UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Tecnologia
Curso de Engenharia Mecânica
TM-257 - Dinâmica dos Fluidos Computacional (2016/2)

Trabalho Computacional 02 – 09 Nov 2016

Considere uma barra unidimensional, de área de seção transversal A constante e comprimento L, cujas extremidades sejam mantidas a temperaturas T_A, em $x = 0$, e T_B, em $x = L$, ambas iguais a 0°C, ou seja, $T_A = T_B = 0°\text{C}$. Considere também que a condutividade térmica k do material da barra, bem como o calor específico c_p e a massa específica ρ sejam constantes para a faixa de temperaturas em que a barra está exposta e que não haja geração de calor no interior da barra. O modelo matemático que modela a difusão de calor, nesse caso, é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

sendo α a difusividade térmica do material da barra, que pode ser avaliada como

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \tag{2}$$

Admita, então, que a distribuição de temperaturas na barra, no instante de tempo $t = 0$ s, seja dada através da seguinte expressão:

$$T_i(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{3}$$

Para a discretização do modelo matemático proposto pela Eq. (1), sugere-se a utilização de uma malha espacial uniforme. Neste caso, tem-se que a métrica de malha Δx pode ser avaliada através da seguinte relação:

$$\Delta x = \frac{L}{N} \tag{4}$$

na qual N representa o número de volumes no qual o domínio está dividido. Com relação ao tempo, também se propõe trabalhar com uma malha temporal uniforme, o que resulta em

$$\Delta t = \frac{t_F}{M} \tag{5}$$

sendo t_F o instante final no qual se deseja avaliar a distribuição de temperaturas $T(x,t)$ e M o número total de avanços de tempo de $t = 0$ a $t = t_F$.

No processo de discretização empregado para a Eq. (1), serão utilizadas funções de interpolação do tipo CDS no espaço e a formulação θ para o tempo. Desse modo, obtém-se que os coeficientes e termos-fontes para os volumes internos ($P = 2, 3, \ldots, N-1$) serão:

$$a_E = a_W = \frac{\theta \alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \tag{6}$$

$$a_P = a_W + a_E + \Delta x \, A \tag{7}$$

$$b_P = \left[\Delta x \, A + \frac{2(\theta - 1)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] T_P^0 + \left[\frac{(1-\theta)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] \left(T_W^0 + T_E^0 \right) \tag{8}$$

No caso do primeiro volume de controle, $P = 1$, adjacente ao contorno esquerdo ($x = 0$), tem-se que os coeficientes/termo-fonte obtidos serão:

$$a_W = 0 \tag{9}$$

$$a_E = \frac{\theta \alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \tag{10}$$

$$a_P = 3 \, a_E + \Delta x \, A \tag{11}$$

$$b_P = \left[\Delta x \, A + \frac{3(\theta - 1)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] T_P^0 + \left[\frac{(1-\theta)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] T_E^0 + \frac{2 \, T_A \, \alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \tag{12}$$

Para o último volume de controle, $p = N$, adjacente ao contorno direito ($x = L$), os coeficientes/termo-fonte obtidos serão:

$$a_E = 0 \tag{13}$$

$$a_W = \frac{\theta \alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \tag{14}$$

$$a_P = 3 \, a_W + \Delta x \, A \tag{15}$$

$$b_P = \left[\Delta x \, A + \frac{3(\theta - 1)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] T_P^0 + \left[\frac{(1-\theta)\alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \right] T_W^0 + \frac{2 \, T_B \, \alpha \, A \, \Delta t}{\Delta x} \tag{16}$$

Além da distribuição de temperaturas na barra, a outra variável de interesse a ser avaliada é a temperatura média T_{med} da barra ao longo do tempo. Para tanto, será empregada a regra do trapézio para a integração numérica, o que resulta na seguinte expressão para T_{med}:

$$T_{med}(t) = \frac{\Delta x}{2L}\left[\frac{(T_A + T_1)}{2} + \sum_{P=2}^{N}(T_W + T_P) + \frac{(T_B + T_N)}{2}\right] \tag{17}$$

Nas relações anteriores, T_1 e T_N se referem, respectivamente, às temperaturas obtidas para o primeiro e o último volumes de controle ($P = 1$ e $P = N$, nessa ordem).

As soluções analíticas para o perfil de temperaturas e para a temperatura média são:

$$T(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\alpha\pi^2 t}{L^2}\right) \tag{18}$$

e

$$T_{med}(t) = \frac{2}{\pi}\exp\left(-\frac{\alpha\pi^2 t}{L^2}\right) \tag{19}$$

Diante das informações anteriormente expostas, pede-se:

1) Implementar um código computacional, em qualquer linguagem de programação, para resolver numericamente o problema de difusão de calor em uma barra para o regime transiente. Tal código deve ser genérico, para admitir diferentes valores de N (número total de volumes de controle). Deve-se assegurar que o código implementado seja escrito com **DUPLA PRECISÃO. No caso do Fortran, isso é obtido ao se definir as variáveis reais com REAL*8, além de utilizar a notação d0 ao fim dos valores reais que apareçam nas expressões matemáticas; por exemplo, ao invés de escrever (1.0/2.0) utilizar (1.0d0/2.0d0). Ao se trabalhar com variáveis de precisão dupla, garante-se que se estará trabalhando com cerca de 15 algarismos significativos e não apenas 8, reduzindo-se os efeitos do erro de arredondamento.**
2) O código computacional poderá seguir os passos apresentados na Seção 4.3 das notas de aula.
3) Para resolver o sistema de equações lineares resultante do processo de discretização, pode-se empregar qualquer método numérico (direto ou iterativo). Nota-se, contudo, que se a opção for por um método iterativo, deve-se assegurar que o número de iterações utilizadas seja tal que a solução numérica atinja o erro de máquina (ou seja, a solução numérica deve ser idêntica em iterações consecutivas, exceto por flutuações nos últimos dígitos). Dentre os métodos iterativos mais conhecidos, citam-se o de Gauss-Seidel e o Jacobi. Já entre os métodos diretos, tem-se a

Eliminação de Gauss, a Fatoração LU e, no caso de matrizes tridiagonais, como a obtida do processo de discretização proposto, o algoritmo TDMA. O algoritmo TDMA é apresentado no arquivo TDMA.pdf, presente no site da disciplina.

4) Utilizar os seguintes dados/parâmetros gerais:
    - Difusividade térmica: 1,17x10^{-4} m^2/s.
    - Tempo final: 20 segundos.
    - Comprimento da barra: 0,1 m.
    - Área de seção transversal da barra: 1 m^2.

Resultados a apresentar:

1) Código implementado.
2) Tabela, para o instante final (t = 20 s), contendo: (a) a posição de cada volume de controle; (b) a temperatura numérica obtida; (c) a temperatura analítica correspondente. Para esta tabela, empregue N = 25, M = 20, θ = 0,5. Não se esqueça de incluir na tabela os dados relativos às condições de contorno.
3) Tabela contendo: (a) o instante de tempo; (b) a temperatura média numérica obtida; (c) a temperatura média analítica. Para esta tabela, empregue N = 25, M = 20, θ = 0,5.
4) Gráfico com o perfil de temperaturas na barra, incluindo os valores analítico e numérico. Incluir as condições de contorno. Os valores correspondentes à solução analítica devem conter apenas símbolos, não unidos por segmentos de reta; os valores correspondentes à solução numérica deve conter símbolos unidos por segmentos de reta. Para este gráfico, empregue N = 25, M = 20, θ = 0.
5) Gráfico com o perfil de temperaturas na barra, incluindo os valores analítico e numérico. Incluir as condições de contorno. Os valores correspondentes à solução analítica devem conter apenas símbolos, não unidos por segmentos de reta; os valores correspondentes à solução numérica deve conter símbolos unidos por segmentos de reta. Para este gráfico, empregue N = 25, M = 20, θ = 0,5.
6) Gráfico com o perfil de temperaturas na barra, incluindo os valores analítico e numérico. Incluir as condições de contorno. Os valores correspondentes à solução analítica devem conter apenas símbolos, não unidos por segmentos de reta; os valores correspondentes à solução numérica deve conter símbolos unidos por segmentos de reta. Para este gráfico, empregue N = 25, M = 20, θ = 1.
7) Utilize seu código para obter a temperatura média numérica para as seguintes malhas: N = 25 com M = 20; N = 50 com M = 40; N = 100 com M = 80; N = 200 com M = 160; N = 400 com M = 320; N = 800 com M = 640. Para cada uma das malhas, utilize os três valores de theta: θ = 0; θ = 0,5; e θ = 1. Calcule as ordens aparentes e efetivas, para a temperatura média numérica obtida

no instante de tempo final (t = 20s), para cada valor de theta em separado e para as malhas que couberem. Note que a razão de refino, que é empregada para o cálculo das ordens é igual a 2 para as malhas empregadas. Faça um gráfico indicando, no eixo horizontal, a métrica de malha (Δx), em escala logarítmica, no eixo vertical, a ordem calculada para cada caso ($\theta = 0$; $\theta = 0,5$; e $\theta = 1$). Os valores obtidos são os esperados, tendo-se em vista que no processo de discretização espacial foram empregadas funções de interpolação do tipo CDS e para a discretização temporal a formulação θ?

Instruções finais:

1) O trabalho computacional poderá ser feito em grupos de até 5 integrantes.
2) Trabalhos e/ou códigos idênticos terão conceito nulo.
3) Data limite de entrega: 30/11/2016 (quarta-feira).