CAP. 04: DIFUSÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE

4.1. MODELO MATEMÁTICO

DADA A EQUAÇÃO GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR EM COORDENADAS CARTESIANAS:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (4.1)$$

ADMITINDO-SE, ENTÃO, AS SEGUINTES SIMPLIFICAÇÕES:

- MODELO UNIDIMENSIONAL
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES
- ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x

OBTÉM-SE, ENTÃO, A SEGUINTE RELAÇÃO:

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q} \qquad (4.2)$$

QUE É CONHECIDA COMO EQUAÇÃO DE FOURIER. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CONTORNO (C.C) DE DIRICHLET, CONSTANTES NO TEMPO:

$$\begin{cases} T(0,t)=T_A & (4.3)\\ T(L,t)=T_B & (4.4)\end{cases}$$

E A CONDIÇÃO INICIAL (C.I) PARA A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS:

$$T(x,0)=T_i(x) \qquad (4.5)$$

SENDO T_i UMA FUNÇÃO DEPENDENTE DA COORDENADA ESPACIAL.

OBSERVAÇÃO: PARA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO, EM CERTOS CASOS COMO PROBLEMAS QUE ENVOLVEM RADIAÇÃO SOLAR, AS CONDIÇÕES DE DIRICHLET PODEM SER FUNÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO.

AS VARIÁVEIS / PROPRIEDADES EXISTENTES NA EQ. (4.2) SÃO:

T: TEMPERATURA [°C OU K]

k: CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MEIO [W/mK]

ρ: MASSA ESPECÍFICA DO MEIO [kg/m³]

c_p: CALOR ESPECÍFICO DO MEIO [J/kgK]

x: COORDENADA ESPACIAL [m]

t: COORDENADA TEMPORAL [s]

A: ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE [m²]

$\dot{q}$: TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR $[W/m^3]$

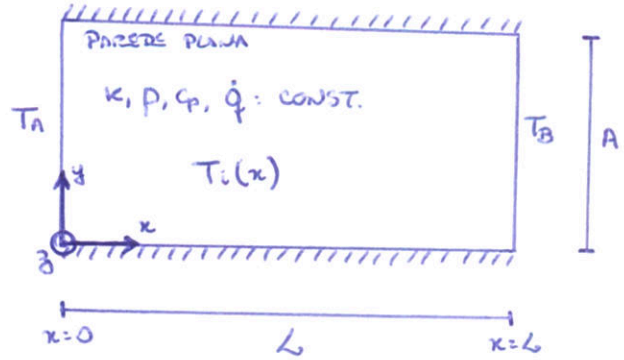


FIG. 4.1: DIFUSÃO DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE EM UMA PAREDE PLANA.

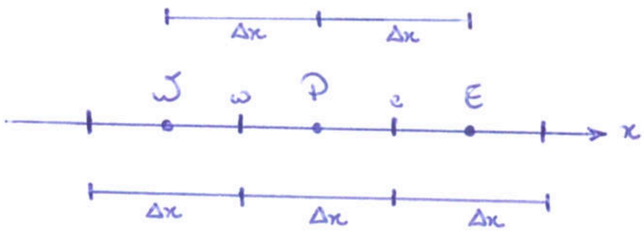
4.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE

- DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS, $T(x,t)$, OBTIDA DA SOLUÇÃO DA EQ. (4.2).
- TEMPERATURA MÉDIA, $\overline{T}$, OBTIDA PARA TODO O DOMÍNIO, PARA CADA INSTANTE DE TEMPO t:

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)\,dx \tag{4.6}$$

4.3. MODELO NUMÉRICO EMPREGANDO-SE A FORMULAÇÃO θ:

CONSIDERANDO-SE O VOLUME DE CONTROLE P, PERTENCENTE A UMA MALHA UNIFORME, CONFORME MOSTRADO NA FIG. 4.2:



Δx = CONST.

FIG. 4.2: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

E INTEGRANDO-SE A EQ. (4.2) AO LONGO DO TEMPO, DESDE $(t-\Delta t)$ ATÉ (t) TEM-SE:

$$\int_{t-\Delta t}^{t}\int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left[\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz\,dt = \int_{t-\Delta t}^{t}\int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}\right]dx\,dy\,dz\,dt \tag{4.7}$$

- INTEGRAIS ESPACIAIS:

$$\int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}\right]dx\,dy\,dz = \left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + \dot{q}_P\,\Delta x\right]\Delta y\,\Delta z$$

ADMITINDO-SE k E $\dot{q}$ CONSTANTES, BEM COMO $\Delta y\,\Delta z = A$, TEM-SE

$$= kA\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] + \dot{q}\,\Delta x\,A$$

UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES (CDS-2) PARA AVALIAR AS DERIVADAS $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e$ E $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w$, OBTÉM-SE

$$= kA\left[\frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x}\right] + \dot{q}\,\Delta x\, A$$

$$= \frac{kA}{\Delta x}\left(T_W + T_E - 2T_P\right) + \dot{q}\,\Delta x\, A \qquad (4.8)$$

$$\int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left[\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz = (\rho)_P\,(c_p)_P\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ADMITINDO-SE ρ E c_p CONSTANTES E $\Delta y\,\Delta z = A$, TEM-SE

$$= \rho\, c_p\, \Delta x\, A \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P \qquad (4.9)$$

- INTEGRAIS TEMPORAIS:

$$\int_{t-\Delta t}^{t}\left[\rho\, c_p\, \Delta x\, A\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P\right]dt = \rho\, c_p\, \Delta x\, A\,\left(T_P - T_P^0\right) \qquad (4.10)$$

ONDE T_P SE REFERE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO INSTANTE DE TEMPO t (SOLUÇÃO A DETERMINAR)

T_P^0 SE REFERE À TEMPERATURA DO VOLUME P AVALIADA NO INSTANTE DE TEMPO $t-\Delta t$ (SOLUÇÃO CONHECIDA DE UM INSTANTE DE TEMPO ANTERIOR OU CONDIÇÃO INICIAL).

$$\int_{t-\Delta t}^{t}\left\{\frac{kA}{\Delta x}\left(T_W + T_E - 2T_P\right) + \dot{q}\,\Delta x\, A\right\}dt = \left[\frac{kA}{\Delta x}\left(T_W^\theta + T_E^\theta - 2T_P^\theta\right) + \dot{q}\,\Delta x\, A\right]\Delta t \qquad (4.11)$$

ONDE

$$T_P^\theta = T_P^0 + \theta\left(T_P - T_P^0\right) \qquad (4.12)$$

COM

$$0 \leq \theta \leq 1 \qquad (4.13)$$

- SE $\theta = 0$, $T_P^\theta = T_P^0$ OU SEJA, TRATA-SE DA TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE ANTERIOR $(t-\Delta t)$
- SE $\theta = 1$, $T_P^\theta = T_P$ OU SEJA, TRATA-SE DA TEMPERATURA DO VOLUME P NO INSTANTE ATUAL (t)

CASOS ESPECIAIS:

$\theta = 0$ FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

$\theta = 1/2$ FORMULAÇÃO CRANK-NICOLSON

$\theta = 1$ FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA

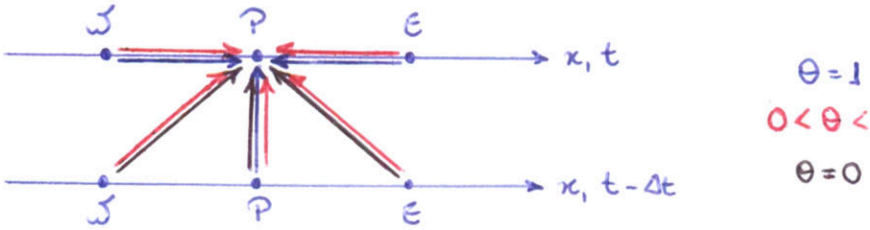


FIG. 4.3: INTEGRAÇÃO NO TEMPO COM A FORMULAÇÃO θ.

UTILIZANDO-SE AS EQS. (4.10) A (4.12) NA EQ. (4.7) CHEGA-SE A:

$$\rho c_p \Delta x A \left(T_P - T_P^0\right) = \frac{k A}{\Delta x}\left[T_E^0 + \theta\left(T_E - T_E^0\right) + T_W^0 + \theta\left(T_W - T_W^0\right) - 2T_P^0 - 2\theta\left(T_P - T_P^0\right)\right]\Delta t + \dot{q}\,\Delta x A \Delta t \qquad (4.14)$$

QUE PODE SER REESCRITA NA FORMA

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \qquad (4.15)$$

NA QUAL:

$$a_E = a_W = \frac{\theta k A \Delta t}{\Delta x} \qquad (4.16)$$

$$a_P = a_W + a_E + \rho c_p \Delta x A \qquad (4.17)$$

COEFICIENTES

$$b_P = b' T_P^0 + b''\left(T_W^0 + T_E^0\right) + \dot{q}\,\Delta x A \Delta t \qquad (4.18)$$

$$b' = \rho c_p \Delta x A + 2(\theta - 1)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} \qquad (4.19)$$

$$b'' = (1 - \theta)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} \qquad (4.20)$$

TERMOS-FONTES

QUE SÃO VÁLIDOS PARA OS VOLUMES INTERNOS $(P = 2, 3, \ldots, N-1)$.

- ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO ESQUERDO $(P = 1)$

EM $x = 0$, ONDE A CONDIÇÃO DE CONTORNO É DADA PELA EQ. (4.3), $T(0,t) = T_A$, TEM-SE:

$$\left.\begin{aligned} a_w &= 0 && (4.21)\\ a_e &= \frac{\theta k A \Delta t}{\Delta x} && (4.22)\\ a_p &= 3 a_e + \rho c_p \Delta x A && (4.23)\end{aligned}\right\} \text{COEFICIENTES}$$

$$\left.\begin{aligned} b_p &= b' T_P^0 + b'' T_E^0 + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2 T_A \frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.24)\\ b' &= \rho c_p \Delta x A + 3(\theta - 1)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.25)\\ b'' &= (1-\theta)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.26)\end{aligned}\right\} \text{TERMO-FONTE}$$

- ALTERAÇÕES PARA O VOLUME ADJACENTE AO CONTORNO DIREITO ($P = N$)

EM $x = L$, ONDE A CONDIÇÃO DE CONTORNO É DADA PELA EQ. (4.4), $T(L,t) = T_B$, TEM-SE

$$\left.\begin{aligned} a_e &= 0 && (4.27)\\ a_w &= \frac{\theta k A \Delta t}{\Delta x} && (4.28)\\ a_p &= 3 a_w + \rho c_p \Delta x A && (4.29)\end{aligned}\right\} \text{COEFICIENTES}$$

$$\left.\begin{aligned} b_p &= b' T_P^0 + b'' T_W^0 + \dot{q} A \Delta x \Delta t + 2 T_B \frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.30)\\ b' &= \rho c_p \Delta x A + 3(\theta - 1)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.31)\\ b'' &= (1-\theta)\frac{k A \Delta t}{\Delta x} && (4.32)\end{aligned}\right\} \text{TERMO-FONTE}$$

- APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DA EQ. (4.6) ATRAVÉS DA REGRA DO TRAPÉZIO:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L}\left[\frac{(T_A + T_1)}{2} x_1 + \sum_{P=2}^{N} \frac{(T_W + T_P)}{2}(x_P - x_W) + \frac{(T_N + T_B)}{2}(L - x_N)\right] \qquad (4.33)$$

QUE NO CASO DE UMA MALHA UNIFORME ($\Delta x = \text{CONST}$) PODE SER REESCRITA COMO:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L}\left[\frac{(T_A + T_1)}{2}\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\sum_{P=2}^{N}(T_W + T_P) + \frac{(T_N + T_B)}{2}\frac{\Delta x}{2}\right] \qquad (4.34)$$

OU AINDA:

$$\bar{T}(t) = \frac{\Delta x}{2L}\left[\frac{(T_A + T_1)}{2} + \sum_{P=2}^{N}(T_W + T_P) + \frac{(T_N + T_B)}{2}\right] \qquad (4.35)$$

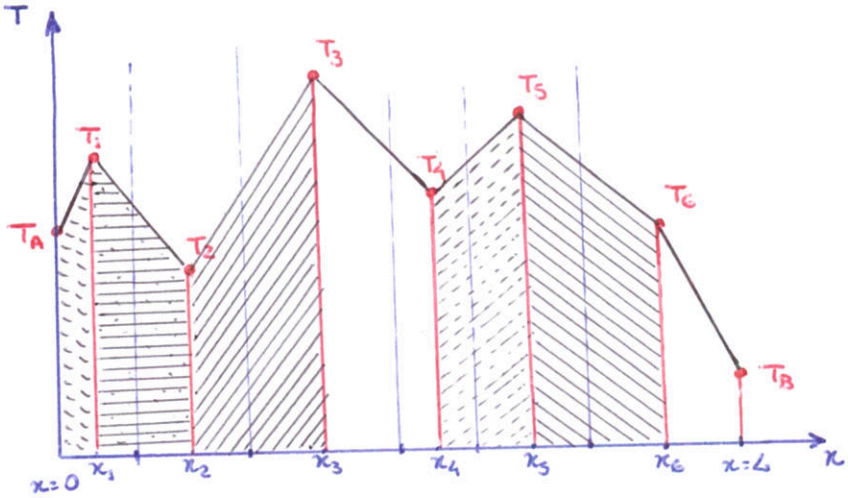


FIG. 4.4: EXEMPLO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DA REGRA DO TRAPÉZIO

- ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: T_A, T_B, ρ, c_p, k, A, L, $\dot{q}$, θ, T_i (QUE PODE SER UMA FUNÇÃO), t_F, N, m, SENDO:

   t_F O INSTANTE DE TEMPO FINAL NO QUAL SE DESEJA DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS $T(x)$

   m É O NÚMERO TOTAL DE AVANÇOS NO TEMPO DE $t=0$ A $t=t_F$.

2) DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL COM MALHA UNIFORME:

$$\Delta x = \frac{L}{N} \tag{4.36}$$

3) DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL (DETERMINAÇÃO DO PASSO DE TEMPO Δt):

$$\Delta t = \frac{t_F}{m} \tag{4.37}$$

4) APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL FAZENDO-SE $T_P^0(x) = T_i(x)$ E $t=0$.

5) ATUALIZAÇÃO DO INSTANTE DE TEMPO: FAZER $t = t + \Delta t$

6) CALCULAR OS COEFICIENTES (a_w, a_e, a_P) E TERMOS-FONTES (b_P) DE TODOS OS VOLUMES DE CONTROLE – EQs. (4.16) A (4.20) PARA OS VOLUMES INTERNOS, EQs. (4.21) A (4.26) PARA O VOLUME $P=1$ E EQs. (4.27) A (4.32) PARA O VOLUME $P=N$.

7) COM O MÉTODO TDMA, RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES RESULTANTE PARA OBTER A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS $T(x)$ NO INSTANTE t.

8) AVALIAR A TEMPERATURA MÉDIA $\overline{T}(t)$

9) ATUALIZAR O VETOR T_P^0, FAZENDO $T_P^0 = T_P$, $P = 1, 2, \ldots, N$.

10) RETORNAR AO ITEM 5 ATÉ QUE SE ATINJA $t = t_F$.

11) ESCREVER E VISUALIZAR $T(x)$ PARA $t = t_F$.

12) ESCREVER E VISUALIZAR $\bar{T}(t)$, PARA t DE 0 A t_F.

CASO A CONDUTIVIDADE TÉRMICA SEJA VARIÁVEL, OU SEJA, $k = k(T)$, SERÁ NECESSÁRIO ITERAR OS ITENS 6 E 7 EM CADA INSTANTE DE TEMPO t ATÉ QUE SE SATISFAÇA ALGUM CRITÉRIO DE PARADA (CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA) PRÉ-DEFINIDO.

4.4. SOLUÇÃO ANALÍTICA:

CONSIDERANDO-SE ρ, c_p, k CONSTANTES E $\dot{q} = 0$, TEM-SE QUE A EQ. (4.2) PODE SER SIMPLIFICADA ORIGINANDO A SEGUINTE EXPRESSÃO:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{4.38}$$

SENDO α A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DO MEIO $[m^2/s]$, AVALIADA POR

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \tag{4.39}$$

ASSUMINDO-SE AS SEGUINTES CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$T(0,t) = T(L,t) = 0 \tag{4.40}$$

E COMO CONDIÇÃO INICIAL

$$T(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{4.41}$$

TEM-SE COMO SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CAMPO DE TEMPERATURAS

$$T(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \tag{4.42}$$

E PARA A TEMPERATURA MÉDIA

$$\bar{T}(t) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \tag{4.43}$$

4.5. SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE

UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É DITA CONVERGENTE QUANDO O MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE E A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL. NESSE CASO,

$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ \Delta x, \Delta t \to 0}} \left| E_n(T_P) \right| = 0 \qquad (4.44)$$

OU SEJA, UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE TENDE À SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUANDO $i \to \infty$ (NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO) E $\Delta x, \Delta t \to 0$ (O TAMANHO DOS ELEMENTOS ESPACIAL E TEMPORAL TENDE A ZERO).

- CONSISTÊNCIA: UM MODELO NUMÉRICO É CONSISTENTE SE A EQUAÇÃO DISCRETIZADA TENDE À EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORIGINAL QUANDO Δx E Δt TENDEM A ZERO.

POR EXEMPLO, AO SE CONSIDERAR A EQ. (4.38), UMA POSSIBILIDADE DE DISCRETIZAÇÃO CONDUZ À SEGUINTE EXPRESSÃO:

$$\frac{(T_P - T_P^0)}{\Delta t} = \alpha \frac{(T_E + T_W - 2T_P)}{(\Delta x)^2} \qquad (4.45)$$

AO SE FAZER $\Delta x, \Delta t \to 0$ E APLICANDO-SE A DEFINIÇÃO DE DERIVADA BEM COMO A EXPANSÃO EM SÉRIES DE TAYLOR, PODE-SE MOSTRAR QUE A EQ. (4.45) TENDE À EQ. (4.38), DE MODO QUE O MODELO NUMÉRICO É DITO CONSISTENTE.

- ESTABILIDADE: UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL SE O ERRO NUMÉRICO (E_n) TENDE A UM VALOR FINITO (δ) QUANDO O NÚMERO DE ITERAÇÕES (i) TENDE AO INFINITO, MANTENDO-SE Δx E Δt FIXOS:

$$\lim_{i \to \infty} \left| E_n(T_P) \right| = \delta_P \qquad (4.46)$$

POR EXEMPLO, PARA AS DISCRETIZAÇÕES VISTAS NESTE CAPÍTULO, COM $\dot{q} = 0$, TEM-SE QUE:

- A SOLUÇÃO NUMÉRICA É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL SE $1/2 \leq \theta \leq 1$.
- PARA $0 \leq \theta < 1/2$, A SOLUÇÃO NUMÉRICA É ESTÁVEL APENAS SE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2 - 4\theta} \qquad (4.47)$$

SE $\theta = 0$, A CONDIÇÃO A SER SATISFEITA É

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (4.48)$$

PARA $\theta = 1/2$ TEM-SE QUE

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \infty \qquad (4.49)$$

DE MODO QUE A SOLUÇÃO É INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL.