

CAP. 11 ESCOAMENTO 2D DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL: Esp. da

MASSA e de ~~energia~~ Navier-Stokes

~~ESTE SE LE E ANO SE LER 9~~

ESTE CAPÍTULO ENVOLVERÁ:

• EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA:

* MASSA $\rightarrow \rho(x, y)$

* Q.M.L. $x \rightarrow u(x, y)$

* Q.M.L. $y \rightarrow v(x, y)$

} INCOGNITAS

• PROPRIEDADES CONSTANTES: ρ e μ

• FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO:

* UDS ^{e CDS} \rightarrow TERMOS ADVECTIVOS

* CDS \rightarrow n DIFUSIVOS E β

• VOLUMES FICTÍCIOS

• MALHA UNIFORME EM CADA DIREÇÃO

• ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE: SIMPLEC

• SOLVER: GAUSS-SEIDEL

• TEMPO É USADO COMO PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO OU PARA OBTER O TRANSIENTE

• SOLUÇÃO SEGREGADA DAS EQUAÇÕES

• ARRANJO CO-LOCALIZADO DE VARIÁVEIS

10

8.1 MODELO MATEMÁTICO

Considerações:
 • esc. laminar bidimensional
 • fluido incompressível

EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA (MASSA):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (8.1)$$

EQ. DE CONS. DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO x (R.M. x):

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} \quad (8.2)$$

EQ. DE CONS. DA QUANT. DE MOV. LINEAR NA DIREÇÃO y (R.M. y):

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} - B \quad (8.3)$$

ONDE

x, y = COORDENADAS ESPACIAIS (VARIÁVEIS INDEPENDENTES)

t = COORDENADA TEMPORAL (VARIÁVEL INDEPENDENTE)

ρ = MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO

u, v = COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE \vec{V} NAS DIREÇÕES x E y

p = PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO

μ = VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO

B = TERMO FONTE

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$u(0, y) = \cancel{u(0, y)} \quad u(1, y) = u(x, 0) = 0 \quad (8.4)$$

$$u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \quad (8.5)$$

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \quad (8.6)$$

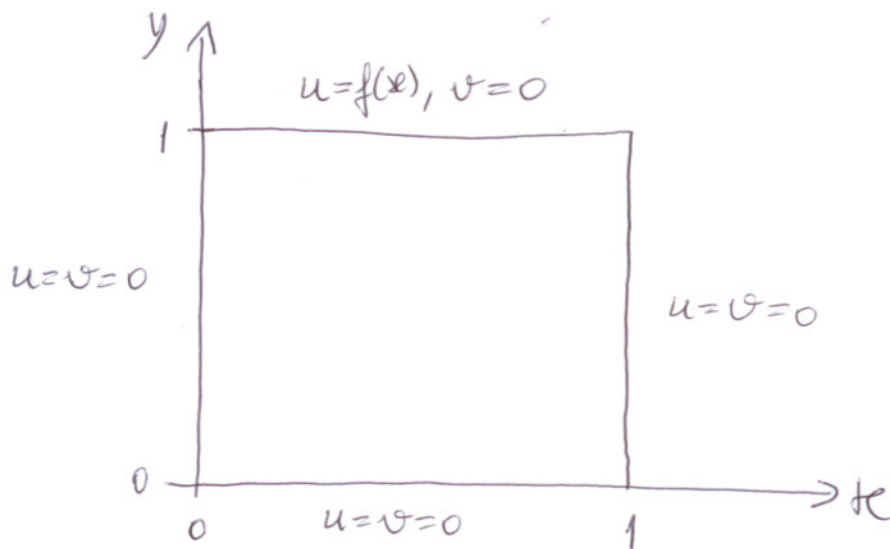


Fig. 8.1 Domínio de cálculo e c.c.

As equações (8.1) a (8.3) podem ser representadas por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = P\phi + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S\phi \quad (8.7)$$

onde

Equação	ϕ	$P\phi$	$S\phi$	(8.8)
MASSA	1	0	0	

G.M. x	u	$-\frac{\partial p}{\partial x}$	0	(8.9)
--------	---	----------------------------------	---	-------

G.M. y	v	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	0 -B	(8.10)
--------	---	----------------------------------	-----------------	--------

8.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

PARA O TERMO FONTE B DADO POR SHIH et al. (1989), ^[p. 195] A SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES (8.1) A (8.3), PARA REGIME PERMANENTE, COM ρ E μ CONSTANTES, É

$$u(x,y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (8.11)$$

$$v(x,y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (8.12)$$

E $p(x,y)$ É DADO POR SHIH et al. (1989), p. 195.

8.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

A INTEGRAÇÃO DA ED. (8.7) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 8.2 ~~É DADA POR~~ É DADA POR

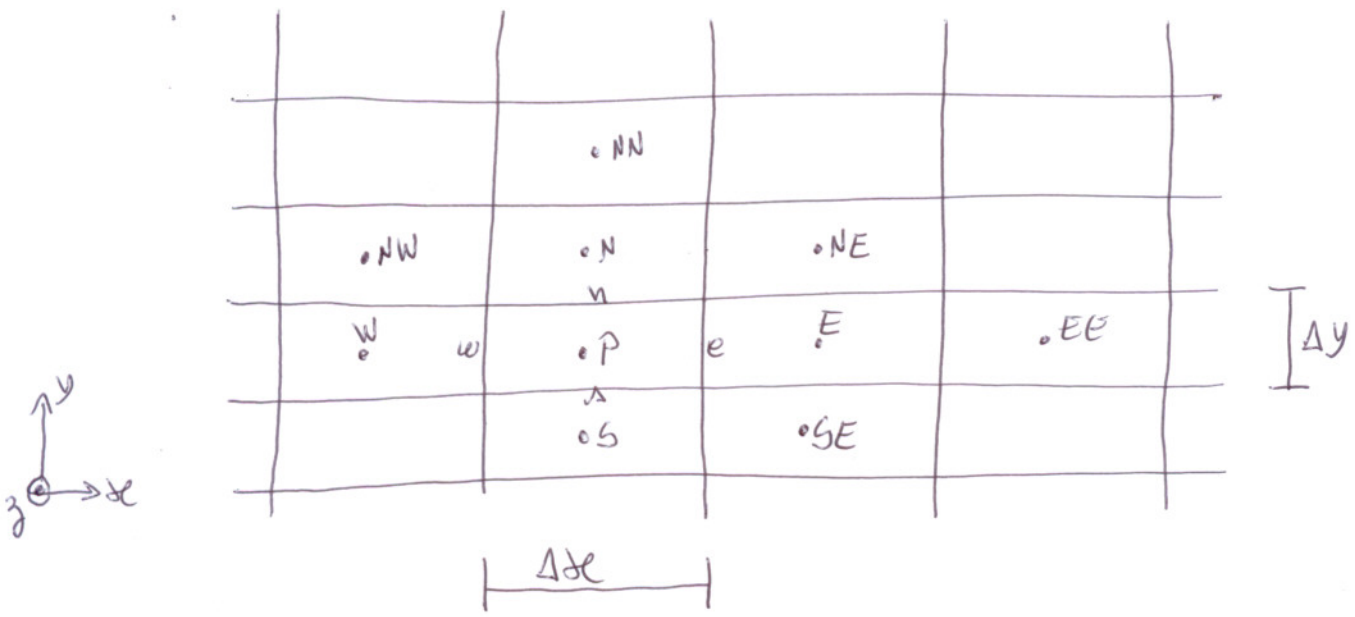


Fig. 8.2 MALHA 2D UNIFORME EM CADA DIREÇÃO.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right] dx dy dz dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\rho \phi + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S \phi \right] dx dy dz dt \tag{8.13}$$

QUE RESULTA EM

$$[(\rho \phi)_p - (\rho \phi)_p] \Delta x \Delta y \Delta z + [(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w] \Delta y \Delta z \Delta t + [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] \Delta x \Delta z \Delta t =$$

$$L[\rho \phi]_p \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + \left[(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x})_e - (\mu \frac{\partial \phi}{\partial x})_w \right] \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$+ \left[(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y})_n - (\mu \frac{\partial \phi}{\partial y})_s \right] \Delta x \Delta z \Delta t + L[S \phi]_p \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \tag{8.14}$$

ONDE $L[\phi^0]_p$ e $L[\phi^0]_p$ REPRESENTAM AS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS DE ϕ^0 E ϕ^0 NO VOLUME P; ϕ^0 É AVALIADO NO INSTANTE DE TEMPO ANTERIOR ($t-\Delta t$), E ϕ_p EM t (FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA).

DIVIDINDO TODA A EQ. (P.14) POR Δt E CONSIDERANDO QUE

• ρ E μ SÃO CONSTANTES,

• $M_p = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ (MASSA DO VOLUME DE CONTROLE P) (P.15)

• $\dot{M}_e = \rho u_e \Delta y \Delta z$ (FLUXO DE MASSA NA FACE LESTE) (P.16)

• $\dot{M}_w = \rho u_w \Delta y \Delta z$ (" " " " " OESTE) (P.17)

• $\dot{M}_n = \rho v_n \Delta x \Delta z$ (" " " " " NORTE) (P.18)

• $\dot{M}_s = \rho v_s \Delta x \Delta z$ (" " " " " SUL) (P.19)

OBTEM-SE

$$\frac{M_p}{\Delta t} (\phi_p - \phi_p^0) + \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s = \left\{ L[\phi^0]_p + L[\phi^0]_p \right\} \Delta x \Delta y \Delta z + \mu \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta z + \mu \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta z \quad (P.20)$$

Aproximação dos termos viscosos com CDS:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &\approx \frac{(\phi_e - \phi_p)}{\Delta x} & (P.21) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w &\approx \frac{(\phi_p - \phi_w)}{\Delta x} & (P.22) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n &\approx \frac{(\phi_n - \phi_p)}{\Delta y} & (P.23) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s &\approx \frac{(\phi_p - \phi_s)}{\Delta y} & (P.24) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{aprox. eqs. (P.21) a (P.24)} \\ \text{P/4 e P} \end{array}$$

Aproximação dos termos de pressão com CDS:

$$L[P^u]_p = L\left[-\frac{\partial p}{\partial x}\right]_p \approx -\frac{(p_E - p_W)}{2\Delta x} \quad (8.25)$$

$$L[P^v]_p = L\left[-\frac{\partial p}{\partial y}\right]_p \approx -\frac{(p_N - p_S)}{2\Delta y} \quad (8.26)$$

Aproximação dos termos advectivos com UDS:

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e)\phi_p + (1/2 - \alpha_e)\phi_E \quad (8.27)$$

$$\phi_w = (1/2 + \alpha_w)\phi_w + (1/2 - \alpha_w)\phi_p \quad (8.28)$$

$$\phi_n = (1/2 + \alpha_n)\phi_p + (1/2 - \alpha_n)\phi_N \quad (8.29)$$

$$\phi_s = (1/2 + \alpha_s)\phi_s + (1/2 - \alpha_s)\phi_p \quad (8.30)$$

~~idem eq. (6.12) a (6.15) p. 4 e 5~~

onde

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \text{sign}(u_e) \quad (8.31)$$

$$\alpha_w = \frac{1}{2} \text{sign}(u_w) \quad (8.32)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \text{sign}(v_n) \quad (8.33)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \text{sign}(v_s) \quad (8.34)$$

~~idem eqs (6.16) a (6.19)~~

Com as Eqs. ~~(8.21) a (8.24)~~ e ~~(8.27) a (8.30)~~ em (8.20), obtêm-se

$$\frac{M_p(\phi_p - \phi_p^o)}{\Delta t} + \dot{M}_e[(1/2 + \alpha_e)\phi_p + (1/2 - \alpha_e)\phi_E] - \dot{M}_w[(1/2 + \alpha_w)\phi_w + (1/2 - \alpha_w)\phi_p]$$

$$+ \dot{M}_n[(1/2 + \alpha_n)\phi_p + (1/2 - \alpha_n)\phi_N] - \dot{M}_s[(1/2 + \alpha_s)\phi_s + (1/2 - \alpha_s)\phi_p] = \{L[P^u]_p + L[S^v]_p\} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$+ u \frac{(\phi_w + \phi_E - 2\phi_p)}{\Delta x} \Delta y \Delta z + v \frac{(\phi_s + \phi_N - 2\phi_p)}{\Delta y} \Delta x \Delta z$$

~~idem eq. (8.36)~~ (8.35)

que pode ser reescrita como

$$a_p^v \phi_p^* = a_w^v \phi_w^* + a_e^v \phi_e^* + a_n^v \phi_s^* + a_n^v \phi_n^* + b_p^\phi \quad (8.36)$$

inside $P=2, 3, \dots, N-1$ contour $N=N_x$ ou N_y

$$a_w^v = \dot{M}_w (1/2 + \alpha_w) + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (8.37)$$

$$a_e^v = -\dot{M}_e (1/2 - \alpha_e) + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (8.38)$$

$$a_n^v = \dot{M}_n (1/2 + \alpha_n) + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \quad (8.39)$$

$$a_n^v = -\dot{M}_n (1/2 - \alpha_n) + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \quad (8.40)$$

$$a_p^v = a_w^v + a_e^v + a_n^v + a_n^v + \frac{M_p}{\Delta t} \quad (8.41)$$

$$b_p^\phi = b_t^\phi + b_p^\psi + b_p^{s\phi} \quad (8.42)$$

inside

$$b_t^\phi = \frac{M_p}{\Delta t} \phi_p^0 \quad (8.43)$$

$$b_p^u = -\frac{(P_e^* - P_w^*) \Delta y \Delta z}{2} \quad (8.44)$$

$$b_p^v = -\frac{(P_n^* - P_s^*) \Delta x \Delta z}{2} \quad (8.45)$$

$$b^{s^u} = 0 \quad (8.46)$$

$$b^{s^v} = L[s^v]_p \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.47)$$

As eqs. (8.36) a (8.47) valem para os volumes reais.

A aplicação das condições de contorno de DIRICHLET, dadas nas eqs. (8.4) a (8.6), deve seguir a técnica de VOLUMES FICTÍCIOS explicada ~~na seção~~ abaixo para o contorno norte.

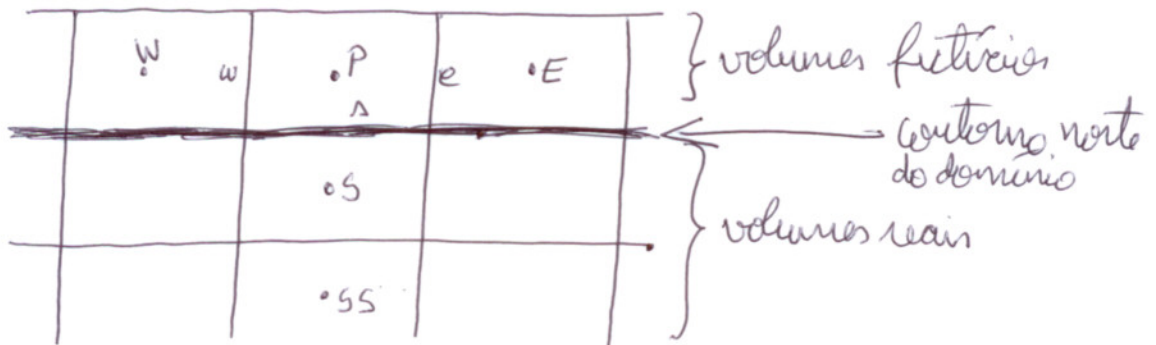


Fig. 8.3 Aplicação do C.C. c/volumes fictícios no contorno norte.

$$\frac{(\phi_P + \phi_S) = \phi_{\Delta}}{2} \quad \text{valor } \phi_{c.c.} \text{ (conhecido)}$$
(8.48)

ou

$$\phi_P = -\phi_S + 2\phi_{c.c.}$$
(8.49)

que na forma da eq. (8.36) resulta em

$$a_P^v = 1, \quad a_w^v = a_e^v = a_n^v = 0, \quad a_s^v = -1, \quad b_P^v = 2\phi_{c.c.}$$
(8.50)

8.4 DISCRETIZAÇÃO DA MASSA

A discretização da eq. de conservação da massa, eq. (8.1), segue as eqs. (8.13) a (8.20), considerando as relações dadas na eq. (8.8), obtêm-se

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0$$
(8.51)

ou, com as eqs. (8.16) a (8.19),

$$\cancel{\rho u_e \Delta y \Delta z} - \cancel{\rho u_w \Delta y \Delta z} + \cancel{\rho v_n \Delta x \Delta z} - \cancel{\rho v_s \Delta x \Delta z} = 0$$

ou, ainda,

$$u_e \Delta y - u_w \Delta y + v_n \Delta x - v_s \Delta x = 0 \quad (8.52)$$

Aproximações das velocidades nas faces com o método SIMPLEX:

$$u_e = u_e^* - d_e (P'_E - P'_A) \quad (8.53)$$

$$u_w = u_w^* - d_w (P'_P - P'_W) \quad (8.54)$$

$$v_n = v_n^* - d_n (P'_N - P'_A) \quad (8.55)$$

$$v_s = v_s^* - d_s (P'_P - P'_S) \quad (8.56)$$

onde d_i é o coeficiente do método SIMPLEX,

com as eqs. (8.53) a (8.56) em (8.52),

$$[u_e^* - d_e (\overline{P'_E} - \overline{P'_A})] \Delta y - [u_w^* - d_w (\overline{P'_P} - \overline{P'_W})] \Delta y + [v_n^* - d_n (\overline{P'_N} - \overline{P'_A})] \Delta x - [v_s^* - d_s (\overline{P'_P} - \overline{P'_S})] \Delta x = 0$$

ou

$$\boxed{a_P^P P'_P = a_w^P P'_W + a_e^P P'_E + a_s^P P'_S + a_n^P P'_N + b_P^P} \quad (8.57)$$

onde

$$[P=2, 3, \dots, N-1 \text{ com } N=N_x \text{ ou } N_y]$$

$$a_w^P = d_w \Delta y \quad (8.58)$$

$$a_e^P = d_e \Delta y \quad (8.59)$$

$$a_s^P = d_s \Delta x \quad (8.60)$$

$$a_n^P = d_n \Delta x \quad (8.61)$$

$$a_p^p = a_w^p + a_e^p + a_s^p + a_n^p \quad (8.62)$$

$$b_p^p = (u_w^* - u_e^*) \Delta y + (v_s^* - v_n^*) \Delta x \quad (8.63)$$

Observe que a eq. (8.63), de b_p^p , é a própria eq. de conservação da massa, eq. (8.52), multiplicada por (-1).

As Eqs. (8.57) a (8.63) valem para os volumes leais.

Não é necessário aplicar C.C. de pressão na metodologia que se está usando, exceto se for necessário preservar a pressão em algum contorno.

Mas, para facilidade na implementação do programa e devido à necessidade da pressão nos volumes fictícios nas eqs. (8.44) e (8.45), será utilizada extrapolação linear da pressão nos 4 contornos: ~~INDICAR AS C.C. matemáticas~~

CONTORNO ESQUERDO ($P=1 \text{ em } x$):
$$P_P^i = P_E^i - (P_{EE}^i - P_E^i) \quad (8.64)$$

ou na forma da eq. (8.57),

$$a_p^p = a_e^p = 1, \quad a_w^p = a_s^p = a_n^p = 0, \quad b_p^p = -(P_{EE}^i - P_E^i) \quad (8.65)$$

CONTORNO DIREITO ($P=N_x$):
$$P_P^i = P_W^i + (P_W^i - P_{WW}^i) \quad (8.66)$$

ou
$$a_p^p = a_w^p = 1, \quad a_e^p = a_s^p = a_n^p = 0, \quad b_p^p = (P_W^i - P_{WW}^i) \quad (8.67)$$

CONTORNO SUL ($P=1 \text{ em } y$):
$$P_P^i = P_N^i - (P_{NN}^i - P_N^i) \quad (8.68)$$

ou
$$a_p^p = a_n^p = 1, \quad a_w^p = a_e^p = a_s^p = 0, \quad b_p^p = -(P_{NN}^i - P_N^i) \quad (8.69)$$

CONTORNO NORTE ($P=N_y$):
$$P_P^i = P_S^i + (P_S^i - P_{SS}^i) \quad (8.70)$$

ou
$$a_p^p = a_s^p = 1, \quad a_w^p = a_e^p = a_n^p = 0, \quad b_p^p = (P_S^i - P_{SS}^i) \quad (8.71)$$

8.5 ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE COM O MÉTODO SIMPLEX

Seguindo o procedimento apresentado na seção 7.4 das notas de aula, obtêm-se

$$U_P = U_P^* - d_P^u \frac{(P_E - P_W)}{2} \quad \left. \vphantom{U_P} \right\} \begin{array}{l} \text{volumes} \\ \text{reais} \end{array} \quad (8.72)$$

$$V_P = V_P^* - d_P^v \frac{(P_N - P_S)}{2} \quad (8.73)$$

onde

$$d_P^u = \frac{\Delta y \Delta z}{(a_P^v - \sum a_{nb}^v)} \quad (8.74)$$

$$d_P^v = \frac{\Delta x \Delta z}{(a_P^u - \sum a_{nb}^u)} \quad (8.75)$$

$$\sum a_{nb}^v = a_w^v + a_e^v + a_n^v + a_s^v \quad (8.76)$$

Com as eqs. (8.41), (8.76) e (8.15) nas eqs. (8.74) e (8.75), chega-se a

$$\boxed{d_P^u = \frac{\Delta t}{\rho \Delta x}} \quad (8.77)$$

$$\boxed{d_P^v = \frac{\Delta t}{\rho \Delta y}} \quad (8.78)$$

onde d_P^u e d_P^v são os coeficientes do método SIMPLEX para as velocidades nodais. Eles são necessários apenas para os volumes reais.

8.6 CÁLCULO DAS VELOCIDADES NAS FACES DOS VOLUMES DE CONTROLE

As velocidades u_e, u_w, v_n e v_s que aparecem nos coeficientes e fontes das eqs. da M. e da MASSA, são obtidas através de cálculos diretos, conforme deduz-se a seguir.

Reescrevendo a eq. (8.36) para o volume de controle P e $\phi = u$,

$$(a_p^v)_P u_p^* = \sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_P + \frac{M_P}{\Delta t} u_p^o - \frac{(p_E^* - p_W^*)}{2} \Delta y \Delta z \quad (8.79)$$

e para o volume de controle E:

$$(a_p^v)_E u_e^* = \sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_E + \frac{M_E}{\Delta t} u_e^o - \frac{(p_{EE}^* - p_P^*)}{2} \Delta y \Delta z \quad (8.80)$$

onde

$$\sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_P = (a_w^v)_P u_w^* + (a_e^v)_P u_e^* + (a_s^v)_P u_s^* + (a_n^v)_P u_n^* \quad (8.81)$$

$$\sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_E = (a_w^v)_E u_w^* + (a_e^v)_E u_{EE}^* + (a_s^v)_E u_{SE}^* + (a_n^v)_E u_{NE}^* \quad (8.82)$$

A velocidade na face leste de cada volume de controle P, u_e^* , é obtida ^{por uma espécie de} pela ~~media aritmética~~ ^{media aritmética} das eqs. (8.79) e (8.80), ~~este no termo de pressão~~, resultando em

$$\frac{[(a_p^v)_P + (a_p^v)_E]}{2} u_e^* = \frac{[\sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_E]}{2} + \frac{(M_P + M_E) u_e^o}{2 \Delta t} - (p_E^* - p_P^*) \Delta y \Delta z$$

ou

$$u_e^* = \frac{[\sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb}^v u_{nb}^*)_E + \frac{(M_P + M_E) u_e^o}{\Delta t} - 2(p_E^* - p_P^*) \Delta y \Delta z]}{[(a_p^v)_P + (a_p^v)_E]} \quad (8.83)$$

$$P = 2, 3, \dots, N_x - 2$$

$$P = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

Para o problema em consideração, Eqs. (8.4) e (8.5), a velocidade u_e^* é nula nos contornos, isto é,

$$u_e^* = 0 \quad (P=1 \text{ e } N_x-1) \quad (8.84)$$

~~Os seguintes passos~~

Reescrevendo a eq. (8.36) para o volume de controle P e $\phi = \vartheta$,

$$(a_p^v)_P \vartheta_P^* = \sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_P + \frac{M_P \vartheta_P^o}{\Delta t} - \frac{(P_N^* - P_S^*) \Delta x \Delta z}{2} + L[S^v]_P \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.85)$$

e para o volume de controle N:

$$(a_p^v)_N \vartheta_N^* = \sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_N + \frac{M_N \vartheta_N^o}{\Delta t} - \frac{(P_N^* - P_P^*) \Delta x \Delta y}{2} + L[S^v]_N \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.86)$$

onde

$$\sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_P = (a_w^v)_P \vartheta_W^* + (a_e^v)_P \vartheta_E^* + (a_s^v)_P \vartheta_S^* + (a_n^v)_P \vartheta_N^* \quad (8.87)$$

$$\sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_N = (a_w^v)_N \vartheta_{NW}^* + (a_e^v)_N \vartheta_{NE}^* + (a_s^v)_N \vartheta_P^* + (a_n^v)_N \vartheta_{NN}^* \quad (8.88)$$

A velocidade na face norte de cada volume de controle P, ϑ_n^* , ~~é obtida pela média aritmética das eqs. (8.85) e (8.86), exceto no termo de pressão, resultando em~~ de forma análoga a u_e^* , com as eqs. (8.85) e (8.86), resulta em

$$\frac{[(a_p^v)_P + (a_p^v)_N] \vartheta_n^*}{2} = \frac{[\sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_P + \sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_N]}{2} + \frac{(M_P + M_N) \vartheta_n^o}{2 \Delta t} - \frac{(P_N^* - P_P^*) \Delta x \Delta z}{2} + \frac{(L[S^v]_P + L[S^v]_N) \Delta x \Delta y \Delta z}{2}$$

ou

$$\vartheta_n^* = \frac{[\sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_P + \sum (a_{nb}^v \vartheta_{NB}^*)_N + \frac{(M_P + M_N) \vartheta_n^o}{\Delta t} - 2(P_N^* - P_P^*) \Delta x \Delta z + (L[S^v]_P + L[S^v]_N) \Delta x \Delta y \Delta z]}{[(a_p^v)_P + (a_p^v)_N]} \quad (8.89)$$

$$P = 2, 3, \dots, N_y - 2$$

$$P = 2, 3, \dots, N_x - 1$$

Para o problema em consideração, Eqn. (8.6), a velocidade v_n^* é nula nos contornos, isto é,

$$v_n^* = 0 \quad (P=1 \text{ e } N_y-1) \quad (8.90)$$

Os coeficientes do método SIMPLEX para as Eqn. (8.53) a (8.56) são dados por

$$(d_e)_p = \frac{(d_p^u + d_E^u)}{2} \quad [P=2, 3, \dots, N_x-2] \quad (8.91)$$

$$(d_w)_p = (d_e)_w \quad (8.92)$$

$$(d_n)_p = \frac{(d_p^v + d_N^v)}{2} \quad [P=2, 3, \dots, N_y-2] \quad (8.93)$$

$$(d_n)_p = (d_n)_s \quad (8.94)$$

Nos contornos,

$$d_e = 0 \quad [P=1 \text{ e } N_x-1] \quad (8.95)$$

$$d_n = 0 \quad [P=1 \text{ e } N_y-1] \quad (8.96)$$

[ver também eqs. - outros caps.]

8.7 ALGORITMO

① LER OS DADOS: $N_x, N_y, \Delta t, \mu, \rho, C.C. \text{ e fonte } S^v$, I_v, I_p, I_t, I_M

ONDE

$I_v =$ n.º de iterações internas para u^* e v^*	} dentro do Gauss-Seidel
$I_p =$ " " " " " p'	
$I_t =$ " " " total	
$I_M =$ " " " no ciclo da massa	

② INICIALIZAÇÕES:

• calcular Δx e Δy com as eqs. (6.31) e (6.32) e fazer $\Delta z = 1 \text{ m}$.

• fazer $\phi_p = \phi_p^o = \phi_p^{\text{exato}}$ (8.97)

$$\phi_p = u_p, v_p, p_p$$

$$p_p^i = u_e = u_e^o = v_n = v_n^o = 0 \quad (8.98)$$

③ Calcular os coeficientes e fontes de u_p^* e v_p^* (eles são iguais), com as eqs. (8.37) a (8.41) nos volumes reais

④ Calcular os fontes de u_p^* , com as eqs. (8.42), (8.44) e (8.46),

⑤ calcular os coeficientes e fontes de u_p^* para os volumes fictícios

⑥ resolver o sistema da eq. (8.36) para u_p^* com o método de Gauss-Seidel, eq. (4.11), fazendo I_v iterações

⑦ calcular os fontes de v_p^* com as eqs. (8.42), (8.43), (8.45) e (8.47)

⑧ calcular os coeficientes e fontes de v_p^* para os volumes fictícios

⑨ resolver o sistema da eq. (8.36) para v_p^* com o método de Gauss-Seidel, eq. (4.11), fazendo I_v iterações

⑩ calcular as velocidades u_e^* e v_n^* , com as eqs. (8.83) e (8.84), só nas faces internas do domínio de cálculo

⑪ calcular os coeficientes do SIMPLEC (d_p^u, d_p^v, d_e, d_n)

⑫ calcular os coeficientes e fontes de p_p^i com as eqs. (8.58) a (8.63), nos volumes reais

⑬ calcular os coeficientes e fontes de p_p^i para os volumes fictícios, eqs. (8.65), (8.67), (8.69) e (8.70)

⑭ resolver o sistema da eq. (8.57) para p_p^i com o método de Gauss-Seidel, eq. (4.11), fazendo I_p iterações

(15) obter p_p ao corrigir p_p^* com p_p^i através de

$$p_p = p_p^* + p_p^i \quad (8.99)$$

e aplicar as eqs. (8.64), (8.66), (8.68)* e (8.70) para p_p (e não p_p^i)

(16) obter u_p e v_p ao corrigir as velocidades u_p^* e v_p^* com p_p^i através das eqs. (8.72) e (8.73), nos volumes reais.

(17) aplicar as C.C. para obter u_p e v_p nos fictícios

(18) obter u_e e v_n ao corrigir as velocidades u_e^* e v_n^* com p_p^i através das eqs. (8.53) e (8.55), nas faces internas do domínio de cálculo

(19) atualizar os campos ~~de~~ para novo avanço no tempo:

$$\left. \begin{aligned} u_p^0 &= u_p, & u_e^0 &= u_e, & v_p^0 &= v_p, & v_n^0 &= v_n, \end{aligned} \right\} \quad (8.100)$$

(20) voltar ao passo (3) até atingir I_t

(21) escrever os campos de u_p , u_e , v_p , v_n , p_p , p_p^i , b_p^p

(22) visualizar os resultados

OBSERVAÇÕES:

• O ciclo ^{da malha} entre os passos (12) e (18), pode ser repetido por 2 ou 3 iterações (I_H) para acelerar ou garantir a convergência do processo iterativo

• para se obter o transiente, é necessário incluir um critério de convergência para verificar quando o ciclo entre os passos (3) a (19) está convergindo num determinado instante de tempo

10.8 ~~ALTERAÇÃO PARA~~ CDS COM CORREÇÃO ADIADA

Para usar o esquema CDS nos termos advection da QML em x e y , através de correção adiada, basta reescrever a Eq. (10.42) como

$$b_P^\phi = b_E^\phi + b_P^\phi + b^{s\phi} + b_C^\phi \quad (10.101)$$

onde

$$b_C^\phi = B \left[\dot{M}_E \alpha_E (\phi_P^* - \phi_E^*) - \dot{M}_W \alpha_W (\phi_W^* - \phi_P^*) + \dot{M}_N \alpha_N (\phi_P^* - \phi_N^*) - \dot{M}_S \alpha_S (\phi_S^* - \phi_P^*) \right] \quad (10.102)$$

com

$$B = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{UDS} \\ > 0 \text{ e } < 1, \text{ misto} \\ \pm \rightarrow \text{CDS} \end{cases} \quad (10.103)$$

$$\phi = \mathcal{U}^{\text{(QML)}} \text{ e } \mathcal{V}^{\text{(QML)}} \quad (10.104)$$

Além disso no cálculo do \mathcal{U}_E^* (Eq. 10.83) e \mathcal{V}_{Eh}^* (Eq. 10.89) é necessário incluir dentro dos colchetes:

$$\mathcal{U}_E^*: (b_C^{\mathcal{U}})_P + (b_C^{\mathcal{U}})_E \quad (10.105)$$

$$\mathcal{V}_h^*: (b_C^{\mathcal{V}})_P + (b_C^{\mathcal{V}})_N \quad (10.106)$$