\Phi_{l\times n}\Psi}D^{-1}\Psi^T\Phi^T_{n\times l}P(\Omega)_{l\times 1}$$

Matriz de autovetores do sistema que é igual ao produto dos autovetores do sistema auxiliar e os modos assumidos

$$\boxed{\alpha(\Omega)_{\left[x_p,x_R\right]}=linha_{x_R}\left[\Phi\left(x_R\right)\right]\Psi D^{-1}\Psi^T coluna_{x_p}\left[\Phi\left(x_p\right)\right]}$$

Parâmetros Modais - RESUMO

- Parâmetros Modais que representam um sistema
  - Matriz espectral → Λ
  - Matriz Modal → Φ ou Θ;

- Para sistemas não amortecidos ou com amortecimento proporcional:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{ni} & \phi_{ni} & \phi_{ni} \end{bmatrix}$$

- Para sistemas com amortecimento geral:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & s_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{ni} & \phi_{ni} & \phi_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1\phi_{11} & s_2\phi_{12} & s_3\phi_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_i\phi_{ni} & s_i\phi_{ni} & s_i\phi_{ni} \end{bmatrix}$$

Resposta no domínio da Frequência

A FRF do sistema é dada por

$$H(\Omega) = \widehat{\Theta}\left[\widehat{D}(\Omega)\right]^{-1}\widehat{\Theta}^{T}$$