A. ELEMENTOS DE MECÂNICA LAGRANGEANA

A.1. RELAÇÃO ENTRE TRABALHO E ENERGIA

Há duas maneiras de se formular os problemas dinâmicos das partículas: uma que deriva da segunda lei de Newton e que dá origem à chamada Mecânica Vetorial, e outra, atribuída a Leibnitz e Lagrange, que origina a chamada Mecânica Analítica. Por formulação, deve-se entender a determinação das equações diferenciais que regem o movimento das partículas de um sistema. A solução das equações diferenciais é, portanto, etapa posterior à formulação. Todos os princípios da Dinâmica tratam de formulação e não de solução.

Na primeira formulação, a segunda lei de Newton (ou o princípio de D'Alambert) é aplicada a cada partícula do sistema mecânico, levando-se em conta todos os esforços externos (forças) bem como a interação entre as partículas. Em outras palavras, para cada partícula um diagrama de corpo livre é feito, a segunda lei de Newton (ou princípio de D'Alambert) aplicada e uma equação diferencial escrita. Se o sistema for composto de N partículas, resultarão N equações diferenciais desse processo.

Na segunda formulação, o sistema é considerado como um todo e as equações diferenciais são obtidas através de funções tais como energia potencial total, energia cinética total e trabalho de cargas externas. Todas essas grandezas são escalares, ao passo que na primeira formulação apenas grandezas vetoriais (forças, acelerações e outras) são envolvidas.

Na formulação analítica, os diagramas de corpo livre não são necessários, o que simplifica consideravelmente o trabalho em sistemas relativamente complexos. A Mecânica Analítica conduz a procedimentos gerais de formelulação, tais como as equações de Lagrange e o princípio de Hamilton. Neste apêndice, os elementos fundamentais da abordagem analítica serão introduzidos, como uma base para a modelagem matemática de sistemas mecânicos, em especial de mecanismos.

A.2. TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Seja uma força **F,** aplicada a uma partícula de massa m, que se desloca ao longo de uma trajetória s. A figura A.1 representa esta partícula se deslocando entre os pontos 1 e 2 de uma certa trajetória. Os pontos 1 e 2 são referenciados pelos vetores de posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, ou pelos elementos de arco s_1 e s_2, ou ainda pelos instantes t_1 e t_2.

Como a posição da partícula m é definida pelo vetor de posição **r**, seu deslocamento durante o tempo dt é dado por $d\mathbf{r}$. Assim, por definição, o trabalho executado pela força **F** durante dt é

$$\overline{d\tau} = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\,, \qquad \text{(A.2.1)}$$

Esse trabalho infinitesimal também poderá ser escrito como

$$\overline{d\tau} = |\mathbf{F}|\cos\alpha|d\mathbf{r}| = |\mathbf{F}|\cos\alpha ds,$$

onde ds é o comprimento do arco percorrido por m no tempo dt. O ponto "$\bullet$" significa produto escalar. Nas expressões acima, a barra sobre o símbolo $\overline{d\tau}$ serve para distingui-lo de $d\tau$, e lembrar que aquele não se trata de um diferencial, mas de uma quantidade infinitesimal.

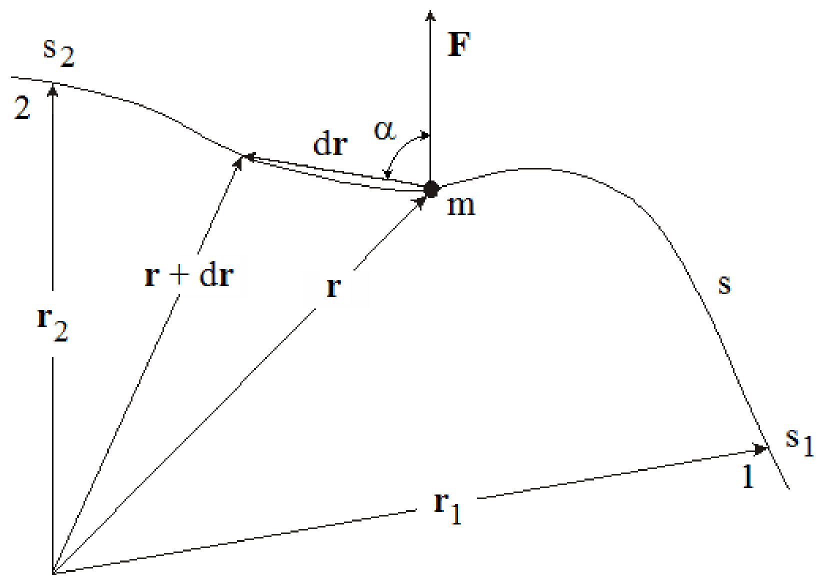

Figura A.1 – Trabalho sobre uma partícula ao longo de uma trajetória

Nota-se que $|\mathbf{F}|\cdot\cos\alpha$ é a componente tangencial (na direção de d**r**) de **F** e $|\mathbf{F}|$ sen α é a componente normal. Se a componente $|\mathbf{F}|\cdot\cos\alpha$ tem o mesmo sentido de d**r**, o trabalho é positivo, caso contrário, negativo. A componente normal $|\mathbf{F}|\cdot\text{sen}\alpha$ não produz trabalho.

Por definição, o <u>trabalho</u> produzido por **F** no tempo finito entre os instantes t_1 e t_2 será

$$\tau_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} |\mathbf{F}|\cos\alpha ds\,. \tag{A.2.2}$$

Se, ao invés de uma só força, for considerado um conjunto de p forças atuando em m, a expressão correspondente à expressão A.2.1 seria

$$\overline{d\tau} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{F}_i \bullet d\mathbf{r} \tag{A.2.3}$$

Portanto, a soma dos trabalhos é igual ao trabalho da força resultante, qual seja,

$$\tau_{12} = \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_i \bullet dr = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left(\sum_{i=1}^{p} \mathbf{F}_i \right) \bullet d\mathbf{r}\,. \tag{A.2.4}$$

A unidade de trabalho no sistema SI é $N \times m \left(\text{Newton} \times \text{metro}\right)$.

De acordo com a segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa m,

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a},$$

onde **a** é aceleração da partícula, dada por $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = d\dot{\mathbf{r}}/dt = \ddot{\mathbf{r}}$, em que os pontos superiores significam derivada temporal.

Assim sendo, da expressão A.2.4, tira-se que

$$\tau_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \bullet d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \bullet \dot{\mathbf{r}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}\right) dt = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_2 \bullet \dot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_1 \bullet \dot{\mathbf{r}}_1 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left|\dot{\mathbf{r}}_2\right|^2 - \frac{1}{2}m\left|\dot{\mathbf{r}}_1\right|^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades escalares de m nos pontos 1 e 2.

A <u>energia cinética</u> de uma partícula é definida pela expressão $T = \left(1/2\right)mv^2$ e representa o trabalho executado por todas as forças aplicadas na partícula, para levá-la do repouso à velocidade v. Vetorialmente, a energia cinética de uma partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}, \tag{A.2.5}$$

onde **r** é o vetor de posição da partícula e $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade (vetorial) da mesma, tangente à trajetória. Portanto, a expressão

$$\tau_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T \tag{A.2.6}$$

diz que <u>o trabalho produzido por todas as forças</u> (ou por sua resultante) <u>aplicadas em uma partícula, entre dois pontos de sua trajetória, é igual à variação de energia cinética entre esses dois pontos</u>. Nota-se que energia cinética (expressão A.2.5) é uma grandeza escalar e sempre positiva.

A.3. Energia Potencial

A expressão $\tau_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ é uma integral de linha que, em geral, <u>depende da trajetória percorrida</u> pela partícula m entre os pontos 1 e 2. A dependência da trajetória decorre do fato de **F** poder estar associada a uma dissipação de energia, como no caso de atrito viscoso ou de Coulomb.

Quando $\mathbf{F}$ não estiver associada à dissipação de energia, a integral acima não dependerá da trajetória. É o caso, por exemplo, das forças resultantes do campo gravitacional ou de forças elásticas no interior de uma peça. Nesses casos, $\mathbf{F} \bullet \mathbf{dr}$ é uma diferencial exata de uma função escalar, chamada função energia potencial (ou função potencial), tal que

$$-\mathrm{dV} = \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} . \tag{A.3.1}$$

Isto significa que $\mathbf{F}$ é uma função da posição apenas, não dependendo da velocidade.

Em assim sendo, tem-se que

$$\tau_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-\mathrm{dV}) = -(\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1) , \tag{A.3.2}$$

onde

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}(\mathbf{r}_2) \text{ e } \mathrm{V}_1 = \mathrm{V}(\mathbf{r}_1) .$$

O sinal menos em A.3.1 é arbitrário e é usado aqui para concordar com a designação usual de sinal da energia potencial.

Se tal função V existe, o trabalho executado por $\mathbf{F}$ entre os pontos 1 e 2 independe da trajetória percorrida pela massa m, conforme mostra a expressão A.3.2. Este trabalho dependerá apenas do valor inicial e final da função escalar V.

Também, se tal função existe, a sua diferencial exata será dada por

$$\mathrm{dV} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{dz} , \tag{A.3.3}$$

onde x, y e z são coordenadas cartesianas ortogonais (retangulares) da partícula m, isto é, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Por outro lado, em coordenadas retangulares, $\mathbf{F} \bullet \mathbf{dr}$ pode sempre ser escrito assim

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{dr} = \mathrm{F_x dx} + \mathrm{F_y dy} + \mathrm{F_z dz} , \tag{A.3.4}$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathrm{F_x}\mathbf{i} + \mathrm{F_y}\mathbf{j} + \mathrm{F_z}\mathbf{k} \text{ e } \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{dx}\mathbf{i} + \mathrm{dy}\mathbf{j} + \mathrm{dz}\mathbf{k},$$

sendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ é uma base ortogonal colinear com os eixos x, y, z, respectivamente.

Combinando A.3.1, A.3.3 e A.3.4, pode-se escrever que

$$\mathrm{F_x} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}};\ \mathrm{F_y} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}};\ \mathrm{F_z} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}} . \tag{A.3.5}$$

Resumindo, se existe uma função escalar de posição, V, tal que $\mathbf{F} \bullet \mathbf{dr}$ seja uma diferencial exata desta função, então vale o seguinte:

a) O trabalho executado por **F** sobre m independe da trajetória percorrida pela partícula, como indicado pela expressão A.3.2;
b) As componentes cartesianas ortogonais de **F** podem ser obtidas de V pelas expressões A.3.5.

A função V, quando existe, é chamada função energia potencial (ou função potencial) e a força **F** é dita conservativa. Forças conservativas podem ser, portanto, derivadas de uma função energia potencial. Por outro lado, quando **F** for função da velocidade ou depender de fatores dissipativos, como atrito, ela será não conservativa e a função energia potencial não existe. Nestes casos, o trabalho dependerá da trajetória.

A função energia potencial num ponto, ou apenas a energia potencial num ponto, é, como mostra a expressão A.3.2, uma grandeza arbitrária, quer dizer, depende de um valor de referência. Assim, se for arbitrado que a energia potencial no ponto 1 é zero $\left(\text{isto é, } V(\mathbf{r}_1)=0\right)$ então, por A.3.1 e A.3.2, tem-se que

$$V(\mathbf{r}_2) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\,. \qquad \text{(A.3.6)}$$

Quer dizer, a energia potencial, no ponto 2, é igual ao negativo do trabalho executado pela força conservativa (dependente só da posição) sobre a partícula, ao longo de uma trajetória qualquer entre os pontos 1 e 2, arbitrando-se o ponto 1 como referência (energia potencial nula).

Alguns exemplos ilustrarão, a seguir, o conceito de energia potencial e de força conservativa. O primeiro exemplo refere-se à força gravitacional, na proximidade da superfície da terra, conforme ilustra a figura A.2.

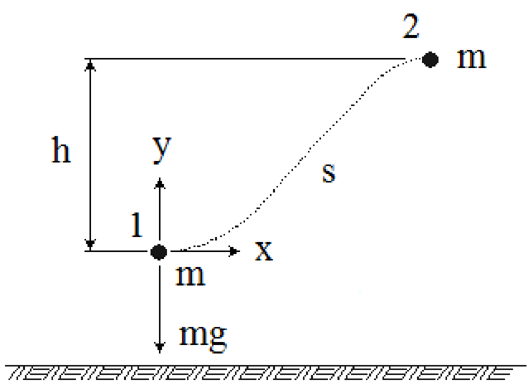

Figura A.2 - Energia potencial gravitacional

Na condição acima, pode-se considerar que a força de atração da terra é constante e numericamente igual a mg. Assim, o trabalho entre os pontos 1 e 2 será dado por

$$\tau_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-mg\mathbf{j}) \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-mg\mathbf{j}) \bullet (dy\mathbf{j} + dx\mathbf{i}) = -\int_{y_1}^{y_2} mgdy = -mg(y_2 - y_1) = -mgh \quad \text{(A.3.7)}$$

No exemplo acima, **i** e **j** são vetores unitários colineares, com x e y, respectivamente.

O segundo exemplo refere-se à <u>deformação de uma mola</u>, de rigidez k, como na figura A.3.

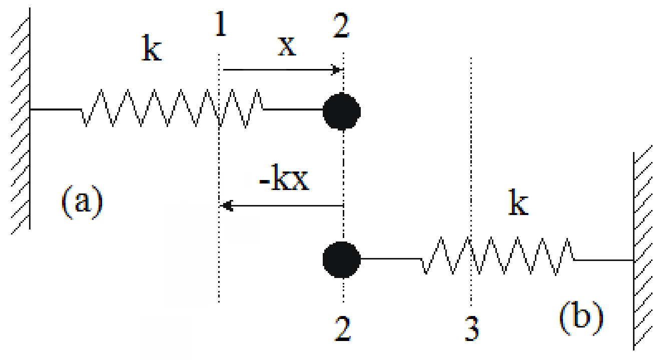

Figura A.3 - Energia potencial elástica de uma mola

Suponha-se, por exemplo, que uma partícula se mova de modo a distender a mola (vide figura A.3a). A força aplicada sobre a partícula é $-kx$ e o trabalho executado por esta força entre os pontos 1 e 2 vale

$$\tau_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,dx = \left(-\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \qquad \text{(A.3.8)}$$

Tomando-se a posição 1 como referência e lembrando da expressão A.3.2, tem-se que

$V_2 = (1/2)kx_2^2.$

Nota-se que este resultado independe do fato da mola estar sendo distendida ou comprimida (vide figura A.3b). De modo geral, portanto, quando uma mola se deforma de um valor x, a energia potencial ao final da deformação será dada por

$$V(x) = kx^2/2\,. \qquad \text{(A.3.9)}$$

Esta é uma energia potencial elástica, armazenada internamente na mola. Por isso é chamada também de <u>energia potencial de deformação</u>. Note-se que a força aplicada à partícula pode ser calculada por (vide expressão A.3.5)

$$F_x = \frac{-\partial V(x)}{\partial x} = -kx$$

Em geral, atuam sobre uma partícula tanto forças conservativas quanto não conservativas. Por exemplo, pode-se pensar em um amortecedor viscoso em paralelo com a mola k da figura A.3a. Este amortecedor aplica no corpo uma força $-c\dot{x}$, em paralelo com a força $-kx$. Esta última só depende da posição do corpo, enquanto a anterior depende da velocidade. Ou seja, $-kx$ é conservativa, $-c\dot{x}$, não.

O trabalho total executado sobre uma partícula é a soma de duas parcelas, cada uma associada a um dos tipos de forças. Matematicamente, tem-se que

$$\tau_{12} = \tau_{12c} + \tau_{12nc}, \tag{A.3.10}$$

onde o subscrito c refere-se a conservativo e o subscrito nc a não conservativo.

Considerando-se as expressões A.2.6 e A.3.10, decorre que

$$\tau_{12nc} = \tau_{12} - \tau_{12c} = T_2 - T_1 + V_2 - V_1 = \left(T_2 + V_2\right) - \left(T_1 + V_1\right) = E_2 - E_1, \tag{A.3.11}$$

onde E significa energia mecânica total (potencial mais cinética).

A expressão A.3.11 indica que a diferença total de energia mecânica de uma partícula entre dois pontos é devida apenas ao trabalho das forças não conservativas.

Caso não existam forças conservativas, $\tau_{12nc} = 0$, ou seja,

$$E_2 = E_1 = E = \text{constante}. \tag{A.3.12}$$

Em palavras: a energia mecânica total (cinética + potencial) de uma partícula submetida a forças conservativas é constante. Este fato não é mais do que uma manifestação do princípio da conservação da energia mecânica.

FONTE

– Fundamentos de Vibrações, J. J. de Espíndola, UFSC, 2004.