

# 6. DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) 1Dp

## 6.1 Modelo Matemático

A partir das equações de Navier-Stokes, considerando-se:

- escoamento unidimensional (1D)
  - regime permanente (p)
  - coordenadas cilíndricas
  - escoamento plenamente desenvolvido em um duto circular (fig. 6.1)
- obtém-se

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \mu r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} = C \quad (6.1)$$

onde:

$u$  = componente da velocidade  $\vec{V}$  na direção  $x$  (m/s)

$r$  = direção coordenada radial [raio] (m)

$\mu$  = viscosidade absoluta do fluido, função de  $r$  (Pa.s)

$p$  = pressão estática do fluido (Pa)

$C$  = constante (Pa/m)

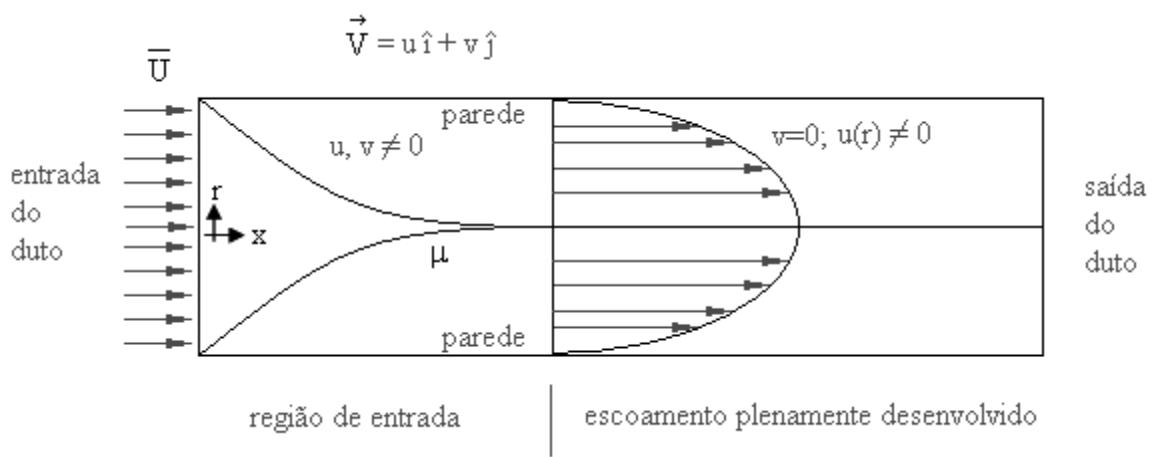


Figura 6.1: Escoamento em um duto circular

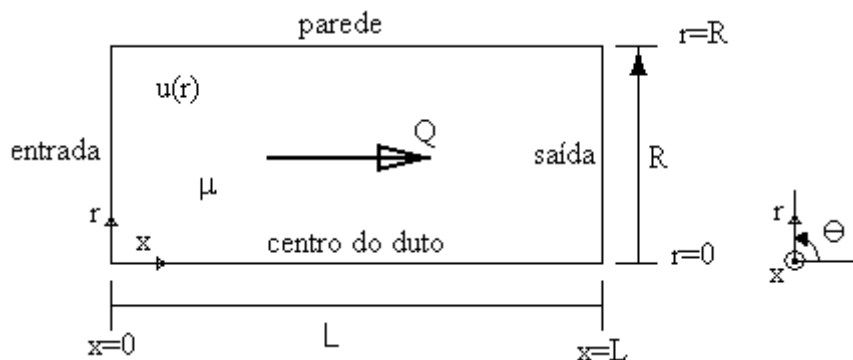


Figura 6.2: Esquema do problema físico

As condições de contorno são dadas por (fig. 6.2):

- Dirichlet (velocidade conhecida) em  $r = R$ :

$$u(R) = 0 \quad (\text{condição de não escorregamento}) \quad (6.2)$$

- Neumann (derivada conhecida) em  $r = 0$ :

$$\left( \frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0 \quad (\text{condição de contorno de simetria}) \quad (6.3)$$

onde  $R$  é o raio do duto.

## 6.2 Variáveis de Interesse

a)  $u(r)$ , obtido da solução das eqs.(6.1) a (6.3)

b)  $u_{\max}$  = valor máximo de  $u$ , que ocorre em  $r = 0$

c) Vazão que escoar no duto, definida por

$$Q = \int_A u dA = 2\pi \int_0^R u r dr \quad (6.4)$$

d) Força viscosa do fluido sobre o duto, definida por

$$F = (A\tau)_{r=R} = -2\pi RL \left[ \mu \left( \frac{du}{dr} \right) \right]_{r=R} \quad (6.5)$$

onde  $A$  é a área,  $\tau$  é a tensão, e  $L$  é o comprimento do duto.

## 6.3 Discretização da Equação Diferencial

Integrando-se a eq. (6.1) sobre o volume de controle  $P$  da fig.6.3, obtém-se

$$\int_{r_w}^{r_c} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \overbrace{\mu r \frac{du}{dr}}^f \right) \right] dr = \int_{r_w}^{r_c} C dr \quad (6.6)$$

Com a variável  $f$  e multiplicando-se a eq. (6.6) por  $r$ , obtém-se

$$\int_{r_w}^{r_c} df = C \int_{r_w}^{r_c} r dr \quad (6.7)$$

onde

$$f = \mu r \frac{du}{dr} \quad (6.8)$$

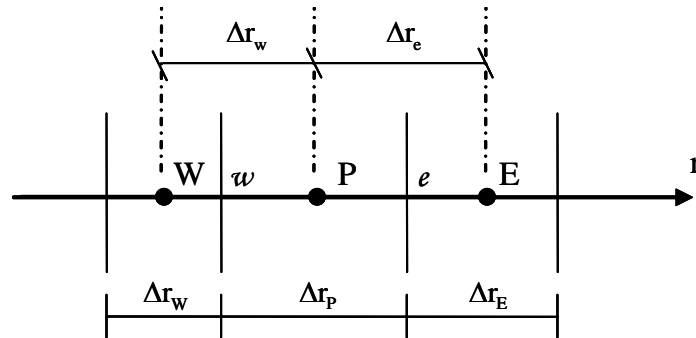


Figura 6.3: Malha 1D não uniforme de nós centrados entre faces

A eq.(6.7) resulta em

$$f_e - f_w = C \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{2} = C(r_e - r_w) \frac{(r_e + r_w)}{2} = C \Delta r_P r_P \quad (6.9)$$

A integração analítica de  $\int r dr$  é igual à numérica.

Com a eq.(6.8) na eq. (6.9), chega-se a

$$\left( \mu r \frac{du}{dr} \right)_e - \left( \mu r \frac{du}{dr} \right)_w = C \Delta r_P r_P \quad (6.10)$$

- $\mu_e$  e  $\mu_w$  podem ser obtidos diretamente da função dada  $\mu(r)$  com  $r_w$  e  $r_e$ .
- $r_w$ ,  $r_e$ ,  $\Delta r_P$  e  $r_P$  são obtidos da malha gerada.
- As duas derivadas podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig. 2.3), resultando em

$$\left( \frac{du}{dr} \right)_w \approx \frac{(u_P - u_W)}{\Delta r_w} \quad (6.11)$$

$$\left( \frac{du}{dr} \right)_e \approx \frac{(u_E - u_P)}{\Delta r_e} \quad (6.12)$$

Com as eqs. (6.11) e (6.12) em (6.10), chega-se a

$$\mu_e r_e \frac{(u_E - u_P)}{\Delta r_e} - \mu_w r_w \frac{(u_P - u_W)}{\Delta r_w} = C \Delta r_P r_P \quad (6.13)$$

que na forma do sistema de equações

$$a_P u_P = a_w u_W + a_e u_E + b_P \quad (6.14)$$

resulta em

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \frac{\mu_w r_w}{\Delta r_w} \\ a_e = \frac{\mu_e r_e}{\Delta r_e} \\ a_P = a_w + a_e \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_P = -C \Delta r_P r_P \end{array} \right. \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{coeficientes} \\ \text{termo fonte} \end{array}} \right\} \text{volumes reais } P = 1 \text{ a } N \quad (6.15)$$

## 6.4 Aplicação das Condições de Contorno (C.C.)

A condição de contorno em  $r = R$ , dada pela eq.(6.2), pode ser aplicada com o VC fictício  $P = N+1$  da fig. 2.5, isto é,

$$\frac{(u_P + u_W)}{2} = u(R) = 0$$

ou

$$u_P = -u_W \quad (6.16)$$

que, comparada à eq.(6.14), resulta em

$$a_P = 1; \quad a_w = -1; \quad a_e = b_P = 0 \quad (P = N + 1) \quad (6.17)$$

A C.C. em  $r = 0$ , dada pela eq.(6.3), pode ser aplicada com o VC fictício  $P = 0$  da fig. 2.4, da seguinte forma, com CDS-2:

$$\left( \frac{du}{dr} \right)_{r=0} \approx \frac{(u_E - u_P)}{\Delta r_P} = 0$$

ou

$$u_P = u_E \quad (6.18)$$

que, comparada à eq.(6.14), resulta em

$$a_p = a_e = 1; a_w = b_p = 0 \quad (P = 0) \quad (6.19)$$

## 6.5 Obtenção das Variáveis Secundárias

$u_{\max}$  pode ser obtido com a aproximação DDS-2 (downstream differencing scheme de 2ª ordem) para a eq.(6.3), resultando em

$$u_{\max} = \frac{[(1 + \lambda)^2 u_p - u_E]}{(2 + \lambda)\lambda} \quad (P = 1) \quad (6.20)$$

onde

$$\lambda = 2 \frac{\Delta r_e}{\Delta r_p} \quad (P = 1) \quad (6.21)$$

Q pode ser obtido com a integração pela regra do retângulo na eq.(6.4), resultando em

$$Q = 2\pi \sum_{P=1}^N (u_p r_p \Delta r_p) \quad (6.22)$$

Com a aproximação dada pela eq.(6.12) na eq.(6.5), obtém-se

$$F = -2\pi R L \mu_{r=R} \frac{(u_E - u_p)}{\Delta r_p} \quad (P = N) \quad (6.23)$$

## 6.6 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para se resolver numericamente o problema definido pelas eqs.(6.1) a (6.5) são:

- 1) Ler os dados: R, C, L, N,  $\Delta r_p$  (P = 1 a N), função  $\mu(r)$
- 2) Calcular  $r_e$ ,  $r_w$ ,  $\Delta r_w$ ,  $\Delta r_e$ ,  $\Delta r_p$  e  $r_p$  para todos os VC
- 3) Calcular  $\mu_w$  e  $\mu_e$  com a função dada no item 1
- 4) Calcular os coeficientes e termos fontes com as eqs.(6.15),(6.17) e (6.19)

- 5) Resolver o sistema de equações (6.14) com o método TDMA, obtendo  $u_p$  para  $P = 0$  a  $N+1$
- 6) Calcular  $u_{\max}$ ,  $Q$  e  $F$
- 7) Imprimir e visualizar os resultados

## 6.7 Difusão de QML 2Dp

Para um escoamento laminar tridimensional, plenamente desenvolvido, em regime permanente, fluido incompressível, propriedades constantes, num duto de seção transversal do tipo retangular, Fig. 4.5, tem-se (White, 1991)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{constante} = C \quad (6.24)$$

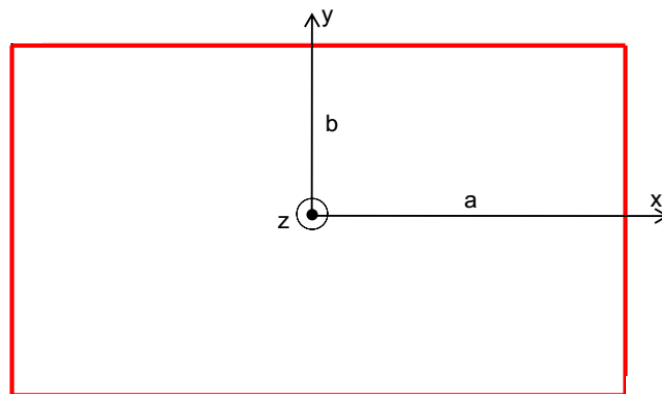
onde

$z$  = direção longitudinal do duto (m)

$\mu$  = viscosidade absoluta do fluido (constante) (Pa.s)

$p$  = pressão estática do fluido (Pa)

$u$  = velocidade do fluido na direção  $z$  (nas direções  $x$  e  $y$  as componentes da velocidade são nulas) (m/s)



**Figura 6.4: Escoamento 2D num duto retangular**

O domínio de cálculo é  $-a \leq x \leq a$  e  $-b \leq y \leq b$ .

As condições de contorno são do tipo Dirichlet em todos os 4 contornos. Isto é, aplica-se a condição de não escorregamento nas quatro paredes do duto, ou seja:

$$u(-a,y) = u(a,y) = u(x,-b) = u(x,b) = 0 \quad (6.25)$$

As variáveis de interesse são:

a)  $u$ , da eq. (6.25) (variável dependente e primária)

b)  $\bar{u}$ , velocidade média (variável secundária e global), definida por

$$\bar{u} = \frac{1}{4ab} \int_{-b}^b \int_{-a}^a u \, dx \, dy \quad (6.26)$$

### 6.7.1 Solução Analítica

A solução analítica das eqs. (6.24) a (6.26) é

$$u = -\frac{16 a^2}{\mu \pi^3} \left( \frac{dp}{dz} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(i\pi y/2a)}{\cosh(i\pi b/2a)} \right] \left[ \frac{\cos(i\pi x/2a)}{i^3} \right] \quad (6.27)$$

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{3 \mu} \left( \frac{dp}{dz} \right) \left[ 1 - \frac{192 a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i\pi b/2a)}{i^5} \right] \quad (6.28)$$

### 6.7.2 Solução Numérica

$$\int_{y_s}^{y_e} \int_{x_w}^{x_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx \, dy = \int_{y_s}^{y_e} \int_{x_w}^{x_e} \underbrace{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}}_c dx \, dy \quad (6.29)$$

Para malha uniforme em cada direção, tem-se

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \Delta x \, \Delta y$$

Com CDS-2, obtém-se

$$\left[ \frac{u_E - u_P}{\Delta x} - \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \right] \Delta y + \left[ \frac{u_N - u_P}{\Delta y} - \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \right] \Delta x = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \Delta x \, \Delta y \quad \div \Delta x \Delta y$$

ou

$$\frac{u_E + u_W - 2u_P}{\Delta x^2} + \frac{u_N + u_S - 2u_P}{\Delta y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

ou comparando-se com

$$a_p u_p = a_w u_w + a_e u_e + a_s u_s + a_n u_n + b_p \quad (6.30)$$

chega-se a

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes:} \\ \\ \\ \text{termo fonte:} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_w = a_e = \frac{1}{\Delta x^2} \\ a_s = a_n = \frac{1}{\Delta y^2} \\ a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \\ b_p = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = -C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(volumes reais)} \end{array} \quad (6.31)$$