4. CONDUÇÃO DE CALOR 1Dp COM ÁREA VARIÁVEL

4.1 Coordenadas Cilíndricas

4.1.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se
- problema unidimensional (1D);
- regime permanente (p);
- coordenadas cilíndricas;
- geração de calor ($\dot{q}$);

obtém-se a equação diferencial do problema:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)+\dot{q}=0 \qquad (4.1)$$

onde

T = temperatura (ºC ou K);
r = direção coordenada radial [raio] (m);
k = condutividade térmica (W/mK);
$\dot{q}$ = taxa de geração de calor por volume (W/m^3).

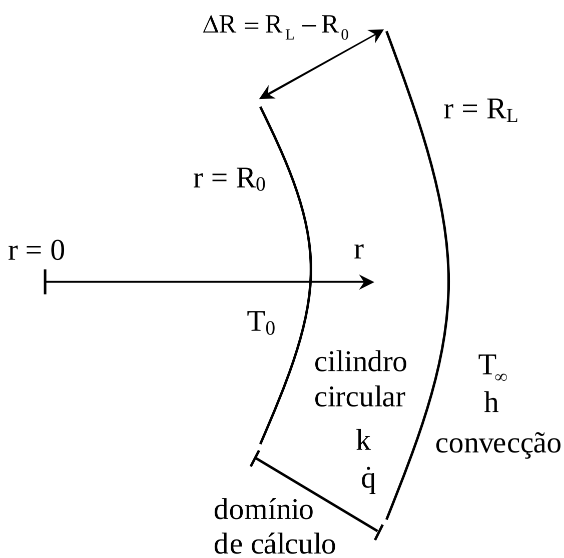

Figura 4.1: Esquema do problema físico

Condições de contorno (CC):

- Dirichlet (T conhecida) em $r = R_0$: $T(R_0) = T_0$ (valor conhecido) (4.2)

- Robin (convecção) em $r = R_L = L$:

$$q_L = \underbrace{-\left(kA\frac{dT}{dr}\right)_L}_{\text{condução}} = \underbrace{h\left(T_L - T_\infty\right)A_L}_{\text{convecção}} \tag{4.3}$$

onde
h = coeficiente de transferência de calor por convecção;
T_∞ = temperatura do fluido em contato com o contorno em $r = R_L$;
A_L = área da superfície do contorno em $r = R_L$.

Na eq.(4.3), são conhecidos A_L, h e T_∞; e são desconhecidos q_L, k, T_L e $\left(dT/dr\right)_L$.

4.1.2 Discretização

Integrando-se a eq.(4.1) sobre o volume de controle (VC) P da fig.4.2, obtém-se:

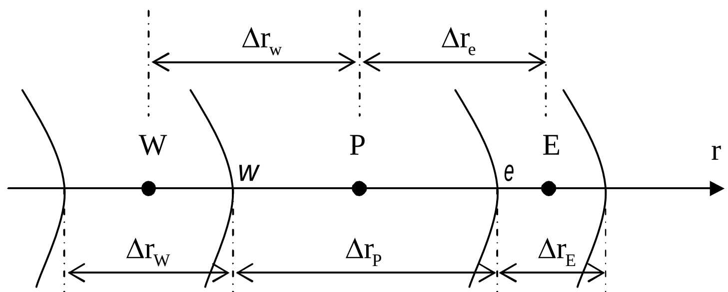

Figura 4.2: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces

$$\int_{r_w}^{r_e}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\overbrace{\left(kr\frac{dT}{dr}\right)}^{f} + \dot{q}\right]dr = 0 \qquad (\text{x } r) \tag{4.4}$$

ou

$$\int_{r_w}^{r_e} df + \int_{r_w}^{r_e} r\dot{q}\, dr = 0 \tag{4.5}$$

onde

$$f = \left(kr\frac{dT}{dr}\right) \tag{4.6}$$

Considerando-se $r = r_P$ e $\dot{q} = q_P$ na segunda integral, o resultado da eq.(4.5) é

$$f_e - f_w + r_P\dot{q}_P\Delta r_P = 0 \tag{4.7}$$

ou, com a eq.(4.6)

$$\left(kr\frac{dT}{dr}\right)_e - \left(kr\frac{dT}{dr}\right)_w + r_P \dot{q}_P \Delta r_P = 0 \quad (4.8)$$

- k_e e k_W podem ser obtidos das eqs.(2.18) a (2.20).
- r_e, r_W, r_P e Δr_P são obtidos da malha gerada, de forma semelhante às eqs.(2.7) a (2.9).
- $\dot{q}_P$ é um dado do problema.
- As duas derivadas da eq.(4.8) podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig.2.3), resultando em :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_w \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_w} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_e \approx \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r_e} \quad (4.10)$$

Com as eqs.(4.9) e (4.10) em (4.8), chega-se a

$$k_e r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r_e} - k_w r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_w} + r_P \dot{q}_P \Delta r_P = 0 \quad (4.11)$$

que na forma do sistema de equações

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + b_P \quad (4.12)$$

resulta em

$$\text{coeficientes:} \quad \begin{cases} a_w = k_w r_w / \Delta r_w \\ a_e = k_e r_e / \Delta r_e \\ a_P = a_w + a_e \end{cases} \qquad P = 1 \text{ a } N \qquad \text{(volumes reais)} \quad (4.13)$$

$$\text{termo fonte:} \quad b_P = \dot{q}_P r_P \Delta r_P$$

4.1.3 Aplicação das condições de contorno

A condição de contorno em r = R_0, dada pela eq.(4.2), pode ser aplicada com o VC fictício P = 0, conforme mostrado na fig.2.4, resultando em

$$a_P = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_P = 2T_0 \qquad (P = 0) \quad (4.14)$$

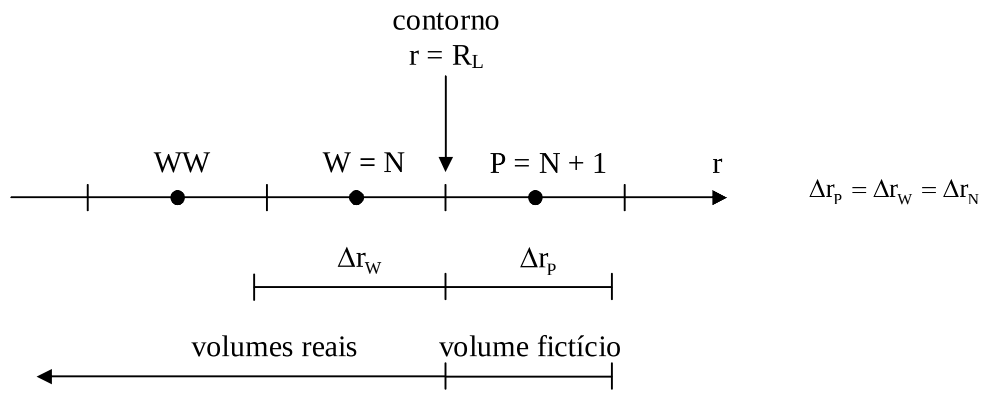

Figura 4.3: Aplicação da CC em $r = R_L$

Para aplicar a CC em $r = R_L$, dada pela eq.(4.3), é necessário aproximar a sua derivada e T_L. Com a fig.4.3 e o esquema CDS-2, tem-se:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_L \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_N} \qquad (P = N + 1) \tag{4.15}$$

$$T_L = \frac{(T_P + T_W)}{2} \qquad (P = N + 1) \tag{4.16}$$

Com as eqs.(4.15) e (4.16) na eq.(4.3), obtém-se

$$-k_L A_L \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_N} = h\left[\frac{(T_P + T_W)}{2} - T_\infty\right] A_L$$

ou na forma da eq.(4.12),

$$a_w = \frac{k_L}{\Delta r_N} - \frac{h}{2}; \quad a_e = 0; \quad a_P = \frac{k_L}{\Delta r_N} + \frac{h}{2}; \quad b_P = hT_\infty \qquad (P = N + 1) \tag{4.17}$$

4.1.4 Algoritmo

O algoritmo para resolver o problema definido pelas eqs. (4.1) a (4.3) é essencialmente o mesmo da seção 2.8, acrescentando-se que:

a) quando necessário, T_L pode ser obtido com a eq.(4.16);

b) q_L pode ser obtido através das eqs.(4.3) e (4.15), isto é:

$$q_L = -k_L A_L \frac{(T_{P=N+1} - T_{P=N})}{\Delta r_{P=N}} \tag{4.18}$$

onde $k_L = k(T_L)$ e a área em $r = R_L$ é dada por

$$A_L = 2\pi R_L \tag{4.19}$$

4.2 Aletas

4.2.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se
- problema unidimensional (1D) na direção x;
- regime permanente (p);
- área de condução de calor variável com x;
- convecção de calor na superfície da aleta.
- figura 4.4.

obtém-se a equação diferencial do problema:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(kA_C\frac{dT}{dx}\right)}_{\text{condução}} = \underbrace{h(T-T_\infty)\frac{dA_S}{dx}}_{\text{convecção}} \tag{4.20}$$

onde

T = temperatura;
x = direção coordenada;
k = condutividade térmica;
A_c = área de condução de calor em cada posição x;
h = coeficiente de transferência de calor por convecção;
T_∞ = T do fluido em contato com a aleta;
A_S = área da superfície da aleta.

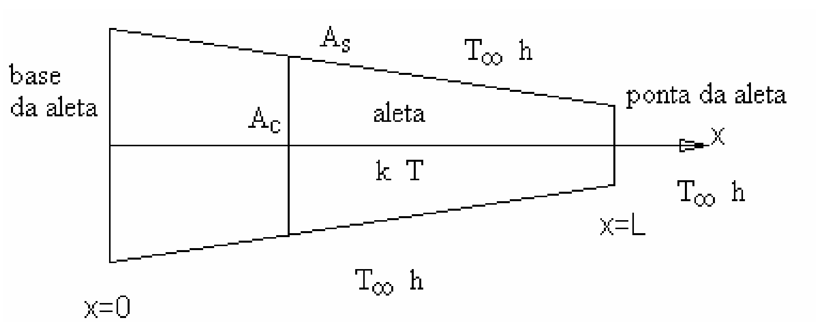

Figura 4.4: Esquema do problema da aleta

Condições de contorno:
- em x = 0, Dirichlet (T conhecida): $T(0) = T_b$ (T da base da aleta, conhecida) (4.21)

- em x=L, Robin (convecção):

$$q_L = \underbrace{-\left(kA_C\frac{dT}{dx}\right)_L}_{\text{condução}} = \underbrace{h\left(T_L - T_\infty\right)(A_C)_L}_{\text{convecção}} \tag{4.22}$$

Na eq.(4.22), são:
- conhecidos: $(A_c)_L$, h, T_∞
- desconhecidos: k_L, q_L, T_L, $(dT/dx)_L$

Variáveis de interesse:

a) taxa de transferência de calor (q) da aleta, obtida em sua base (b):

$$q_b = -\left(kA_C \frac{dT}{dx}\right)_{x=0} \tag{4.23}$$

b) q da aleta, obtido por integração do calor perdido por convecção:

$$q_h = \int_0^L h\,(T - T_\infty)dA_S + h\,(T_L - T_\infty)(A_C)_L \tag{4.24}$$

c) T na ponta da aleta: T_L
onde $q_b = q_h$.

4.2.2 Discretização

Integrando-se a eq.(4.20) sobre o VC P da fig.4.5, obtém-se

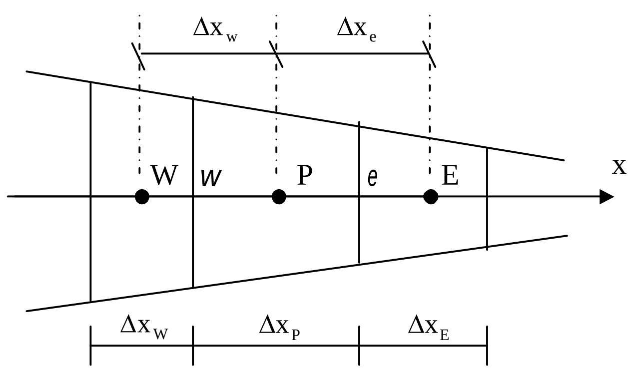

Figura 4.5: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces para uma aleta de área variável

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx}\left(kA_C \frac{dT}{dx}\right)dx = \int_{x_w}^{x_e} h(T - T_\infty)\frac{dA_S}{dx}dx \tag{4.25}$$

ou

$$\int_{x_w}^{x_e} df = h\int_{x_w}^{x_e} (T - T_\infty)dA_S \tag{4.26}$$

onde

$$f = kA_C \frac{dT}{dx} \tag{4.27}$$

Considerando-se T constante dentro de cada VC P, a eq.(4.26) resulta em

$$f_e - f_w = h\left(T_P - T_\infty\right)(\Delta A_S)_P$$

ou, com a eq.(4.27)

$$\left(kA_C \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(kA_C \frac{dT}{dx}\right)_w = h\left(T_P - T_\infty\right)(\Delta A_S)_P \tag{4.28}$$

onde

- $(\Delta A_S)_P$ é a área da superfície de cada VC P em contato com o fluido que está a T_∞.
- k_e e k_w podem ser obtidos das eqs.(2.18) a (2.20).
- $(A_C)_e$ e $(A_C)_w$ são as áreas de condução do calor pela aleta nas faces leste (e) e oeste (w) do VC P.
- A_s e A_c são obtidos da malha gerada em função de cada tipo de aleta (cônica, plana, anular, etc.).

As duas derivadas da eq.(4.28) podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig.2.3):

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx \frac{\left(T_E - T_P\right)}{\Delta x_e} \tag{4.29}$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx \frac{\left(T_P - T_W\right)}{\Delta x_w} \tag{4.30}$$

Com as eqs.(4.29) e (4.30) em (4.28), chega-se a

$$k_e (A_c)_e \frac{\left(T_E - T_p\right)}{\Delta x_e} - k_w (A_c)_w \frac{\left(T_p - T_W\right)}{\Delta x_w} = h(T_P - T_\infty)(\Delta A_S)_P \tag{4.31}$$

A eq.(4.31) pode ser colocada na forma da eq.(4.12), resultando em

$$\text{coeficientes:}\begin{cases} a_w = k_w (A_C)_w / \Delta x_w \\ a_e = k_e (A_C)_e / \Delta x_e \\ a_P = a_w + a_e + h\left(\Delta A_S\right)_P \end{cases} \qquad (P = 1 \text{ a } N) \qquad (\text{volumes reais}) \tag{4.32}$$

termo fonte: $b_P = h\left(\Delta A_S\right)_P T_\infty$

4.2.3 Aplicação das condições de contorno

A CC em x=0, dada pela eq.(4.21), pode ser aplicada com o VC fictício P=0 da fig.2.4, resultando em:

$$a_P = 1;\ \ a_w = 0;\ \ a_e = -1;\ \ b_P = 2T_b \qquad (P = 0) \tag{4.33}$$

A CC em x=L, dada pela eq.(4.22), pode ser aplicada com o VC fictício P=N+1 da fig.2.5, e seguindo o procedimento da subseção 4.1.3. Isso resulta em:

$$a_w = \frac{k_L}{\Delta x_N} - \frac{h}{2}; \quad a_e = 0; \quad a_P = \frac{k_L}{\Delta x_N} + \frac{h}{2}; \quad b_P = hT_\infty \qquad (P = N + 1) \qquad (4.34)$$

4.2.4 Algoritmo

O algoritmo para resolver o problema definido pelas eqs.(4.20) a (4.22) é essencialmente o mesmo da seção 2.8, acrescentando-se que:

a) quando necessário, T_L pode ser obtido com a eq.(4.16);

b) q_b, definido pela eq.(4.23), pode ser obtido através de:

$$q_b = -k_{x=0}\left(A_C\right)_{x=0} \frac{\left(T_{P=1} - T_{P=0}\right)}{\Delta x_{P=1}} \qquad (4.35)$$

c) q_h, definido pela eq.(4.24), pode ser obtido através de:

$$q_h = h\sum_{P=1}^{N}\left[\left(T_P - T_\infty\right)\left(\Delta A_S\right)_P\right] + h\left(T_L - T_\infty\right)\left(A_C\right)_L \qquad (4.36)$$

4.2.5 Casos simplificados

1º) condução de calor 1Dp com área (A_c) variável mas sem convecção:

basta fazer h=0. Neste caso, a eq. diferencial (4.20) se reduz a

$$\frac{d}{dx}\left(kA_C \frac{dT}{dx}\right) = 0 \qquad (4.37)$$

2º) aleta com A_c e k constantes, e malha uniforme (Δx constante):

os coeficientes da eq.(4.32) se reduzem a:

$$a_w = a_e = k\frac{A_C}{\Delta x}; \quad a_P = a_w + a_e + hP\Delta x; \quad b_p = hP\Delta x T_\infty \qquad (P = 1 \text{ a } N) \qquad (4.38)$$

onde P é o perímetro da aleta em contato com o fluido.
Neste caso, a equação diferencial (4.20) se reduz a

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{hP}{kA_C}\left(T - T_\infty\right) \qquad (4.39)$$

São conhecidas as soluções analíticas das eqs.(4.37) e (4.39).