

# Teoria do código Prog5\_CFD1

## 1 Modelo matemático, igual ao Cap. 7 da apostila

Na equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- escoamento 1Dp laminar
- velocidade constante  $u > 0$
- propriedades constantes:  $\rho$ ,  $k$ ,  $c_p$
- sem geração de calor  $\dot{q}$
- sem dissipação viscosa

obtém-se a eq. de advecção-difusão de calor 1Dp, dada por

$$\underbrace{\text{Pe} \frac{dT}{dx}}_{\text{advecção}} = \underbrace{\frac{d^2T}{dx^2}}_{\text{difusão}} \quad (1)$$

convecção

onde

$$\text{Pe} = \frac{\rho u c_p L}{k} = \frac{uL}{\alpha} \quad (\text{n}^\circ \text{ de Peclet, constante}) \quad (2)$$

$T$  = temperatura ( °C ou K)

$u$  = velocidade (m/s)

$x$  = coordenada espacial (m)

$k$  = condutividade térmica (W/mK)

$\rho$  = massa específica (kg/m<sup>3</sup>)

$c_p$  = calor específico (J/kg.K)

$L$  = comprimento do domínio de cálculo (m)

$\alpha$  = difusividade térmica (m<sup>2</sup>/s)

Condições de contorno:

$$T(0) = 0 \quad (3)$$

$$T(1) = 1 \quad (4)$$

A solução analítica das eqs.(7.1), (7.3) e (7.4) é

$$T = \frac{(e^{x\text{Pe}} - 1)}{(e^{\text{Pe}} - 1)} \quad (5)$$

E a solução analítica da temperatura média ao longo do domínio (variável secundária):

$$\bar{T} = \frac{1}{Pe} - \frac{1}{e^{Pe}-1} \quad (6)$$

## 2 Discretização do modelo matemático

Integrando-se a eq. (1) sobre o volume de controle P da fig. 1, obtém-se

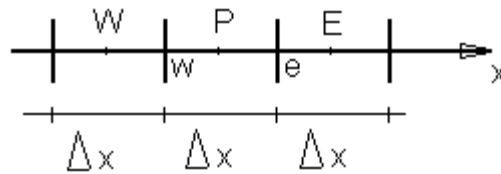


Figura 1: Malha 1D uniforme

$$\int_{x_w}^{x_e} Pe \frac{dT}{dx} dx = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d^2T}{dx^2} dx \quad (7)$$

ou

$$Pe \int_{x_w}^{x_e} dT = \int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx} \left( \overbrace{\frac{dT}{dx}}^f \right) dx$$

ou ainda

$$Pe \int_{x_w}^{x_e} dT = \int_{x_w}^{x_e} df$$

onde  $f = \frac{dT}{dx}$

que resulta em

$$Pe(T_e - T_w) = \left( \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \frac{dT}{dx} \right)_w \quad (8)$$

## 3 Aproximação UDS

Nesta primeira forma de aproximação, será feitas aproximações CDS para as derivadas e aproximações UDS para a variável incógnita nas faces, na forma da eq. (9) e eq. (10) respectivamente:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (9)$$

$$T_e \approx T_P \quad T_w \approx T_W \quad (10)$$

Substituindo as aproximações das eqs. (9) e (10) na eq. (8) ficaremos:

$$Pe(T_P - T_W) = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

Que ordenado conforme a eq. (11) fica na forma da eq. (12)

$$a_p T_P = a_e T_E + a_w T_W + b_p \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + Pe \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} \\ a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = 0 \right. \end{array} \right\} \text{volumes } P = 2 \text{ a } N-1 \quad (12)$$

### 3.1 Aplicação das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno será feita sem utilizar volumes fictícios, desta forma a condição de contorno será aplicada diretamente na equação discretizada (eq. (8)).

#### **P = 1**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno oeste (w), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx 2 \frac{T_P - T_w}{\Delta x} = 2 \frac{T_P}{\Delta x} \quad (13)$$

$$T_w \approx T(0) = 0 \quad (14)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face oeste eqs. (13) e (14) e as aproximações para a face leste na eq. (8) teremos:

$$PeT_p = \frac{T_e - T_p}{\Delta x} - 2 \frac{T_p}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (15):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} + Pe \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = 0 \right. \end{array} \right\} \text{volume } P = 1 \quad (15)$$

### **P = N**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno leste (e), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_e \approx 2 \frac{T_e - T_p}{\Delta x} = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} \quad (16)$$

$$T_e \approx T(1) = 1 \quad (17)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face leste eqs. (16) e (17) e as aproximações para a face oeste na eq. (8) teremos:

$$Pe(T_p - T_w) = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} - 2 \frac{T_p - T_w}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (18):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + Pe \\ a_e = 0 \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} + Pe \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = \frac{2}{\Delta x} \right. \end{array} \right\} \text{volume } P = N \quad (18)$$

## 4 Aproximação CDS

Nesta forma de aproximação, será feitas aproximações CDS tanto para as derivadas e quanto para a variável incógnita nas faces, na forma da eq. (19) e eq. (20) respectivamente:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (19)$$

$$T_e \approx \frac{T_P + T_E}{2} \quad T_w \approx \frac{T_W + T_P}{2} \quad (20)$$

Substituindo as aproximações das eqs. (19) e (20) na eq. (8) ficaremos:

$$Pe \left( \frac{T_P + T_E}{2} - \frac{T_W + T_P}{2} \right) = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

Que ordenado conforme a eq. (11) fica na forma da eq. (21)

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + \frac{Pe}{2} \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} - \frac{Pe}{2} \\ a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = 0 \right. \end{array} \right\} \text{volumes } P = 2 \text{ a } N-1 \quad (21)$$

Neste caso para não ocorrer oscilações numéricas no método CDS não pode ocorrer troca de sinal entre  $a_w$  e  $a_e$ , portanto a condição a ser satisfeita é a dada pela eq. (22):

$$a_e \geq 0 \quad \frac{1}{\Delta x} \geq \frac{Pe}{2} \quad \text{ou} \quad Pe \Delta x \leq 2 \quad (22)$$

### 4.1 Aplicação das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno será feita sem utilizar volumes fictícios, desta forma a condição de contorno será aplicada diretamente na equação discretizada (eq. (8)).

**P = 1**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno oeste (w), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx 2 \frac{T_p - T'_w}{\Delta x} = 2 \frac{T_p}{\Delta x} \quad (23)$$

$$T_w \approx T(0) = 0 \quad (24)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face oeste eqs. (23) e (24) e as aproximações para a face leste na eq. (8) teremos:

$$Pe \left( \frac{T_p + T_e}{2} - 0 \right) = \frac{T_e - T_p}{\Delta x} - 2 \frac{T_p}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (25):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} - \frac{Pe}{2} \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} + \frac{Pe}{2} \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = 0 \right. \end{array} \right\} \text{volume } P = 1 \quad (25)$$

## **P = N**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno leste (e), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx 2 \frac{T_e - T_p}{\Delta x} = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} \quad (26)$$

$$T_e \approx T(1) = 1 \quad (27)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face leste eqs. (26) e (27) e as aproximações para a face oeste na eq. (8) teremos:

$$Pe \left( 1 - \frac{T_w + T_p}{2} \right) = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} - \frac{T_p - T_w}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (28):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + \frac{Pe}{2} \\ a_e = 0 \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} - \frac{Pe}{2} \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_p = \frac{2}{\Delta x} - Pe \end{array} \right\} \text{volume } P = N \quad (28)$$

## 5 Aproximação UDS com correção adiada

Nesta forma de aproximação, será feito aproximações CDS para as derivadas e aproximações UDS com correção adiada para a variável incógnita nas faces. Isto é feito para facilitar ou até viabilizar a convergência em vários casos de CFD para segunda ordem de acurácia, podendo até aumentar a diagonal dominância da matriz de coeficientes.

Isto é feito considerando os termos de aproximação para CDS ou mistura no termo fonte, ou seja, este tipo de aproximação é uma aproximação CDS iterativa.

As aproximações ficam na forma da eq. (29) e eq. (30) respectivamente:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad \left( \frac{dT}{dx} \right)_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (29)$$

$$T_e \approx T_P + \beta \frac{T_E^* - T_P^*}{2} \quad T_w \approx T_W + \beta \frac{T_P^* - T_W^*}{2} \quad (30)$$

onde:  $\beta$  é o coeficiente de mistura ( $0 = \text{UDS}$ ,  $1 = \text{CDS}$ ) e o sufixo ‘\*’ é para indicar que a variável é considerada conhecida em cada passo iterativo.

Substituindo as aproximações das eqs. (29) e (30) na eq. (8) ficaremos:

$$Pe \left( T_P + \beta \frac{T_E^* - T_P^*}{2} - T_W - \beta \frac{T_P^* - T_W^*}{2} \right) = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

Que ordenado conforme a eq. (11) fica na forma da eq. (31)

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + Pe \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} \\ a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \\
 \text{termo fonte} \left\{ b_p = Pe \beta \frac{2T_p^* - T_E^* - T_W^*}{2} \right.
 \end{array} \right\} \text{volumes } P = 2 \text{ a } N-1 \quad (31)$$

## 5.1 Aplicação das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno será feita sem utilizar volumes fictícios, desta forma a condição de contorno será aplicada diretamente na equação discretizada (eq. (8)).

### P = 1

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno oeste (w), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_w \approx 2 \frac{T_p - T_w}{\Delta x} = 2 \frac{T_p}{\Delta x} \quad (32)$$

$$T_w \approx T(0) = 0 \quad (33)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face oeste eqs. (32) e (33) e as aproximações para a face leste na eq. (8) teremos:

$$Pe \left( T_p + \beta \frac{T_E^* - T_p^*}{2} - 0 \right) = \frac{T_E - T_p}{\Delta x} - 2 \frac{T_p}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (34):

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} + Pe \end{array} \right. \\
 \text{termo fonte} \left\{ b_p = Pe \beta \frac{T_p - T_E}{2} \right.
 \end{array} \right\} \text{volume } P = 1 \quad (34)$$



**P = N**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno leste (e), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx 2 \frac{T_e - T_p}{\Delta x} = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} \quad (35)$$

$$T_e \approx T(1) = 1 \quad (36)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face leste eqs. (35) e (36) e as aproximações para a face oeste na eq. (8) teremos:

$$Pe \left( 1 - T_w - \beta \frac{T_p^* - T_w^*}{2} \right) = 2 \frac{1 - T_p}{\Delta x} - \frac{T_p - T_w}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (37):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + Pe \\ a_e = 0 \\ a_p = \frac{3}{\Delta x} \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_p = Pe \left( \beta \frac{T_p - T_e}{2} - 1 \right) + \frac{2}{\Delta x} \right. \end{array} \right\} \text{volume } P = N \quad (37)$$

## 6 Aproximação Quick com correção adiada

Nesta forma de aproximação, será feito aproximações CDS para as derivadas e aproximações UDS com correção adiada para Quick na variável incógnita nas faces. Os motivos para se fazer a correção adiada são os mesmos da seção anterior. A aproximação Quick é de terceira ordem de acurácia, no entanto é mantido CDS nas derivadas, fazendo com que a solução final obtida pelo esquema que será mostrado a seguir seja de segunda ordem de acurácia.

As aproximações ficam na forma da eq. (38) e eqs. (39) e (40) respectivamente:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx \frac{T_e - T_p}{\Delta x} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx \frac{T_p - T_w}{\Delta x} \quad (38)$$

$$T_e \approx T_p + \Delta T_e^* \quad T_w \approx T_w + \Delta T_w^* \quad (39)$$

$$\Delta T_e^* = \frac{3T_E^* - 2T_P^* - T_W^*}{8} \quad \Delta T_w^* = \frac{3T_P^* - 2T_W^* - T_{WW}^*}{8} \quad (40)$$

Substituindo as aproximações das eqs. (38) e (39) na eq. (8) ficaremos:

$$Pe(T_p + \Delta T_e^* - T_w - \Delta T_w^*) = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}$$

Que ordenado conforme a eq. (11) fica na forma da eq. (41)

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{1}{\Delta x} + Pe \\ a_e = \frac{1}{\Delta x} \\ a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_p = Pe (\Delta T_w^* - \Delta T_e^*) \right. \end{array} \right\} \text{volumes } P = 3 \text{ a } N-1 \quad (41)$$

## 6.1 Aplicação das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno será feita sem utilizar volumes fictícios, desta forma a condição de contorno será aplicada diretamente na equação discretizada (eq. (8)).

### P = 1

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno oeste (w), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_w \approx \frac{9T_p - 8T_w - T_E}{3\Delta x} = \frac{9T_p - T_E}{3\Delta x} \quad (42)$$

$$T_w \approx T(0) = 0 \quad (43)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face oeste eqs. (42) e (43) e as aproximações para a face leste na eq. (8) teremos:

$$Pe(T_p + \Delta T_e^*) = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{9T_p - T_E}{3\Delta x}$$

$$\Delta T_e^* = \frac{3T_E^* - 2T_P^* - T_W^*}{8}$$

$$T_W^* = 2T_P^* - T_E^* \quad T_W^* = -T_P^*$$

$$\Delta T_e^* = \frac{3T_E^* - T_P^*}{8}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (44):

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_e = \frac{4}{3\Delta x} \\ a_p = \frac{4}{\Delta x} + Pe \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_p = -Pe \Delta T_e^* \end{array} \right\} \text{volume } P = 1 \quad (44)$$

**P = 2**

O que se altera neste caso são os  $\Delta T_e^*$  e  $\Delta T_w^*$ :

$$\Delta T_e^* = \frac{3T_E^* - 2T_P^* - T_W^*}{8}$$

$$\Delta T_w^* = \Delta T_e^* (P = 1) = \frac{3T_P^* - T_W^*}{8}$$

**P = N**

O que se alterará neste caso é as aproximações no contorno leste (e), pois neste caso este coincide com o contorno. Assim as aproximações nesta face ficam:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_e \approx \frac{8T_e - 9T_p + T_w}{3\Delta x} = \frac{8 - 9T_p + T_w}{3\Delta x} \quad (45)$$

$$T_e \approx T(1) = 1 \quad (46)$$

Aplicando as aproximações alteradas para a face leste eqs. (45) e (46) e as aproximações para a face oeste na eq. (8) teremos:

$$Pe(1 - T_w - \Delta T_w^*) = \frac{8 - 9T_p + T_w}{3\Delta x} - \frac{T_p - T_w}{\Delta x}$$

Que na forma da eq. (11) fica conforme a eq. (47):

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{4}{3\Delta x} + Pe \\ a_e = 0 \\ a_p = \frac{4}{\Delta x} \end{array} \right. \\
 \text{termo fonte} \left\{ b_p = Pe (\Delta T_w^* - 1) + \frac{8}{3\Delta x} \right.
 \end{array} \right\} \text{volume P = N} \quad (47)$$