

5.1. MODELO MATEMÁTICO:

CONSIDERANDO-SE A DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM COORDENADAS CARTESIANAS, TEM-SE O SEGUINTE MODELO MATEMÁTICO:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \quad (5.1)$$

SENDO:

x e y AS DIREÇÕES COORDENADAS [m];

ρ A MASSA ESPECÍFICA [kg/m^3];

c_p O CALOR ESPECÍFICO [$\text{J}/\text{kg K}$];

k : A CONDUTIVIDADE TÉRMICA [$\text{W}/\text{m K}$];

t : O TEMPO [s];

T : A TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ ou K];

\dot{q} A TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR [W/m^3]

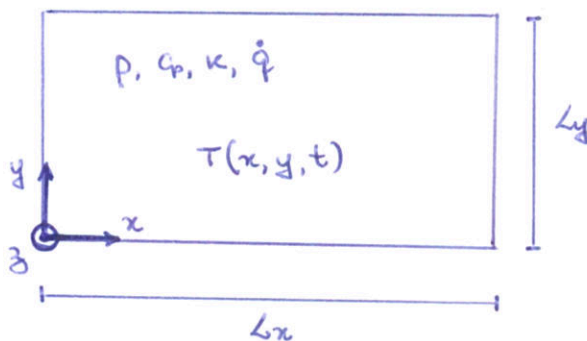


FIG. 5.1: DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL (PLACA PLANA)

VARIÁVEIS DE INTERESSE:

• CAMPO DE TEMPERATURAS, $T(x, y, t)$

• TEMPERATURA MÉDIA (\bar{T}_{2D}):

$$\bar{T}_{2D}(t) = \frac{1}{A} \int_A T(x, y, t) dA = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y, t) dx dy \quad (5.2)$$

SENDO

$$A = L_x L_y \quad (5.3)$$

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTO RNO NORTE (q_n):

$$q_n(t) = - \int_0^{L_x} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x, y=L_y, t} dx \tag{5.4}$$

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTO RNO LESTE (q_e):

$$q_e(t) = - \int_0^{L_y} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x, y, t} dy \tag{5.5}$$

5.2. MODELO NUMÉRICO

ADMITINDO-SE O VOLUME DE CONTROLE P, APRESENTADO NA FIG. 5.2:

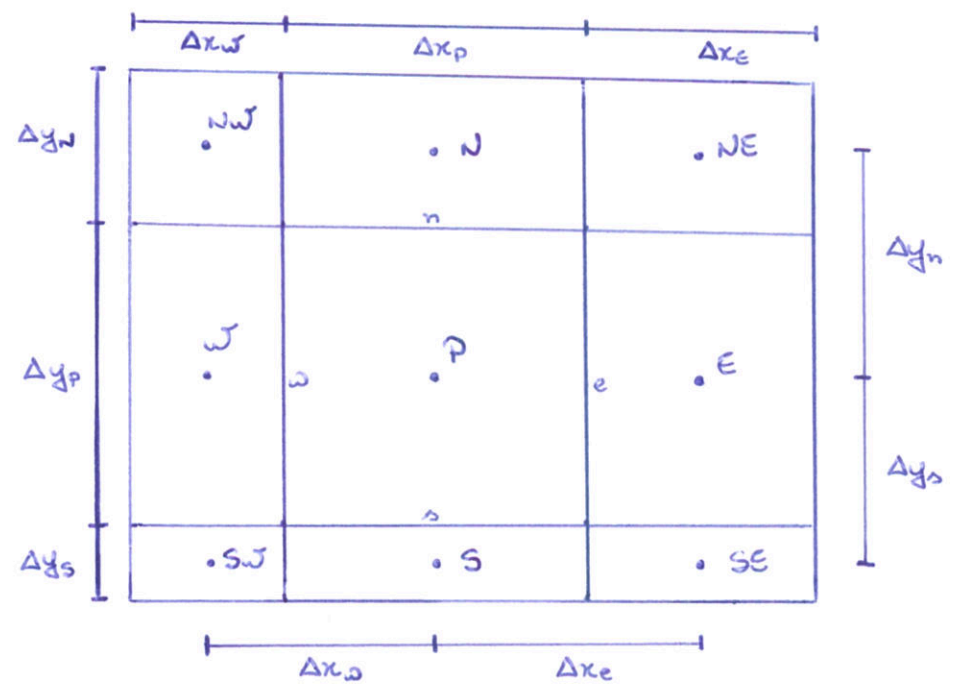


FIG. 5.2: MALHA BIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS

E INTEGRANDO-SE A EQ.(5.1) PARA O VOLUME DE CONTROLE P E AO LONGO DO TEMPO, DE $(t - \Delta t)$ A (t) , OBTÉM-SE:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_{\xi} \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt dx dy dz = \int_{t-\Delta t}^t \int_{\xi} \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz dt \tag{5.6}$$

CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTE S HIPÓTESES:

- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO UNIDIMENSIONAIS LINEARES NO ESPAÇO (FUNÇÕES DO TIPO C
- FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA NO TEMPO ($\theta = 1$)
- Δz CONSTANTE
- APESAR DE AS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS PODEREM VARIAR DE VOLUME A VOLUME,

ADMITTE-SE UM VALOR MÉDIO (CONSTANTE) REPRESENTATIVO DA PROPRIEDADE EM QUESTÃO NO CENTRO DE VOLUME E NO CENTRO DE CADA FACE DO VOLUME DE CONTROLE

DESSE MODO, A EQ. (5.6) RESULTA EM:

$$\begin{aligned}
 \rho_p (c_p)_p (T_p - T_p^0) \Delta x_p \Delta y_p \Delta z = & \left[k_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} \right] \Delta y_p \Delta z \Delta t + \\
 & \left[k_n \frac{(T_w - T_p)}{\Delta y_n} - k_s \frac{(T_p - T_s)}{\Delta y_s} \right] \Delta x_p \Delta z \Delta t + \dot{q}_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \Delta t
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

QUE PODE SER EXPRESSA NA FORMA:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + l_p \tag{5.8}$$

FORNecendo os seguintes coeficientes/termos-fontes:

$$a_w = k_w \frac{\Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_w} \tag{5.9}$$

$$a_e = k_e \frac{\Delta y_p \Delta z \Delta t}{\Delta x_e} \tag{5.10}$$

$$a_s = k_s \frac{\Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_s} \tag{5.11}$$

$$a_n = k_n \frac{\Delta x_p \Delta z \Delta t}{\Delta y_n} \tag{5.12}$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + \rho_p (c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \tag{5.13}$$

$$l_p = \left[\rho_p (c_p)_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \right] T_p^0 + \dot{q}_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \Delta t \tag{5.14}$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES INTERIORS DO DOMÍNIO

CONSIDERANDO-SE UMA ORDENAÇÃO LEXICOGRAFICA PARA A NUMERAÇÃO DOS VOLUMES DE CONTROLE, O SISTEMA DE EQUAÇÕES GERADO APRESENTA UMA ESTRUTURA MATRICIAL DO TIPO TRIANGULAR:

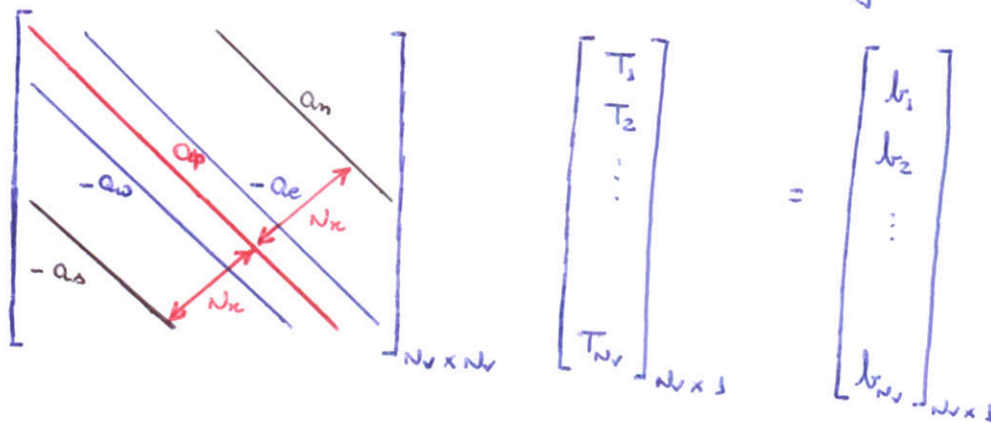
$$[A]_{N_v \times N_v} [T]_{N_v} = [B]_{N_v} \tag{5.15}$$

SENDO

$N_v = N_x N_y$ (NÚMERO TOTAL DE JOGOS DE CONTROLE)

N_x : NÚMERO DE JOGOS DE CONTROLE NA DIREÇÃO x

N_y : NÚMERO DE JOGOS DE CONTROLE NA DIREÇÃO y



(5.16)

EXEMPLO:

19	20	21	22	23	24
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

$N_y = 4; N_x = 6$

$N_v = N_x N_y = 6 \times 4 = 24$

FIG. 5.3: EXEMPLO DE MALHA 6×4 ($N_x = 6, N_y = 4, N_v = 24$).

NO CASO DE DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL, EM REGIME PERMANENTE, SEM GERAÇÃO DE CALOR ($\dot{q} = 0$), CONDUTIVIDADE TÉRMICA (k) CONSTANTE, MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO ($\Delta x = \text{CONST. 1}; \Delta y = \text{CONST. 2}$) E $\Delta z = 1$, TEM-SE QUE A EQ. (5.1) SE REDUZ A UMA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{5.17}$$

CUJA DISCRETIZAÇÃO CONDUZ AOS SEGUINTESS COEFICIENTES / TERMOS-FONTES:

$$a_w = a_e = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5.18}$$

$$a_s = a_n = \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{5.19}$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \tag{5.20}$$

$$l_p = 0 \tag{5.21}$$

5.3. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO ATRAVÉS DE NÓS FICTÍCIOS

NÓS FICTÍCIOS SE CONSTITUEM EM CAMADAS DE NÓS EXTERNOS AO DOMÍNIO DO PROBLEMA CONSIDERADO. SEU USO APRESENTA AS SEGUINTE VANTAGENS:

- 1) FACILIDADE NA APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO
- 2) UMA FORMA ÚNICA PARA OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES PARA OS NÓS REAIS DO DOMÍNIO; A VARIEDADE DE COEFICIENTES E TERMOS-FONTES RESULTANTES DO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO É MENOR QUE AO SE EMPREGAR OUTRAS METODOLOGIAS.

DES VANTAGENS:

AVUMENTO NOS GASTOS DE MEMÓRIA E AVUMENTO NO TEMPO DE PROCESSAMENTO.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NÓS FICTÍCIOS AO CONTOURNO DIREITO ($x = L_x$)

PARA CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET:

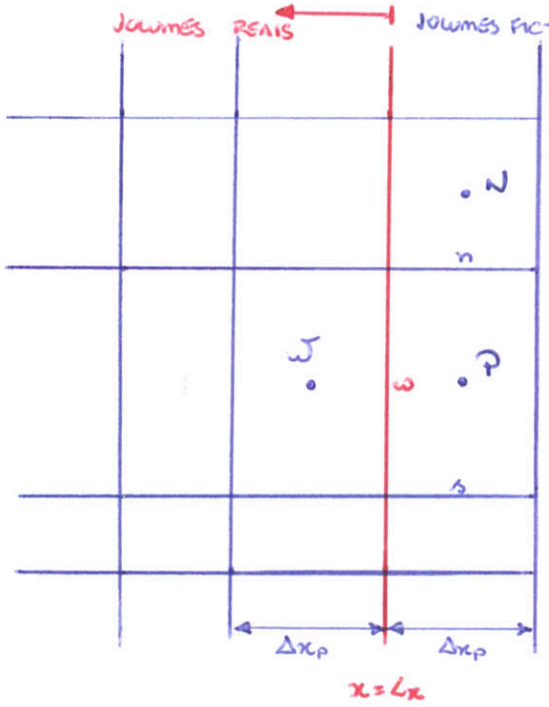


FIG. 5.4: APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTOURNO COM NÓS FICTÍCIOS NO CONTOURNO DIREITO ($x = L_x$)

$$\frac{T_p + T_J}{2} = T_w \text{ (CONHECIDA)} = T_{cc}(y) \tag{5.22}$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$T_p = -T_J + 2 T_{cc}(y) \tag{5.23}$$

QUE, NA FORMA DA EQ. (5.8) APRESENTA COMO COEFICIENTES/ TERMOS-FONTES:

$$a_p = 1 \tag{5.24}$$

$$a_w = -1 \tag{5.25}$$

$$a_e = a_s = a_n = 0 \tag{5.26}$$

$$b_p = 2 T_{cc}(y) \tag{5.27}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE JOWMES FICTÍCIOS AO CONTOURNO INFERIOR ($y=0$) PARA CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE DIRICHLET:

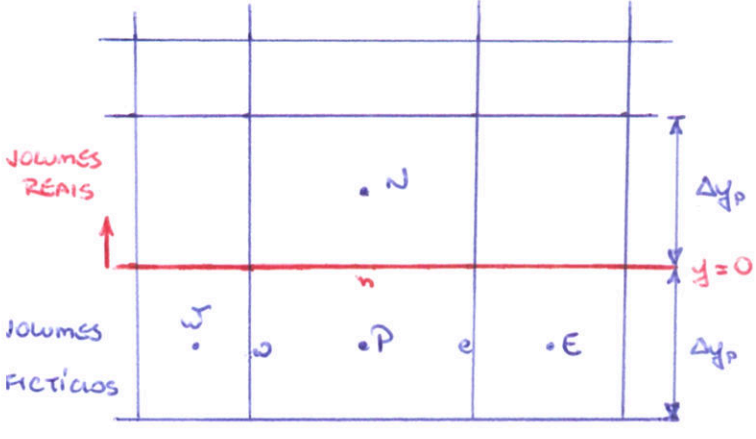


FIG. 5.5: APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTOURNO COM JOWMES FICTÍCIOS NO CONTOURNO INFERIOR ($y=0$)

$$\frac{T_P + T_N}{2} = T_n \text{ (CONHECIDA)} = T_{cc}(x) \tag{5.28}$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$T_P = -T_N + 2T_{cc}(x) \tag{5.29}$$

QUE, NA FORMA DA EQ. (5.8) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TERMOS-FONTES:

$$a_p = 1 \tag{5.30}$$

$$a_n = -1 \tag{5.31}$$

$$a_w = a_e = a_s = 0 \tag{5.32}$$

$$b_p = 2T_{cc}(x) \tag{5.33}$$

5.4. DISCRETIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS

• TEMPERATURA MÉDIA BIDIMENSIONAL

APLICANDO-SE A REGRA DO RETÂNGULO ASSOCIADA AO MÉTODO DE JOWMES FICTÍCIOS:

$$\bar{T}_{2D}(t) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{P=1}^{NVR} [T_P(t) \Delta x_p \Delta y_p] \tag{5.34}$$

SENDO NVR OS JOWMES REAIS EM QUE O DOMÍNIO FOI DISCRETIZADO.

• TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO CONTOURNO NORTE (q_n):

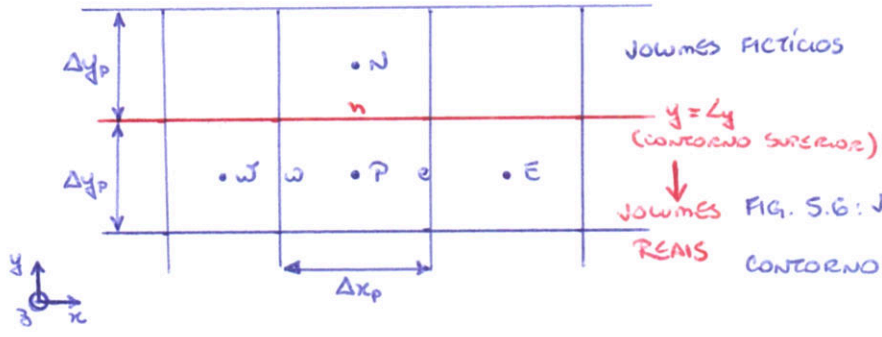


FIG. 5.6: JOWME DE CONTOURNO GEMÉICO ADJACENTE AO CONTOURNO SUPERIOR (CONTOURNO NORTE, $y=L_y$).

UTILIZANDO-SE A APROXIMAÇÃO DA DERIVADA COM CDS E AUXÍLIO DO VOLUME FICTÍCIO:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x, y=L_y} \approx \frac{T_N - T_P}{\Delta y_p} \tag{5.35}$$

E ASSOCIANDO-SE A REGRA DO RETÂNGULO PARA A APROXIMAÇÃO DA INTEGRAL, TEM-SE QUE A EQ. (5.4) RESULTA EM

$$q_n(t) = - \sum_{p=2}^{N_x-1} \left[\frac{T_N(t) - T_P(t)}{\Delta y_p} \Delta x_p \cdot k_n \right]_{y=L_y} \tag{5.36}$$

QUE É VÁLIDA APENAS PARA OS VOLUMES REAIS ADJACENTES AO CONTOURNO NORTE ($y=L_y$) E ONDE:

T_P É A TEMPERATURA EM CADA x_p , DO VOLUME DE CONTROLE P CUIA FACE NORTE COINCIDE COM O CONTOURNO SUPERIOR (NORTE) DO DOMÍNIO.

T_N É A TEMPERATURA OBTIDA NO VOLUME FICTÍCIO ADJACENTE AO CONTOURNO NORTE DO DOMÍNIO

t É O INSTANTE DE TEMPO CONSIDERADO

k_n É A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NA FACE NORTE DO VOLUME DE CONTROLE P

N_x É O NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE NA DIREÇÃO x (INCLUINDO FICTÍCIOS).

• TAXA DE TRANSPERÊNCIA DE CALOR NO CONTOURNO LESTE (q_e):

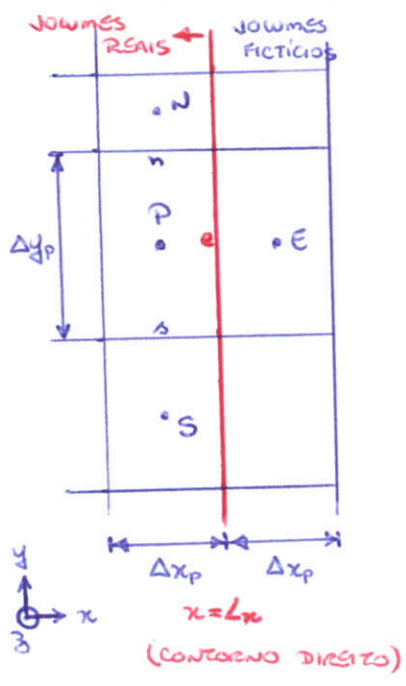


FIG. 5.7: VOLUMES DE CONTROLE GENÉRICO ADJACENTE AO CONTOURNO DIREITO (CONTOURNO LESTE, $x=L_x$).

UTILIZANDO-SE A APROXIMAÇÃO DA DERIVADA COM CDS E AUXÍLIO DO VOLUME FICTÍCIO:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L_x, y} \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x_p} \tag{5.37}$$

E ASSOCIANDO-SE A REGRA DO RETÂNGULO PARA A APROXIMAÇÃO DA INTEGRAL, TEM-SE QUE A EQ. (5.5) RESULTA EM

$$q_e(t) = - \sum_{p=2}^{N_y-1} \left[\frac{T_e(t) - T_p(t)}{\Delta x_p} \Delta y_p \cdot k_e \right]_{x=L_x} \quad (5.38)$$

QUE É VÁLIDA APENAS PARA OS VOLUMES REAIS ADJACENTES AO CONTOURNO LESTE ($x=L_x$) E ONDE:

T_p É A TEMPERATURA EM CADA x_p , DO VOLUME DE CONTROLE P CUJA FACE LESTE COINCIDE COM O CONTOURNO DIREITO (LESTE) DO DOMÍNIO.

T_e É A TEMPERATURA OBTIDA NO VOLUME FICTÍCIO ADJACENTE AO CONTOURNO LESTE DO DOMÍNIO

k_e É A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NA FACE LESTE DO VOLUME DE CONTROLE P

N_y É O NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE NA DIREÇÃO y (INCLUINDO FICTÍCIOS).

5.5. GAUSS-SEIDEL BIDIMENSIONAL

O SISTEMA DE EQUAÇÕES REPRESENTADO PELA EQ. (5.8) PODE SER RESOLVIDO COM O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL ATRAVÉS DA SEGUINTE EXPRESSÃO:

$$T_p = \frac{(a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b_p)}{a_p} \quad (5.39)$$

QUE É VÁLIDA PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLE, $N_v = N_x \cdot N_y$.

5.6. ALGORITMO:

CONSIDERANDO-SE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM RÉGIME PERMANENTE, SEM GERAÇÃO DE CALOR ($\dot{q} = 0$), COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA (k) CONSTANTE, MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO ($\Delta x = \text{CONST. 1}$; $\Delta y = \text{CONST. 2}$), ALÉM DE $\Delta z = 1$, TEM-SE O SEGUINTE ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: L_x , L_y , k , T_{cc} (CONDIÇÕES DE CONTOURNO: FUNÇÕES OU TABELAS), N_x E N_y (INCLUINDO FICTÍCIOS), I (NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES).

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO DE CÁLCULO COM

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x - 2} \quad (5.40)$$

$$\Delta y = \frac{L_y}{N_y - 2} \quad (5.41)$$

E AVALIAR x_p E y_p PARA CADA VOLUME DE CONTROLE.

3) FAZER $T_p = 0$ PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLE (ESTIMATIVA INICIAL DA SOLUÇÃO)

4) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DOS VOLUMES REAIS, EQS. (5.18) A (5.21), DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO DIREITO, EQS. (5.24) A (5.27), CONDIÇÃO DE CONTOURNO INFERIOR, EQS. (5.30) A (5.33) E RELAÇÕES ANÁLOGAS PARA OS CONTOURNOS ESQUERDO (OESTE) E SUPERIOR (NORTE).

5) RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES UTILIZANDO A SQ. (5.39).

6) VOLTAR AO ITEM 5 ATÉ Atingir I ITERAÇÕES.

7) IMPRIMIR E VISUALIZAR T_p .

8) CALCULAR E APRESENTAR \bar{T} , q_n E q_e .

5.7. SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA A DIFUSÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL:

SÃO APRESENTADAS, A SEGUIR, DUAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE, EQ. (5.17), BEM COMO AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO ASSOCIADAS.

• PROBLEMA 1: CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTEs CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$\begin{cases} T(0, y) = T(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} T(L_x, y) = 100 y L_x \end{cases} \quad (5.43)$$

$$\begin{cases} T(x, L_y) = 100 x L_y \end{cases} \quad (5.44)$$

TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE:

$$T(x, y) = 100 x y \quad (5.45)$$

$$\bar{T} = 25 L_x L_y \quad (5.46)$$

$$q_e = -50 K L_y^2 \quad (5.47)$$

$$q_n = -50 K L_x^2 \quad (5.48)$$

PARA ESTE PROBLEMA, AO SE EMPREGAR FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES (CDS) PARA A DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE, VERIFICA-SE QUE O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA O CAMPO DE TEMPERATURAS É NULO. ASSIM, APÓS UM NÚMERO SUFICIENTE DE ITERAÇÕES, A SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O CAMPO DE TEMPERATURAS DEVE COINCIDIR COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA, A MENOS DE ERROS DE ARREDONDAMENTO. NO CASO DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS, NO ENTANTO, EXISTEM ERROS DE DISCRETIZAÇÃO.

• PROBLEMA 2: CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTEs CONDIÇÕES DE CONTOURNO:

$$\begin{cases} T(0, y) = T(L_x, y) = T(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\begin{cases} T(x, L_y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \end{cases} \quad (5.50)$$

TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE:

$$T(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (5.51)$$

$$\bar{T} = \frac{2L_x}{\pi^2 L_y \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.52)$$

$$q_c = \frac{\kappa}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.53)$$

$$q_n = -2\kappa \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) \quad (5.54)$$

5.8. APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE NEUMANN E ROBIN COM O USO DE VOLUMES FICTÍCIOS

CONSIDERANDO-SE O CONTOURNO DIREITO (CONTOURNO LESTE), CONFORME MOSTRADO NA FIG. 5.8.

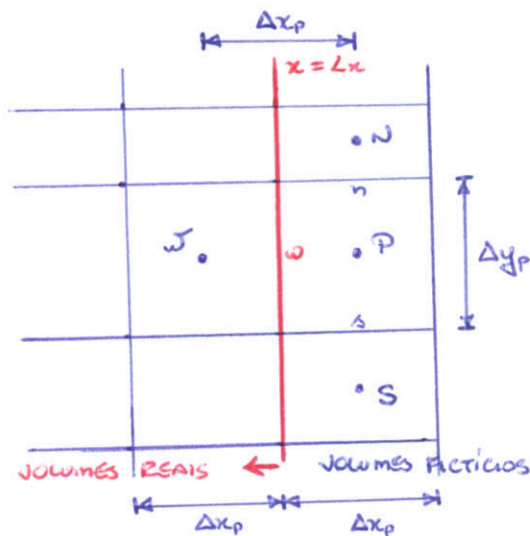


FIG. 5.8: VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO ADJACENTE AO CONTOURNO DIREITO (CONTOURNO LESTE, $x=L_x$) PARA A APLICAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTOURNO COM VOLUMES FICTÍCIOS

• CONDIÇÃO DE CONTOURNO DE NEUMANN

ADMITINDO-SE A LEI DE FOURIER EM $x=L_x$:

$$-\left(\kappa A \frac{dT}{dx}\right)_{x=L_x} = q_L \quad (5.55)$$

QUE, APLICADA AO VOLUME FICTÍCIO P É ESCRITA COMO:

$$-\left(\kappa A \frac{dT}{dx}\right)_\omega = q_L \quad (5.56)$$

SENDO q_L UM VALOR CONHECIDO. DISCRETIZANDO-SE A EQ. (5.56) PARA O VOLUME DE CONTROLE

P APRESENTADO NA FIG. 5.8, OBTÉM-SE:

$$-\kappa_0 \Delta y_p \Delta z \frac{(T_P - T_J)}{\Delta x_p} = q_L \quad (5.57)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO:

$$T_p = T_w - \frac{q_c \Delta x_p}{k_w \Delta y_p \Delta z} \tag{5.58}$$

E EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (5.8) APRESENTA COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_p = a_w = 1 \end{array} \right. \tag{5.59}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e = a_n = a_s = 0 \end{array} \right. \tag{5.60}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_p = - \frac{q_c \Delta x_p}{k_w \Delta y_p \Delta z} \end{array} \right. \tag{5.61}$$

CASO T_{Lx} SEJA UMA VARIÁVEL DE INTERESSE, ELA PODE SER ESTIMADA ATRAVÉS DA SEGUINTE RELAÇÃO:

$$T_{Lx} = T_w = \frac{T_w + T_p}{2} \tag{5.62}$$

• CONDIÇÃO DE CONTOURO DE ROBIN

ADMITINDO-SE UMA IGUALDADE ENTRE AS TAXAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E POR CONVECÇÃO NO CONTOURO DIREITO, $x=Lx$, TEM-SE:

$$q_c = - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=Lx} = hA (T_{Lx} - T_{\infty}) \tag{5.63}$$

SENDO q_c , $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=Lx}$, k_w E T_{Lx} VALORES DESCONHECIDOS.

DISCRETIZANDO-SE, ENTÃO, A EQ. (5.63) PARA O VOLUME DE CONTROLE P APRESENTADO NA FIG. 5.8, OBTÉM-SE

$$-k_w \Delta y_p \Delta z \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_p} = h \Delta y_p \Delta z (T_{Lx} - T_{\infty}) \tag{5.64}$$

ADMITINDO-SE, PORÉM, QUE

$$T_{Lx} = \frac{T_w + T_p}{2} \tag{5.65}$$

E DIVIDINDO-SE A EQ. (5.64) POR $\Delta y_p \Delta z$, OBTÉM-SE

$$-k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_p} = h \left[\frac{(T_w + T_p)}{2} - T_{\infty} \right] \tag{5.66}$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$2k_w T_w - 2k_w T_p = h \Delta x_p T_w + h \Delta x_p T_p - 2h \Delta x_p T_{\infty} \tag{5.67}$$

E EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (5.8) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

(12)

$$a_p = h \Delta x_p + 2k_0$$

(5.68)

$$a_w = 2k_0 - h \Delta x_p$$

(5.69)

$$a_e = a_n = a_s = 0$$

(5.70)

$$b_p = 2h \Delta x_p T_{\infty}$$

(5.71)