UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Tecnologia
Curso de Engenharia Mecânica
TM-257 - Dinâmica dos Fluidos Computacional (2016/2)

Trabalho Computacional 01 – 28 Set 2016

Considere uma aleta de área de seção transversal constante (A_{tr}), exposta a um ambiente com coeficiente convectivo constante (h) e temperatura T_∞. Considere também que a condutividade térmica do material da aleta (k) seja constante para a faixa de temperaturas em que a aleta está exposta. O modelo matemático que modela a difusão de calor é:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h\,Per}{k A_{tr}}(T - T_\infty) = 0 \tag{1}$$

sendo *Per* o perímetro da seção transversal da aleta (nesse caso, como a seção transversal é constante, *P* também é constante). As condições de contorno aplicadas são a de temperatura da base (T_b) conhecida em $x = 0$ e de convecção na ponta da aleta, em $x = L$:

$$T(0) = T_b \tag{2}$$

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h\left[T(x = L) - T_\infty\right] \tag{3}$$

Para a discretização do modelo matemático proposto pela Eq. (1), sugere-se a utilização de uma malha uniforme. Neste caso, para uma aleta de comprimento L, tem-se que a métrica de malha Δx pode ser avaliada através da seguinte relação:

$$\Delta x = \frac{L}{N} \tag{4}$$

na qual N representa o número de volumes no qual o domínio está dividido.

Do processo de discretização, obtém-se que os coeficientes e termos-fontes para os volumes internos ($P = 2, 3, \ldots, N-1$) serão:

$$a_E = a_W = \frac{1}{\Delta x} \tag{5}$$

$$a_P = a_W + a_E + \frac{h\,Per\,\Delta x}{k\,A_{tr}} \tag{6}$$

$$b_P = \frac{h\,Per\,\Delta x}{k\,A_{tr}} T_\infty \tag{7}$$

No caso do primeiro volume de controle, $P = 1$, adjacente ao contorno esquerdo (Eq. 2), tem-se que os coeficientes/termo-fonte obtidos serão:

$$a_W = 0 \tag{8}$$

$$a_E = \frac{1}{\Delta x} \tag{9}$$

$$a_P = a_E + \frac{2}{\Delta x} + \frac{h\,Per\,\Delta x}{k\,A_{tr}} \tag{10}$$

$$b_P = \frac{h\,Per\,\Delta x}{k\,A_{tr}} T_\infty + \frac{2}{\Delta x} T_b \tag{11}$$

sendo T_b a temperatura da base da aleta (valor conhecido).

Para o último volume de controle, $p = N$, adjacente ao contorno direito (Eq. 3), os coeficientes/termo-fonte obtidos serão:

$$a_W = h\,\Delta x\,k\,A_{tr} + 2\,k^2 A_{tr} \tag{12}$$

$$a_E = 0 \tag{13}$$

$$a_p = a_W + 2\,h\,\Delta x\,k\,A_{tr} + h^2 (\Delta x)^3 Per + 2\,k\,(\Delta x)^2 h\,Per \tag{14}$$

$$b_P = \left[2\,h\,\Delta x\,k\,A_{tr} + h^2 (\Delta x)^3 Per + 2\,k\,(\Delta x)^2 h\,Per\right] T_\infty \tag{15}$$

Duas variáveis de interesse, além do perfil de temperaturas ao longo da aleta, são estudadas: a temperatura na extremidade da aleta, $T(L) = T_L$ e a taxa total de transferência de calor da aleta, q_a, avaliadas através das seguintes expressões:

$$T_L = \frac{2\,k\,T_N + h\,\Delta x\,T_\infty}{h\,\Delta x + 2\,k} \tag{16}$$

$$q_a = -\frac{2\,k\,A_{tr}}{\Delta x}\left(T_1 - T_b\right) \tag{17}$$

Nas relações anteriores, T_1 e T_N se referem, respectivamente, às temperaturas obtidas para o primeiro e o último volumes de controle ($P = 1$ e $P = N$, nessa ordem).

As soluções analíticas para o perfil de temperaturas, $T(x)$, a temperatura na extremidade da aleta, $T_L^{analítica}$, e a taxa total de transferência de calor, $q_a^{analítica}$, são fornecidas em livros-texto sobre transferência de calor, como a obra de Incropera *et al.*(2008). Para esse livro de referência, tem-se as Eqs. (3.70) e (3.71) para se avaliar $T(x)$ e $q_a^{analítica}$; para se avaliar $T_L^{analítica}$, utiliza-se a Eq. (3.70), fazendo $x = L$. Deve-se notar, no entanto, que a Eq. (3.70) traz o perfil de temperaturas adimensional – para comparar os resultados com os numéricos, devem-se empregar também as equações constantes no rodapé da Tab. 3.4, dentro da qual se encontram as Eqs. (3.70) e (3.71).

Diante das informações anteriormente expostas, pede-se:

1) Implementar um código computacional, em qualquer linguagem de programação, para resolver numericamente o problema de difusão de calor em uma aleta de área de seção transversal constante. Tal código deve ser genérico, para admitir diferentes valores de N (número total de volumes de controle). Deve-se assegurar que o código implementado seja escrito com **DUPLA PRECISÃO. No caso do Fortran, isso é obtido ao se definir as variáveis reais com REAL*8, além de utilizar a notação d0 ao fim dos valores reais que apareçam nas expressões matemáticas; por exemplo, ao invés de escrever (1.0/2.0) utilizar (1.0d0/2.0d0). Ao se trabalhar com variáveis de precisão dupla, garante-se que se estará trabalhando com cerca de 15 algarismos significativos e não apenas 8, reduzindo-se os efeitos do erro de arredondamento.**
2) O código computacional poderá seguir os passos apresentados na Seção 2.7 das notas de aula. Nota-se, contudo, que como o algoritmo apresentado na Seção 2.7 serve para condutividade térmica variável e malha não-uniforme, alguns dos passos do algoritmo podem ser desprezados, como a avaliação da condutividade térmica para o centro dos volumes de controle e para as faces do mesmo (passos 4 e 5).
3) Para resolver o sistema de equações lineares resultante do processo de discretização, pode-se empregar qualquer método numérico (direto ou iterativo). Nota-se, contudo, que se a opção for por um método iterativo, deve-se assegurar que o número de iterações utilizadas seja tal que a solução numérica atinja o erro de máquina (ou seja, a solução numérica deve ser idêntica em iterações consecutivas, exceto por flutuações nos últimos dígitos). Dentre os métodos iterativos mais conhecidos, citam-se o de Gauss-Seidel e o Jacobi. Já entre os métodos diretos, tem-se a Eliminação de Gauss, a Fatoração LU e, no caso de matrizes tridiagonais, como a obtida do processo de discretização proposto, o algoritmo TDMA. O algoritmo TDMA é apresentado no arquivo TDMA.pdf, presente no site da disciplina.

Resultados a apresentar:

1) Código implementado.
2) Tabela contendo: (a) a posição de cada volume de controle; (b) a temperatura numérica obtida; (c) a temperatura analítica correspondente. Para esta tabela, empregue N = 20. Não se esqueça de incluir na tabela os dados relativos às condições de contorno (temperatura da base da aleta, antes do início da listagem das demais temperaturas e a temperatura na extremidade da aleta, após a listagem das demais temperaturas).
3) A taxa de transferência de calor total para a malha de 20 volumes. Incluir os valores numérico e analítico.
4) Gráfico com o perfil de temperaturas na aleta, incluindo os valores analítico e numérico, para a malha de 20 volumes de controle. Incluir as condições de contorno. Os valores correspondentes à solução analítica devem conter apenas símbolos, não unidos por segmentos de reta; os valores correspondentes à solução numérica deve conter símbolos unidos por segmentos de reta.
5) Utilize seu código para obter a temperatura da extremidade da aleta e para a taxa total de transferência de calor para as seguintes malhas: N = 10, 20, 40, 80, 160, 320. Calcule as ordens aparentes e efetivas para as malhas que couberem. Faça um gráfico indicando, no eixo horizontal, a métrica de malha (Δx), em escala logarítmica, no eixo vertical, a ordem calculada. Os valores obtidos são os esperados, tendo-se em vista que no processo de discretização foram empregadas funções de interpolação do tipo CDS?
6) Dados a serem empregados: aleta de cobre, com k = 400 W/mK; L = 0,4 m; A_{tr} = 1x10^{-3} m^2; P = 0,14 m; T_b = 100 °C; $T_\infty = 10$ °C; h = 100 W/m^{2}K.

Instruções finais:

1) O trabalho computacional poderá ser feito em grupos de até 5 integrantes.
2) Trabalhos e/ou códigos idênticos terão conceito nulo.
3) Data limite de entrega: 26/10/2016 (quarta-feira).