CAP. ~~11~~ 12 TÓPICOS ESPECIAIS

- CONVECÇÃO DE CALOR ~~LAMINAR~~
- FLUIDOS COMPRESSÍVEIS
- ESCOAMENTOS TURBULENTOS

11.1 CONVECÇÃO DE CALOR

Considerando:
- escoamento laminar bidimensional
- fluido incompressível
- propriedades variáveis (ρ, μ, c_p, k)
- coordenadas cartesianas

o modelo matemático de problemas de convecção (forçada/natural) é dado por:

Eq. Conservação da <u>massa</u>:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (11.1)$$

Eq. Conservação da quantidade de movimento linear na direção x (<u>QMLx</u>):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (11.2)$$

<u>QMLy</u>:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \underbrace{\rho g \beta (T - T_\infty)}_{\text{força de empuxo}} \qquad (11.3)$$

Eq. Conservação da <u>energia</u> térmica:

$$c_p \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + c_p \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + c_p \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \dot{q} \qquad (11.4)$$

onde

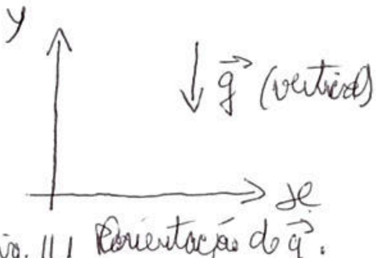

Fig. 11.1 Orientação de $\vec{g}$.

T = temperatura
c_p = calor específico à pressão constante
k = condutividade térmica
$\dot{q}$ = geração de calor por unidade de volume
g = módulo da aceleração gravitacional
T_∞ = T de referência
β = coeficiente de expansão térmica $= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \qquad (11.5)$
(para gases perfeitos, $p = \rho R T \rightarrow \beta = \frac{1}{T}$)
~~As outras variáveis seguem as definições do Cap. 10~~
x, y = coordenadas espaciais
t = " temporal
u, v = componentes do vetor velocidade ($\vec{V}$) nas direções x e y
p = pressão estática
μ = viscosidade absoluta

INCÓGNITAS: u, v, p, T

O termo $\rho g \beta (T - T_\infty)$ da Eq. (11.3) representa a aproximação de Boussinesq para convecção natural. [explicar ≠ entre convecção forçada/natural]. Ela é usada para considerar ρ constante ~~...~~ em problemas de convecção natural cujo movimento de fluido é causado pelas diferenças de ρ devido ~~...~~ às variações de T.

A discretização das Eqs. (11.1) a (11.4) pode ser feita conforme visto no Cap. 11, observando-se:

$$\int_{\Delta V} \rho g \beta (T - T_\infty) \, dV \simeq \rho_P g \beta_P (T_P - T_\infty) \Delta x_P \Delta y_P \Delta z \qquad (11.6)$$

- deve-se usar $(c_p)_P$ na integração da Eq. (11.4)

Algoritmo resumido para solução de regime permanente:

1) ler os dados e fazer inicializações para $t = 0$
2) estimar u_P^*, v_P^*, p_P^* e T_P^* em $t + \Delta t$
3) calcular os coeficientes e fontes da QMLx e QMLy
4) resolver a QMLx obtendo u_P^*
5) " " QMLy " v_P^*
6) calcular u_e^* e v_n^*
7) calcular os coeficientes e fontes da MASSA
8) resolver a MASSA obtendo p_P'
9) corrigir u_P^*, v_P^*, u_e^*, v_n^* e p_P^* com p_P' obtendo u_P, v_P, u_e, v_n e p_P
10) calcular os coeficientes e fontes da ENERGIA
11) resolver a ENERGIA obtendo T_P
12) voltar ao item 2 até satisfazer algum critério de convergência
13) pós-processamento

CICLOS:

a) MASSA: itens 7 a 9 (recomenda-se repetir 2 ou 3 vezes, normalmente)
b) TRANSIENTE REAL: itens 2 a 11 devem ser repetidos até satisfazer algum critério

O algoritmo acima é indicado para problemas de convecção natural, convecção ~~forçada~~ mista (forçada e natural) e hidrodinâmicos (MASSA + QML) com $\mu(T)$. No caso particular de problemas de convecção forçada com μ constante, pode-se 1º obter a convergência de u, v e p (ciclos 2 a 9) e depois resolver T (ciclos 10 e 11).

16 SET 06
18

11.2 ESCOAMENTO DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

considerações:
- ESCOAMENTO LAMINAR
- " " BIDIMENSIONAL
- GÁS PERFEITO
- ~~PROPRIEDADES CONSTANTES (CP)~~
- COORDENADAS CARTESIANAS

Alterações no modelo de convecção de calor, dado pelas eqs. (11.1) a (11.4):

- na QML se acrescenta no 2º membro da Eq. (11.2): $+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \nabla\cdot\vec{V})$ (11.7)

- na QML y acrescentar no 2º membro da Eq. (11.3): $+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \nabla\cdot\vec{V})$ (11.8)

- na ENERGIA " " " " " Eq. (11.4): $+\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}$ (11.9)

onde

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (11.10)$$

Além disso, deve-se acrescentar a equação de estado dos gases perfeitos, dada por:

$$p = \rho R T \qquad (11.11)$$

onde R é a constante do gás.

Portanto o modelo matemático é constituído por 5 equações e as incógnitas são u, v, p, T e ρ.

Aproximação do termo da Eq. (11.7) [QML x] ⟹ u

$$\int_{\text{Volume}} \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\mu \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\nabla\cdot\vec{V}}\Big]dx\,dy\,dz \simeq \frac{1}{3}\Big[\mu_e(\nabla\cdot\vec{V})_e - \mu_w(\nabla\cdot\vec{V})_w\Big]\Delta y\,\Delta z \qquad (11.12)$$

onde

$$(\nabla\cdot\vec{V})_e = \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)_e \simeq \underbrace{\frac{(u_E-u_P)}{\Delta x}}_{\text{coeficientes}} + \underbrace{\frac{(v_N+v_{NE}-v_S-v_{SE})}{4\Delta y}}_{\text{fonte}} \qquad (11.13)$$

Aproximação do termo da Eq. (11.8) [QML y] ⟹ v

$$\int_{\text{Volume}} \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu\nabla\cdot\vec{V})dx\,dy\,dz \simeq \frac{1}{3}\Big[\mu_n(\nabla\cdot\vec{V})_n - \mu_s(\nabla\cdot\vec{V})_s\Big]\Delta x\,\Delta z \qquad (11.14)$$

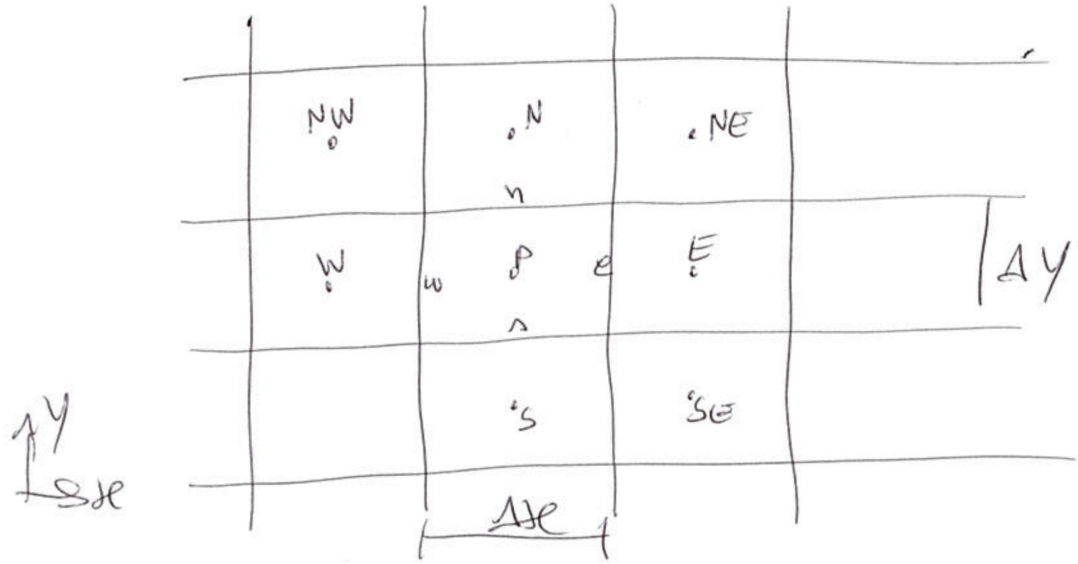

Figura 11.2 Malha 2D.

onde $(\nabla\cdot\vec{V})_n \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)_n \approx \underbrace{\frac{(u_E+u_{NE}-u_W-u_{NW})}{4\Delta x}}_{\text{fonte}} + \underbrace{\frac{(v_N-v_P)}{\Delta y}}_{\text{coeficientes}}$ (11.15)

Aproximação do termo da eq. (11.9) [ENERGIA] → T

$$\int_t\int_{volume}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz\,dt \approx \underbrace{(p_P-p_P^o)\Delta x\Delta y\Delta z + u_P\frac{(p_E-p_W)}{2}\Delta y\Delta z\Delta t + v_P\frac{(p_N-p_S)}{2}\Delta x\Delta z\Delta t}_{\text{fonte}} \quad (11.16)$$

Discretizando-se a MASSA, eq. (11.1), obtém-se

$$\frac{(M_P-M_P^o)}{\Delta t}+\dot{M}_e-\dot{M}_w+\dot{M}_n-\dot{M}_s=0 \quad (11.17)$$

onde $M_P=\rho_P\Delta x\Delta y\Delta z$ (11.18)

$M_P^o=\rho_P^o\Delta x\Delta y\Delta z$ (11.19)

$\dot{M}_e=\rho_e u_e\Delta y\Delta z$ (11.20)

Quando o fluido é compressível é importante considerar a relação entre ρ e p na MASSA, além de (u, v) e p. Assim, considerando-se

$u=u^*+u'$ (11.21)

$\rho=\rho^*+\rho'$ (11.22)

na Eq. (11.20), obtém-se

$$\dot{M}_e = (\rho_e^* u_e^* + \rho_e^* u_e' + \rho_e' u_e^* + \rho_e' u_e')\Delta y \Delta z \qquad (11.23)$$

~~Desprezando~~ As Relações para u' e v' são obtidas de métodos de acoplamento pressão-velocidade, SIMPLEC por exemplo. E, para ρ', a partir da equação de estado, Eq. (11.11), chega-se a

$$\rho_P' = \frac{p_P'}{RT_P} \qquad (11,24)$$

Com as relações $u'(p')$, $v'(p')$ e $\rho'(p')$ na Eq. (11.23) e análogas, desprezando-se termos de 2ª ordem ($\rho' u'$ e $\rho' v'$), e substituindo os resultados na Eq. (11.17), chega-se a

$$a_P^p p_P' = a_W^p p_W' + a_E^p p_E' + a_S^p p_S' + a_N^p p_N' + b_P^p \qquad (11.25)$$

onde, p. ex.,

$$a_W^p = \underbrace{\frac{u_W^*(1/2+\alpha_W)\Delta y \Delta z}{RT_W}}_{\text{efeito de } \rho} + \underbrace{\rho_W^* d_W}_{\text{efeito de } u} \qquad (11.26)$$

ρ^* nas faces é obtido das eqs. ~~semelhantes ao~~ (11.27) a (11.30), com α prescrito conforme desejado (1/2→UDS, 0→CDS, ou ∀)

Algoritmo:

1) LER DADOS
2) INICIALIZAÇÕES
3) calcular propriedades (μ, c_p, k, β)
4) calcular coeficientes, fontes e C.C. de u^* e resolver u^*
5) calcular fontes de ~~v^*~~ e C.C. " " v^*
6) " coefs., e " " T " " " " T
7) " ρ_P^* e ρ^*_{faces}
8) " coeficientes do SIMPLEC
9) " velocidades nas faces
10) " coeficientes, fontes e C.C. p' e resolver p'
11) correções c/ p'
12) voltar ao item 3 até convergir
13) pós-processamento

II.3 MODELO k-ε PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS

- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL
- ESCOAMENTO TURBULENTO
- ESTADO PERMANENTE
- ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL
- escoamento isotérmico

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S^{\phi} \qquad (II.27)$$

ONDE

EQUAÇÃO	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}	
MASSA	1	0	0	(II.28)
QMLx	U	μ_{ef}	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{ef}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{ef}\frac{\partial V}{\partial x}\right)$	(II.29)
QMLy	V	μ_{ef}	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{ef}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{ef}\frac{\partial V}{\partial y}\right)$	(II.30)
ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA	k	$\frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu$	$\rho\left(P^k - \varepsilon\right)$	(II.31)
dissipação de k	ε	$\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu$	$\rho\frac{\varepsilon}{k}\left(C_1 P^k - C_2\varepsilon\right)$	(II.32)

ONDE

$$\mu_{ef} = \mu_t + \mu \qquad (II.33)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (II.34)$$

$$P^k = \mu_t\left[2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (II.35)$$

CONSTANTES:

$$\left.\begin{array}{lll} C_\mu = 0.09 & \sigma_k = 1.0 & \sigma_\varepsilon = 1.3 \\ C_1 = 1.44 & C_2 = 1.92 & \end{array}\right\} \qquad (II.36)$$

16 Set 06
18

x, y = direções coordenadas

U, V = componentes médias do vetor velocidade em x e y

P = pressão estática média

ρ = massa específica

k = energia cinética turbulenta $\left(= \frac{\overline{uu} + \overline{vv}}{2}\right.$

ε = dissipação de k

μ = viscosidade laminar

μ_t = " turbulenta

μ_{ef} = " efetiva [até centenas ou milhares de vezes μ]

Aproximações de alguns termos:

QMLx: $$\int_{vol} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{ef}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz \approx \left[\left(\mu_{ef}\frac{\partial V}{\partial x}\right)_n - \left(\mu_{ef}\frac{\partial V}{\partial x}\right)_s\right]\Delta x \Delta z \tag{11.37}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_n \approx \frac{\left(V_E + V_{NE} - V_W - V_{NW}\right)}{4\Delta x} \tag{11.38}$$

QMLy: $$\int_{vol} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{ef}\frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz = \left[\left(\mu_{ef}\frac{\partial U}{\partial y}\right)_e - \left(\mu_{ef}\frac{\partial U}{\partial y}\right)_w\right]\Delta y \Delta z \tag{11.39}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_e \approx \frac{\left(U_N + U_{NE} - U_S - U_{SE}\right)}{4\Delta y} \tag{11.40}$$

$$\int_{vol} P^k\,dx\,dy\,dz \approx (\mu_t)_P \left\{ 2\left(\frac{U_E - U_W}{2\Delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{V_N - V_S}{2\Delta y}\right)^2 + \left[\frac{(U_N - U_S)}{2\Delta y} + \frac{(V_E - V_W)}{2\Delta x}\right]^2 \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{11.41}$$

Algoritmo:

1) Ler dados
2) Inicializações
3) calcular propriedades (μ, c_p, k, β, μ_t, μ_{ef})
4) resolver u^*
5) " v^*
6) " p'
7) correções com p'
8) resolver k
9) " ε
10) voltar ao item 3 até convergir
11) pós-processamento