5. CONDUÇÃO DE CALOR 2Dp

5.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se
- problema bidimensional (2D);
- regime permanente (p);
- coordenadas cartesianas;
- propriedades constantes ($\dot{q}$, k);

obtém-se a equação diferencial do problema:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (5.1)$$

onde

T = temperatura (ºC ou K);
x, y = direções coordenadas na horizontal e vertical, respectivamente (m);
k = condutividade térmica (W/mK);
$\dot{q}$ = taxa de geração de calor por volume (W/m^3).

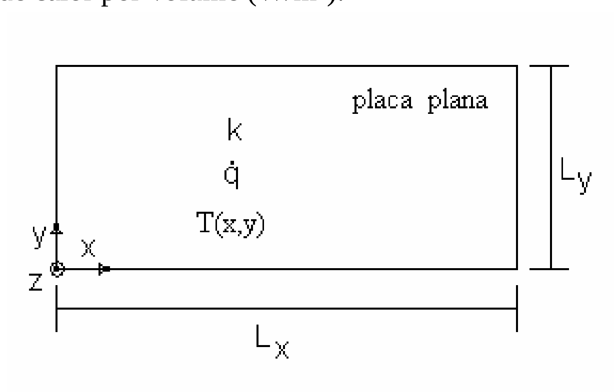


Figura 5.1: Esquema do problema físico

Condições de contorno (CC):

$$T(0,y) = T(L_x, y) = T(x,0) = 0 \qquad (5.2)$$

$$T(x, L_y) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \qquad (5.3)$$

Variáveis de interesse:

- T(x,y), da solução das eqs.(5.1) a (5.3)

- média de T(x,y):

$$\overline{T} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x,y)\, dx\, dy \tag{5.4}$$

- taxa de transferência de calor no contorno leste ($x = L_x$):

$$q_e = -k \int_0^{L_y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x, y} dy \qquad (z = 1) \tag{5.5}$$

- taxa de transferência de calor no contorno norte ($y = L_y$):

$$q_n = -k \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x, y=L_y} dx \qquad (z = 1) \tag{5.6}$$

5.2 Discretização da Equação Diferencial

Integrando-se a eq.(5.1) sobre o volume de controle (VC) P da fig.5.2, obtém-se:

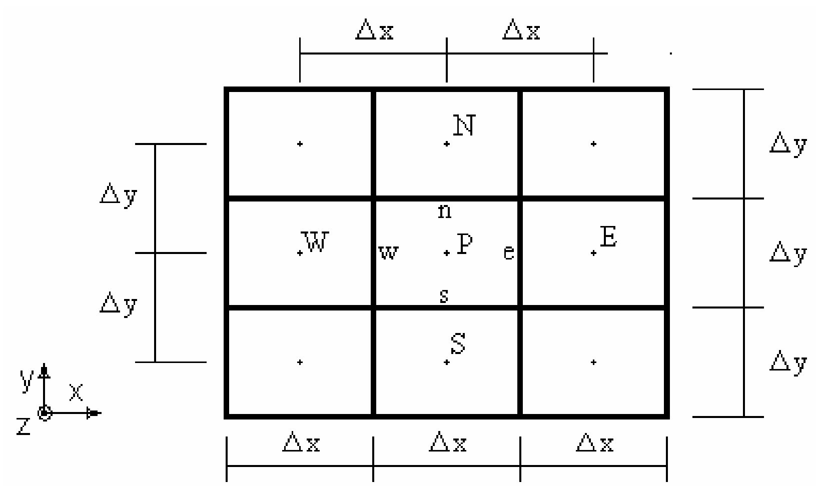


Figura 5.2: Malha 2D uniforme por direção

$$\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} \right] dx\, dy = 0 \tag{5.7}$$

ou

$$\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)}^{f} + \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)}^{g} + \frac{\dot{q}}{k} \right] dx\, dy = 0$$

ou

$$\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\dot{q}}{k}\right]dx\,dy=0$$

ou

$$\underbrace{\int_{y_s}^{y_n}\left[\int_{x_w}^{x_e}\partial f\right]}_{I_1}dy+\underbrace{\int_{x_w}^{x_e}\left[\int_{y_s}^{y_n}\partial g\right]}_{I_2}dx+\underbrace{\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left(\frac{\dot{q}}{k}\right)dx\,dy=0}_{I_3} \qquad (5.8)$$

onde

$$f=\frac{\partial T}{\partial x} \qquad e \qquad g=\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (5.9)$$

Na equação (5.8), considerando-se:
- integrais analíticas em I_1 e I_2 ;
- que $\dot{q}$ e k são constantes em todo o domínio de cálculo;
obtém-se:

$$\int_{y_s}^{y_n}(f_e-f_w)dy+\int_{x_w}^{x_e}(g_n-g_s)dx+\frac{\dot{q}}{k}\Delta x\Delta y=0$$

ou, com a eq.(5.9),

$$\int_{y_s}^{y_n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dy+\int_{x_w}^{x_e}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]dx+\frac{\dot{q}}{k}\Delta x\Delta y=0 \qquad (5.10)$$

As integrais da eq.(5.10) são resolvidas considerando-se que cada derivada seja constante ao longo de cada face do VC P, resultando em

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y+\left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x+\frac{\dot{q}}{k}\Delta x\Delta y=0 \qquad (5.11)$$

Para concluir a discretização da eq. (5.1), será considerado que T varia linearmente entre cada dois nós consecutivos, em cada direção. Assim, a eq. (5.11) resulta em:

$$\left[\left(\frac{T_E-T_P}{\Delta x}\right)-\left(\frac{T_P-T_W}{\Delta x}\right)\right]\Delta y+\left[\left(\frac{T_N-T_P}{\Delta y}\right)-\left(\frac{T_P-T_S}{\Delta y}\right)\right]\Delta x+\frac{\dot{q}}{k}\Delta x\Delta y=0$$

ou

$$\frac{(T_W+T_E-2T_P)}{\Delta x}\Delta y+\frac{(T_S+T_N-2T_P)}{\Delta y}\Delta x+\frac{\dot{q}}{k}\Delta x\Delta y=0 \qquad (5.12)$$

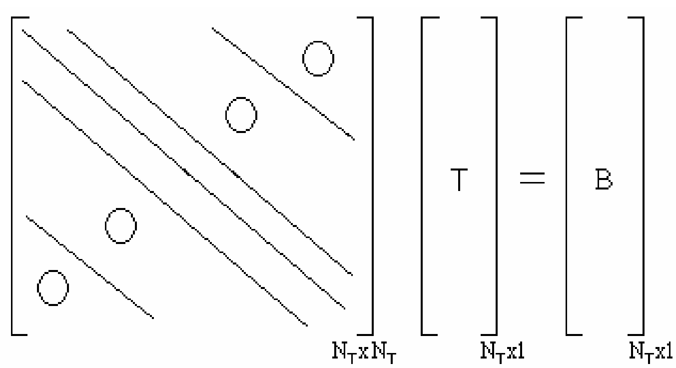
ou na forma

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + b_P \tag{5.13}$$

chega-se a

$$\left.\begin{array}{ll} \text{coeficientes (para volumes reais)} & \left\{ \begin{array}{l} a_w = a_e = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\[2ex] a_s = a_n = \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \\[2ex] a_P = a_w + a_e + a_s + a_n \end{array} \right. \\[6ex] \text{termo fonte} & \left\{ b_P = \dfrac{\dot{q}}{k}\Delta y \Delta x \right. \end{array}\right\} \tag{5.14}$$

Estrutura do sistema de equações:



ou

[A][T] = [B]

onde

A: matriz pentadiagonal (apenas 5 diagonais têm coeficientes diferentes de zero)

$$N_T = Nx_T \,.\, Ny_T = \text{número total de VC} \tag{5.15}$$

Nx_T: número de VC na direção x com 2 fictícios
Ny_T: número de VC na direção y com 2 fictícios

5.3 Aplicação das condições de contorno (CC)

As condições de contorno podem ser aplicadas com o uso de volumes fictícios da mesma forma como já foi visto para os problemas 1D. Por exemplo, para o contorno norte do domínio de cálculo:

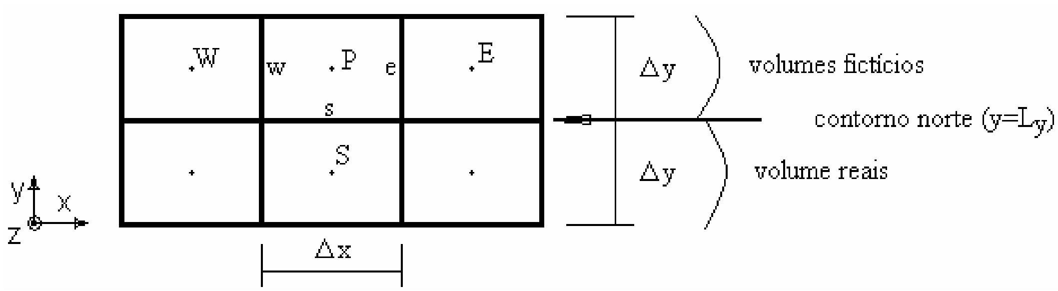


Figura 5.3: Aplicação das CC no contorno norte

$$\frac{T_P + T_S}{2} = T_s = T_{CC} \qquad \text{(valor conhecido)} \tag{5.16}$$

ou

$$T_P = -T_S + 2T_{CC} \tag{5.17}$$

onde T_{CC} pode ser função de x; neste caso, é usado seu valor no centro de cada face sul (s) de cada VC P.

Comparando-se a eq.(5.17) com a eq.(5.13), obtém-se:

$$a_P = 1; \;\; a_s = -1; \;\; a_w = a_e = a_n = 0; \;\; b_P = 2T_{CC} \tag{5.18}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado aos outros três contornos.

5.4 Gauss-Seidel

O sistema de equações representado pela equação (5.13) pode ser resolvido com o método de Gauss-Seidel, resultando em

$$T_P = \frac{\left(a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + b_P\right)}{a_P} \tag{5.19}$$

onde P = 1, 2, 3, ..., N_T (envolve todos os volumes, reais e fictícios).

5.5 Variáveis Secundárias

Através da regra do retângulo (T_P constante em cada VC P), a solução numérica da eq.(5.4) pode ser obtida com

$$\overline{T} = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{P=1}^{N_R} \left(T_P \Delta x \Delta y \right) = \frac{\Delta x \Delta y}{L_x L_y} \sum_{P=1}^{N_R} T_P \qquad (5.20)$$

onde P=1,2,...,N_R (envolve somente os volumes reais).

A solução numérica de q_n, da eq.(5.6), pode ser obtida com:

$$q_n = -k \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,\, y=L_y} dx \qquad (5.21)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,\, y=L_y} \approx \frac{T_P - T_S}{\Delta y}$$

onde P refere-se aos volumes fictícios da fig.5.3, cujas faces sul (s) coincidem com o contorno norte real do domínio de cálculo.
Com a eq.(5.21) na eq.(5.6) e a regra do retângulo, obtém-se

$$q_n = -k \sum_{P=1}^{N_{xR}} \left[\frac{\left(T_P - T_S \right)}{\Delta y} \Delta x \right] = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{P=1}^{N_{xR}} \left(T_P - T_S \right) \qquad (5.22)$$

5.6 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para ser resolvido numericamente o problema definido pelas eqs. (5.1) a (5.6) são:

1- Ler os dados: L_x, L_y, k, $\dot{q}$, funções T_{CC}, N_{xT}, N_{yT}, I (número de iterações).

2- Discretizar o domínio de cálculo, com

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_{xT} - 2}; \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_{yT} - 2} \qquad (5.23)$$

e calcular x_P e y_P.

3- Calcular os coeficientes e termos fontes com as eqs.(5.14), (5.18) e suas análogas para os outros três contornos.

4- Estimar a solução de T_P^o, por ex., $T_P = 0$.

5- Resolver o sistema de equações (5.13) através do método de Gauss-Seidel, eq. (5.19).

6- Voltar ao passo 5 até ser atingido I (iterações).

7- Calcular $\overline{T}, q_n$ e q_e, com as eqs. (5.20), (5.22) e análogas.

8- Imprimir e visualizar os resultados.

5.7 Solução Analítica

$$T = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \tag{5.24}$$

$$\overline{T} = \frac{2L_x}{\pi^2 L_y \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}\left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1\right] \tag{5.25}$$

$$q_n = -2k\coth\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) \tag{5.26}$$

$$q_e = \frac{k}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}\left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1\right] \tag{5.27}$$