

9. CONDUÇÃO DE CALOR 0Dt e 1Dt

9.1 Modelo Matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- problema unidimensional (1D);
- regime transiente (t);
- área (A) de troca de calor constante na direção x;
- geração de calor (\dot{q});
- propriedades variáveis (ρ , c, k, \dot{q});

obtem-se

$$c \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \quad (9.1)$$

onde

T = temperatura (°C ou K), função de x e t

x = direção coordenada espacial (m)

t = coordenada temporal (s)

k = condutividade térmica (W/mK)

\dot{q} = taxa de geração de calor por volume (W/m³)

c = calor específico (J/kg.K)

ρ = massa específica (kg/m³)

A = área de troca de calor na direção x (m²)

L = comprimento do domínio de cálculo (m)

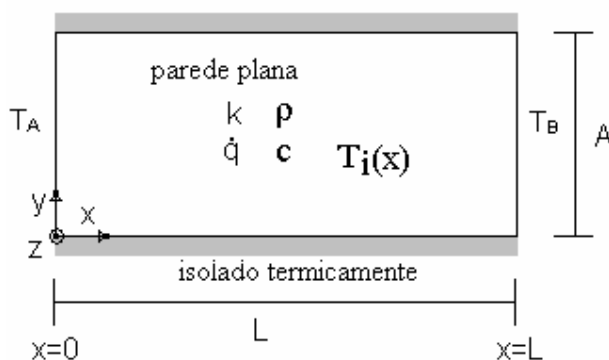


Figura 9.1: Esquema do problema físico

Condições de contorno (C.C.) do tipo Dirichlet:

$$T(0, t) = T_A \quad (9.2)$$

$$T(L, t) = T_B \quad (9.3)$$

onde T_A e T_B são valores conhecidos de T e constantes no tempo. Dependendo do problema, podem variar com t, por exemplo, radiação solar.

Condição inicial (C.I.):

$$T(x,0) = T_i(x) \text{ (função)} \quad (9.4)$$

ou seja, o campo de T em $t = 0$ é conhecido.

9.2 Variáveis de Interesse

1) $T(x,t)$, da eq.(9.1);

2) média de T em x no instante t,

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,t) dx \quad (9.5)$$

9.3 Discretização das Equações

Integrando-se a eq.(9.1) sobre o VC P da figura 9.2 e ao longo do tempo, de t a $t+\Delta t$, tem-se:

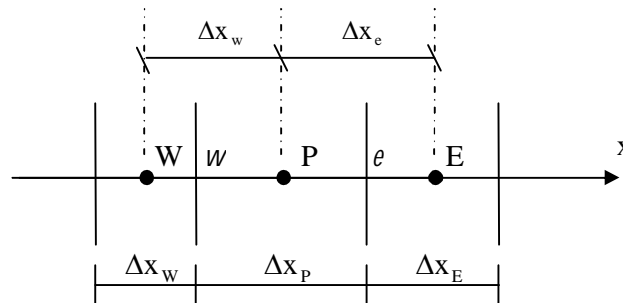


Figura 9.2: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} c \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx dt \quad (9.6)$$

já visto no Cap. 2; eq. (2.21)

Integrais espaciais:

$$\int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx \approx k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} + \dot{q}_P \Delta x_P \quad (9.7)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} c \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) dx \approx c_P \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) \right]_P \Delta x_P \quad (9.8)$$

Na eq.(9.8) está sendo admitido que todos os parâmetros são constantes em cada VC P, da mesma forma que se faz com \dot{q} .

Integrais temporais com a formulação totalmente implícita (aproximação numérica): admite-se que todos os parâmetros e T são calculados no tempo $t + \Delta t$.

$$\int_t^{t+\Delta t} [\text{eq.}(9.7)] dt \approx \left[k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} + \dot{q}_p \Delta x_p \right] \Delta t \quad (9.9)$$

onde k , T e \dot{q} são avaliados em $t + \Delta t$ (instante de tempo a determinar a solução de T).

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} [\text{eq.}(9.8)] dt &\approx \int_t^{t+\Delta t} c_p \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) \right]_P \Delta x_p dt = c_p \Delta x_p \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T)_P dt = \\ &= c_p \Delta x_p \left[(\rho T)_P^{t+\Delta t} - (\rho T)_P^t \right] = c_p \Delta x_p \left[\rho_P T_P - \rho_P^0 T_P^0 \right] \end{aligned} \quad (9.10)$$

onde c , T e ρ são avaliados em $t + \Delta t$, e T^0 e ρ^0 são avaliados no instante t (instante de tempo anterior no qual a solução de T é conhecida).

Juntando-se as eqs.(9.9) e (9.10), e dividindo-se o resultado por Δt , chega-se a

$$\frac{c_p \Delta x_p}{\Delta t} \left[\rho_P T_P - \rho_P^0 T_P^0 \right] = \frac{k_e}{\Delta x_e} (T_E - T_P) - \frac{k_w}{\Delta x_w} (T_P - T_W) + \dot{q}_p \Delta x_p \quad (9.11)$$

Com a eq.(9.11) na forma do sistema de equações

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (9.12)$$

obtém-se

$$\text{coeficientes (VC reais, } P=1 \text{ a } N) \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{k_w}{\Delta x_w} \\ a_e = \frac{k_e}{\Delta x_e} \\ a_p = a_w + a_e + \frac{c_p \Delta x_p}{\Delta t} \rho_p \end{array} \right. \quad (9.13)$$

termofonte $\left\{ b_p = \dot{q}_p \Delta x_p + \frac{c_p \Delta x_p}{\Delta t} \rho_p^0 T_p^0 \right.$

A aplicação das CC é idêntica ao que foi visto na seção 2.5, resultando em

$$P = 0: \quad a_p = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_p = 2T_A \quad (9.14)$$

$$P = N + 1: \quad a_p = 1; \quad a_w = -1; \quad a_e = 0; \quad b_p = 2T_B \quad (9.15)$$

Com a regra do retângulo na eq. (9.5), obtém-se

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L} \sum_{P=1}^N (T_P \Delta x_P) \quad (9.16)$$

9.4 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para se resolver numericamente o problema definido pelas eqs.(9.1) a (9.5) são:

1- Ler os dados: T_A , T_B , função $k(T)$, função $\dot{q}(x$ ou $T)$, função $c(T)$, função $\rho(x$ ou $T)$, função $T_i(x)$, L , N , I (nº de iterações), t_F , M e Δx_P ($P = 1$ a N), onde

t_F = instante de tempo no qual se deseja $T(x)$ ou parar o avanço em t
 M = nº de avanços no tempo entre $t = 0$ e $t = t_F$

$$2- \text{Calcular } x_e, x_p \text{ e } \Delta x_e \text{ para todos os VC } P; \text{ calcular } \Delta t = t_F/M \quad (9.17)$$

3- Fazer $t = 0$, $T_P(x,t) = T_i(x)$ e calcular ρ_P

4- Fazer $t = t + \Delta t$

5- Fazer $T_P = T_P^o$

6- Calcular k_P , \dot{q}_P , c_P , ρ_P

7- Calcular k_e

8- Calcular os coeficientes (a_w , a_e , a_p) e termos fontes (b_p)

9- Com o método TDMA, resolver o sistema de equações (9.12), obtendo T_P

10- Voltar ao item 6 até atingir I

11- Obter $\bar{T}(t)$

12- Fazer $T_P^o = T_P$ e $\rho_P^o = \rho_P$

13- Voltar ao item 4 até atingir $t = t_F$

14- Imprimir e visualizar os resultados.

9.5 Condução 0Dt

Para um objeto perdendo calor por convecção (Fig. 9.3), tem-se

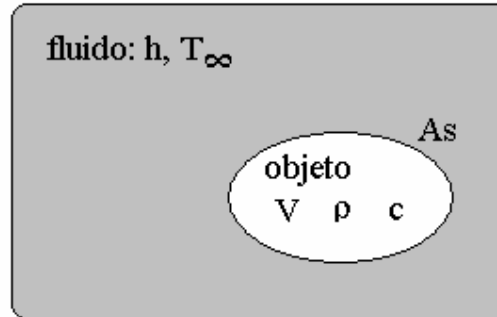


Figura 9.3: Esquema da condução 0Dt

$$\left. \begin{aligned} \rho V c \frac{dT}{dt} &= -h A_s (T - T_\infty) \\ T(0) &= T_i \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

onde

V = volume do objeto (m^3)

h = coeficiente de convecção ($W/m^2.K$)

A_s = área da superfície do objeto em contato com o fluido a T_∞ (m^2)

T_∞ = temperatura do fluido que envolve o objeto ($^{\circ}C$ ou K)

T_i = temperatura inicial do objeto, em $t = 0$

c = calor específico ($J/kg.K$)

ρ = massa específica (kg/m^3)

t = coordenada temporal (s)

O processo é transiente (t) mas não existe condução de calor interna ao objeto, portanto, seu campo de temperaturas (T) é representado por um único valor: um ponto zero-dimensional (0D).

Integrando-se a eq.(9.18) entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$, tem-se

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\rho V c \frac{dT}{dt} \right) dt = - \int_t^{t+\Delta t} h A_s (T - T_\infty) dt \quad (9.19)$$

Com a formulação totalmente implícita na eq. (9.19), chega-se a

$$\rho V c (T - T^0) = -h A_s (T - T_\infty) \Delta t$$

ou

$$T = \frac{hA_s \Delta t T_\infty + \rho V c T^0}{hA_s \Delta t + \rho V c} \quad (9.20)$$

Como não foi feita nenhuma simplificação entre as eqs. (9.18) e (9.20), todos os parâmetros da eq. (9.20) podem ser variáveis: h , A_s , V , T_∞ , c , ρ .