5. DINÂMICA, TRABALHOS VIRTUAIS E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

5.1. FORMULAÇÃO VETORIAL

Tudo o que foi dito até agora a respeito de trabalhos virtuais e princípio da mínima energia potencial refere-se a equilíbrio estático, isto é, equilíbrio de sistemas de forças que não variam com o tempo. Quando as forças forem dinâmicas (isto é, variáveis no tempo), forças de inércia também deverão ser incluídas. O conceito de força de inércia está associado ao princípio de D'Alambert e será apresentado a seguir.

Considere-se uma partícula, sobre a qual agem forças externas, de resultante $\mathbf{F}_i$, e forças de interação, de resultante $\mathbf{f}_i$. Pela segunda lei de Newton, tem-se

$$\left(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i\right) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \tag{5.1}$$

Força de inércia, segundo D'Alambert, seria uma força colinear com $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$, de mesma intensidade, porém de sentido contrário; ou seja, $-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$.

Se esta força for considerada no sistema de forças aplicadas $\left(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i\right)$ na partícula, tem-se, pela equação 5.1, que

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \tag{5.2}$$

A expressão 5.2 pode ser considerada como uma equação de equilíbrio de forças e esta é a essência do <u>princípio de D'Alambert</u>, que diz o seguinte:

As forças aplicadas sobre uma partícula, mais a força de inércia, formam um sistema em equilíbrio.

A partir deste ponto, tudo o que foi dito para equilíbrio estático aplica-se para o "equilíbrio" dinâmico. Em particular, o princípio dos trabalhos virtuais fica escrito como

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\bullet\delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{5.3}$$

onde o termo $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{f}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0,$ por razões já expostas no capítulo anterior.

A diferença entre o caso estático e o caso dinâmico está em que, no primeiro, tem-se uma variação (deslocamentos virtuais) da configuração de equilíbrio estático, enquanto que, no segundo, a configuração de equilíbrio do sistema muda constantemente com o tempo. O <u>princípio dos trabalhos virtuais</u> se aplica ao <u>caso de equilíbrio dinâmico</u> porque os <u>deslocamentos virtuais</u> (ou seja, a variação da configuração de um sistema num dado instante) não estão associados à variação de tempo.

A configuração do sistema, a cada instante, é dada pelo vetor de coordenadas generalizadas $q(t)=[q_1 \; \dots \; q_n]^T$, do espaço de configuração. Pode-se, pois, imaginar a "ponta" deste vetor descrevendo uma curva, no espaço n dimensional de configuração, à medida que o tempo passa. Esta curva recebe o nome genérico de trajetória.

Pode-se pensar em dois tipos de trajetórias: a verdadeira e a variada. A trajetória verdadeira decorre da variação real das coordenadas generalizadas (isto é, da configuração do sistema). A trajetória variada deve-se a variações (deslocamentos virtuais) das coordenadas, tais como $\delta q_1,...,\delta q_n$, e é descrita pelo vetor $q+\delta q=[q_1+\delta q_1 \; \cdots \; q_n+\delta q_n]^T$. Estas variações são simultâneas e instantâneas, sendo o tempo transcorrido para que elas ocorram igual a zero. A figura 5.1 ilustra o que se exposto acima.

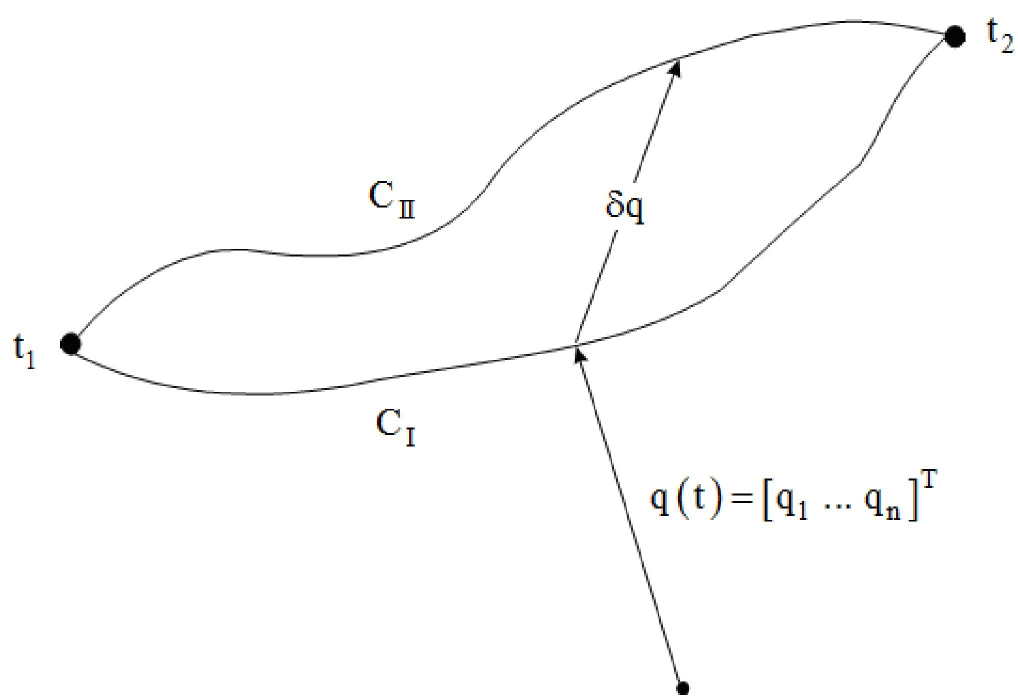

Figura 5.1 – Trajetória verdadeira C_I e trajetória variada C_{II}

No caso estático, o princípio dos trabalhos virtuais conduz às equações de equilíbrio estático do sistema. Essas equações, quando resolvidas, dão a configuração de equilíbrio estático, isto é, o conjunto de deslocamentos do sistema sob carregamento estático. Já no caso dinâmico, ele conduz às equações de equilíbrio dinâmico. Aquelas são equações algébricas, ao passo que essas são equações diferenciais que, quando resolvidas, darão os deslocamentos do sistema a cada instante. Derivações temporais desses deslocamentos dão as velocidades e as acelerações.

5.2. FORMULAÇÃO EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Pode-se demonstrar que o princípio dos trabalhos virtuais, caso dinâmico, pode ser escrito, em termos de coordenadas generalizadas, da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0\,, \tag{5.4}$$

Na expressão acima, tem-se que

→ f_k é a força aplicada generalizada (ver Capítulo 4);

→ $-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}$ é a força de inércia generalizada.

A expressão 5.4 é a contrapartida da expressão 4.14 para o caso estático.

Como os δq_k são independentes, decorre que

$$f_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1,\ldots,n\,. \tag{5.5}$$

As expressões 5.5 são conhecidas como <u>equações de Lagrange</u>. Elas são, de fato, as <u>equações diferenciais do sistema</u> e expressam o <u>equilíbrio dinâmico</u> deste. Na próxima seção, essas expressões serão cuidadosamente estudadas.

5.3. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAGRANGE

As equações de Lagrange foram desenvolvidas pelo matemático francês J. L. Lagrange e são largamente utilizadas na engenharia e na física. Para sistemas dinâmicos complexos, essas equações constituem a forma mais simples de se estabelecer as equações de movimento do sistema.

As equações de Lagrange são nada mais do que o resultado da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (caso dinâmico) em termos de coordenadas generalizadas. Para obtê-las, basta escrever o princípio dos trabalhos virtuais na forma da expressão 5.4, o que corresponde a mostrar, pela comparação entre as expressões 5.3 e 5.4, que

$$-\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k\,. \tag{5.6}$$

Seja então $\mathbf{r}_i$ o vetor posição da i-ésima massa de um sistema de N partículas. Esse vetor pode, evidentemente, ser expresso em função das coordenadas generalizadas, de modo que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1,\ldots,q_n,t\right), \tag{5.7}$$

com

$$\delta\mathbf{r}_i = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_n}\delta q_n \,. \tag{5.8}$$

Assim sendo, o produto $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i$ fica

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \;. \tag{5.9}$$

A fim de se trabalhar a expressão 5.9, note-se, primeiro, a seguinte identidade:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right). \tag{5.10}$$

Em seguida, da expressão da velocidade, qual seja,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}, \tag{5.11}$$

tira-se, pela derivação de $\dot{\mathbf{r}}_i$ em relação a $\dot{q}_k$, que

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \tag{5.12}$$

Levando 5.12 em 5.10, tem-se que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}$$

o que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right]\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \dot{\mathbf{r}}_i\right) \tag{5.13}$$

Levando agora 5.13 em 5.9, decorre que

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\right](T_i)\,\delta q_k \tag{5.14}$$

onde T_i é a energia cinética de cada partícula, tal que

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i \bullet \dot{\mathbf{r}}_i \tag{5.15}$$

Tomando o somatório da expressão 5.14 sobre o índice i, obtém-se

$$-\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k$$

que é a expressão 5.6. Nesta expressão, $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ é a energia cinética total do sistema.

Fica, pois, demonstrada a expressão do trabalho virtual em coordenadas generalizadas, qual seja, a expressão 5.4, onde f_k é, segundo a expressão 4.15, igual a

$$f_k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \frac{\delta \mathbf{r}_i}{\delta q_k}, \quad k = 1, ..., n\,. \tag{4.15}$$

Como os δq_k são independentes, chega-se às equações de Lagrange, dadas pelas expressões 5.5, que são reescritas abaixo como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = f_k, \quad k = 1, ..., n \tag{5.16}$$

Para cada k (ou seja, para cada coordenada generalizada), uma expressão como a 5.16 pode ser escrita. Como foram derivadas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, estas expressões representam, na realidade, equações de equilíbrio dinâmico. Em outras palavras, as expressões 5.16 representam as equações de movimento do sistema, escritas em função das coordenadas generalizadas.

Vê-se, pois, que se um sistema tem n graus de liberdade, seu movimento será descrito por um conjunto de n equações diferenciais. As equações 5.16 são chamadas equações de Lagrange.

5.4. Diferentes Formas das Equações de Lagrange

Há outras maneiras de se apresentar as equações de Lagrange, como exposto nesta seção. Uma delas é, tendo em vista que as forças aplicadas podem ser conservativas e não conservativas, dividir o trabalho virtual em duas parcelas. Ou seja,

$$\delta\tau = \delta\tau_c + \delta\tau_{nc}. \tag{5.17}$$

Consequentemente, as forças generalizadas também podem separadas, de forma que

$$f_k = f_{kc} + f_{knc}, \quad k = 1, ..., n. \tag{5.18}$$

Na expressão 5.17, tem-se que

$$\delta\tau_c = \sum_{k=1}^{n} f_{kc} \delta q_k = -\delta V = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k\ ,$$

donde se conclui que

$$f_{kc} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad k = 1,\ldots,n \ . \tag{5.19}$$

É interessante, de passagem, comparar a expressão 4.27 com a 5.19. Se o sistema for conservativo e estiver em equilíbrio estático, $f_{kc} = 0$ e a 5.19 reproduzirá a 4.27.

Usando as expressões 5.18 e 5.19, as equações de Lagrange, dadas anteriormente pela expressão 5.16 podem, no caso geral, ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = f_{knc}, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{5.20}$$

Adotando a notação do Lagrangiano, em que $\underline{L \mathrel{\underline{\Delta}} T - V}$, a expressão acima fica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = f_{knc}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{5.21}$$

já que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, pois a função potencial depende apenas da posição e não das velocidades.

Caso o sistema seja conservativo, tem-se que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1,\ldots,n \ . \tag{5.22}$$

Foi dito atrás que as equações de Lagrange são, na realidade, de equilíbrio dinâmico em coordenadas generalizadas. Em outras palavras, seus termos são forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas.

Veja, por exemplo, a equação 5.20 escrita da seguinte forma:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} + f_{knc} = 0, \quad k = 1,\ldots,n \ . \tag{5.23}$$

Os termos desta expressão são facilmente identificáveis como forças associadas à k-ésima coordenada. Assim, segue que

$\rightarrow$ $f_{knc} =$ força generalizada não conservativa;

$\rightarrow$ $-\frac{\partial V}{\partial q_k} = f_{kc} =$ força generalizada conservativa;

$\rightarrow$ $-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} =$ força de inércia generalizada.

Já foi visto antes (vide exemplo 5, no Capítulo 4) que, em um sistema mecânico, ou estrutura, a energia potencial é dividida em duas partes: a energia potencial elástica e a energia potencial das forças aplicadas por fontes externas. Ou seja,

$$V = V_e + V_f \tag{5.24}$$

Desta expressão, decorre que

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} = -\frac{\partial V_e}{\partial q_k} - \frac{\partial V_f}{\partial q_k},$$

ou

$$f_{kc} = f_{ke} + f_{kf} \tag{5.25}$$

Conclui-se, pois que a expressão 5.20 fica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V_e}{\partial q_k} - f_{knc} = f_{kf} \tag{5.26}$$

ao passo que a expressão 5.21 torna-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L_e}{\partial q_k} - f_{knc} = f_{kf} \tag{5.27}$$

onde $L_e \triangleq T - V_e$. Nota-se que, na transposição da 5.26 para a 5.27, considerou-se que $\partial V_e / \partial \dot{q}_k = 0$, já que a energia potencial não depende das velocidades.

As forças generalizadas não conservativas e as aplicadas por fontes externas podem ser determinadas pelo princípio dos trabalhos virtuais, já que

$$\delta\tau_{nc} = \sum_{k=1}^{n} f_{knc}\delta q_k \tag{5.28}$$

$$\delta\tau_f = \sum_{k=1}^{n} f_{kf}\delta q_k \tag{5.29}$$

Em geral, as forças generalizadas não conservativas podem também ser determinadas através da potência dissipada pelo sistema. Tendo-se a potência dissipada pelo sistema (mesmo que não linear!), as forças generalizadas não conservativas podem ser computadas por

$$f_{knc} = -\frac{\partial \sigma_{nc}}{\partial \dot{q}_k}, k = 1, n. \tag{5.30}$$

O exemplo 2, adiante, mostra isso.

Exemplo 1: São determinadas, abaixo, as equações diferenciais de movimento do sistema do exemplo 3, seção 4.4, do Capítulo 4, pelas equações de Lagrange. Entretanto, por conveniência, um novo sistema de coordenadas generalizadas será usado, como ilustrado na figura 5.2. A força P(t) é uma força conservativa, aplicada por um fonte externa ao sistema. Como a barra do sistema tem massa uniformemente distribuída, o centro de massa fica no meio da mesma.

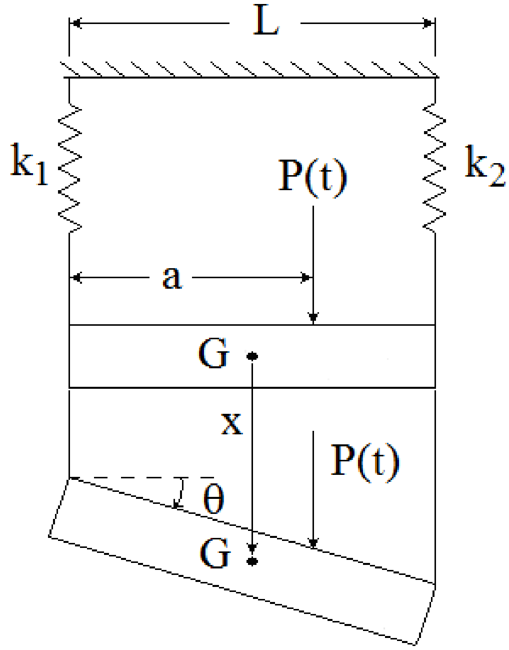

Figura 5.2 – Sistema suspenso com dois graus de liberdade

A energia potencial é dada por

$$V(x,\theta,t)=\frac{1}{2}k_1\left(x-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(x+\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2-P(t)\left[x+\left(a-\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\theta\right]. \tag{a}$$

Já a energia cinética é dada por

$$T(t)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \tag{b}$$

onde I = momento de inércia da barra em relação ao centro de massa.

Tem-se, a partir das expressões (a) e (b), que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0\ .$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=I\dot{\theta}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=I\ddot{\theta}\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=0\ .;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=k_1\left(x-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)+k_2\left(x+\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)-P(t);$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{-1}{2}Lk_1\left(x-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta+\frac{1}{2}Lk_2\left(x+\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta-P(t)\left(a-\frac{L}{2}\right)\cos\theta.$$

Montando-se as equações 5.20, decorre que

$$m\ddot{x}+(k_1+k_2)x+\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta(k_2-k_1)=P(t); \tag{c}$$

$$I\ddot{\theta}+\frac{1}{2}Lx\cos\theta(k_2-k_1)+\frac{L^2}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(k_1+k_2)=P(t)\left(a-\frac{L}{2}\right)\cos\theta. \tag{d}$$

As expressões acima são as equações de Lagrange do sistema em questão. Essas equações são, portanto, as equações de movimento do sistema.

Para θ pequeno, estas equações tornam-se

$$m\ddot{x}+(k_1+k_2)x+\frac{1}{2}L(k_2-k_1)\theta=P(t)$$

$$I\ddot{\theta}+\frac{1}{2}L(k_2-k_1)x+\frac{1}{4}L^2(k_1+k_2)\theta=P(t)\left(a-\frac{L}{2}\right),$$

Em forma matricial, as equações acima são dadas por

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & L(k_2-k_1)/2 \\ L(k_2-k_1)/2 & L^2(k_1+k_2)/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P(t)\\ P(t)(a-L/2)\end{Bmatrix}. \tag{e}$$

Exemplo 2: Suponha-se que, no exemplo anterior, em paralelo com os elementos elásticos k_1 e k_2, existam dois amortecedores viscosos, de coeficientes c_1 e c_2. Determinar as f_{knc}, $k=1,2$, associadas às coordenadas x e θ, pela potência dissipada e pelo princípio dos trabalhos virtuais. Determinar também as forças externas de fonte, f_{kf}, $k=1,2$, pelo princípio dos trabalhos virtuais.

a) A potência dissipada por um amortecedor viscoso é dada por

$$\sigma=\frac{1}{2}c\dot{x}^2, \tag{f}$$

onde c é a constante viscosa do amortecedor e $\dot{x}$ é a velocidade <u>através</u> do mesmo.

Nota-se a analogia dessa expressão com a da energia elástica armazenada em uma mola.

A força viscosa através do amortecedor é

$$f = -\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{x}} = -c\dot{x}\,. \tag{g}$$

No caso do sistema da figura 5.2, tem-se que

$$\sigma_{nc} = \frac{1}{2}c_1\left[\frac{d}{dt}\left(x - \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)\right]^2 + \frac{1}{2}c_2\left[\frac{d}{dt}\left(x + \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)\right]^2,$$

ou

$$\sigma_{nc} = \frac{1}{2}c_1\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)^2.$$

Desta expressão, tira-se que

$$f_{xnc} = -\frac{\partial\tau_{nc}}{\partial\dot{x}} = -(c_1 + c_2)\dot{x} - (c_2 - c_1)\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \tag{h}$$

$$f_{\theta nc} = -\frac{\partial\tau_{nc}}{\partial\dot{\theta}} = -\frac{L}{2}\cos\dot{\theta}(c_2 - c_1)\dot{x} - (\frac{L}{2}\cos\theta)^2(c_2 + c_1)\dot{\theta} \tag{i}$$

Linearizando, pela suposição de θ pequeno, obtêm-se

$$f_{xnc} = -\frac{\partial\tau_{nc}}{\partial\dot{x}} = -\left(c_1 + c_2\right)\dot{x} - \left(c_2 - c_1\right)\frac{L}{2}\dot{\theta} \tag{j}$$

$$f_{\theta nc} = -\frac{\partial\tau_{nc}}{\partial\dot{\theta}} = -\left(c_2 - c_1\right)\frac{L}{2}\dot{x} - \left(c_2 + c_1\right)\frac{L^2}{4}\dot{\theta} \tag{k}$$

Em forma matricial, estas duas expressões são dadas por

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_\theta \end{Bmatrix}_{nc} = -\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & (c_2 - c_1)L/2 \\ (c_2 - c_1)L/2 & (c_1 + c_2)L^2/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \tag{l}$$

onde a matriz quadrada é a matriz de amortecimento do sistema.

O trabalho virtual das forças viscosas do sistema em questão é computado por

$$\delta\tau_{nc} = -c_1\frac{d}{dt}\left(x - \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)\delta\left(x - \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right) - c_2\frac{d}{dt}\left(x + \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)\delta\left(x + \frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)$$

$$= -\left[c_1\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right) + c_2\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\right]\delta x + \left[c_1\left(\dot{x} - \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\frac{L}{2}\cos\theta - c_2\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\frac{L}{2}\cos\theta\right]\delta\theta.$$

Os coeficientes de δx e $\delta\theta$ reproduzem as expressões (h)-(i), isto é, as forças generalizadas não conservativas.

b) O trabalho virtual das forças de fonte é

$$\delta\tau_f = P(t)\delta\left(x + (a - \frac{L}{2})\text{sen}\theta \right) = P(t)\delta x + P(t)(a - \frac{L}{2})\cos\theta\delta\theta .$$

Portanto, as forças generalizadas de fonte são dadas por

$$f_x\left(t\right) = P(t) \qquad (m) \qquad e \qquad f_\theta = P(t)(a - \frac{L}{2})\cos\theta \qquad (n)$$

Salienta-se que as forças generalizadas conservativas, $f_{kc} = -\partial V/\partial q_k$, $k = 1, n$, incluem aquelas aplicadas por uma fonte de força externa, que seja constante em relação às coordenadas generalizadas. Isto porque V(t), a energia potencial total, inclui o negativo dos trabalhos externos daquelas forças. Aquelas forças, aplicadas por uma fonte de força, são também chamadas excitações e é conveniente colocá-las sob a forma generalizada, no segundo membro das equações, como se viu no exemplo 1 acima (expressão (c)) e na expressão 5.27.

Alternativamente, o negativo do trabalho dessas forças pode ser suprimido de V(t), caso em que o vetor de excitação (segundo membro) deve ser computado diretamente pelo princípio dos trabalhos virtuais. Tudo isso foi visto e exemplificado anteriormente.

Considerando agora as expressões 5.27 e 5.30, pode-se escrever as equações de Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial \sigma_{nc}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L_e}{\partial q_k} = f_{kf} , \tag{5.31}$$

onde, como já se viu, $L_e \triangleq T - V_e$, sendo V_e a energia potencial elástica.

Por sua vez, as equações 5.26 tornam-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial \sigma_{nc}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V_e}{\partial q_k} = f_{kf} \tag{5.32}$$

Exemplo 3: Considere-se a obtenção das equações de movimento do sistema mecânico da figura 5.3, através do uso das equações de Lagrange. No sistema em questão, o disco gira sem transladar e o momento M(t) é conservativo. Assim, o movimento do sistema pode ser descrito pelas coordenadas x e θ, que são, então, escolhidas como as coordenadas generalizadas, de modo que $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$. Assume-se que tanto a superfície em que desliza o bloco, de massa m, quanto o eixo em torno do qual gira o disco, de segundo momento de massa I, não apresentam atrito.

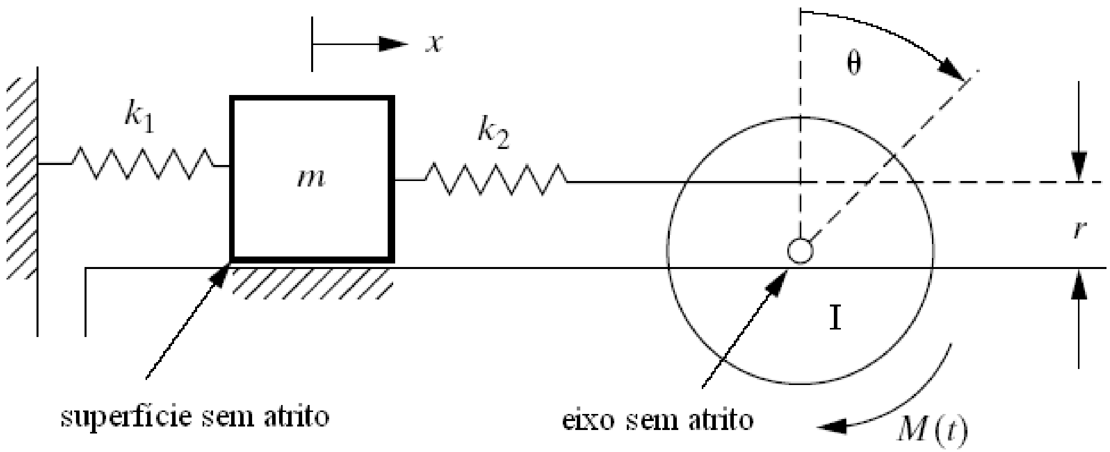

Figura 5.3 – Sistema alternativo com dois graus de liberdade

A energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Já a energia potencial é igual a

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\left(r\theta - x\right)^2 - M(t)\theta$$

Montando as equações de Lagrange (equações 5.20), tem-se, para $q_1 = x$, que

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + 0\right) - 0 + k_1x + k_2\left(r\theta - x\right)\left(-1\right) = 0$$

ou seja,

$$m\ddot{x} + \left(k_1 + k_2\right)x - k_2r\theta = 0 \tag{o}$$

enquanto que, para $q_2 = \theta$, resulta

$$\frac{d}{dt}\left(0 + I\dot{\theta}\right) - 0 + 0 + k_2\left(r\theta - x\right)r - M(t) = 0$$

ou

$$I\ddot{\theta} - k_2rx + k_2r^2\theta = M(t) \tag{p}$$

Reunindo as equações acima em forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -rk_2 \\ -rk_2 & r^2k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M(t) \end{Bmatrix} \tag{q}$$

FONTES

– Mechanics of Machines, S. Doughty, Wiley, 1988;

– Fundamentos de Vibrações, J. J. de Espíndola, UFSC, 2004;

– Engineering Vibration, D. J. Inman, Pearson/Prentice-Hall, 2008.