4. ESTÁTICA E PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

4.1. INTRODUÇÃO

Na Estática, estuda-se o equilíbrio dos corpos sob ação de esforços invariantes com o tempo. Em cursos introdutórios de Mecânica, esse é, via de regra, um dos primeiros tópicos discutidos, quase sempre em termos da primeira lei de Newton para uma partícula e suas várias extensões para a translação e a rotação de corpos rígidos.

Por essa abordagem, as condições de equilíbrio estão associadas com somatórios de forças e momentos, somatórios esses que são igualados a zero. Embora esses métodos sejam relativamente simples e funcionem bem para problemas elementares, há uma outra abordagem que, no caso de componentes de máquinas, é frequentemente superior.

Essa abordagem alternativa recorre ao assim chamado <u>princípio dos trabalhos virtuais</u>. Esse princípio é o mais antigo dos chamados princípios de energia da Mecânica. Embora seja especialmente útil no estudo de mecanismos, é comumente (e infelizmente!) omitido dos currículos dos cursos de Engenharia Mecânica.

Os problemas de Estática podem ser classificados em dois tipos, dependendo de se a geometria associada é constante ou não. No primeiro tipo, nota-se que a geometria da configuração de equilíbrio de um corpo, após a aplicação das forças, é aproximadamente a mesma de antes dessa aplicação. Várias estruturas civis, tais como pontes, torres e represas, são exemplos desse tipo.

O segundo tipo diz respeito aos casos em que a geometria da configuração de equilíbrio pode ser significativamente diferente daquela de antes da aplicação das forças. Máquinas e seus componentes são exemplos particulares desse tipo. Problemas assim são frequentemente difíceis de se resolver através da primeira lei de Newton, ao passo que o princípio dos trabalhos virtuais, aplicável aos dois tipos, é especialmente adequado para esse segundo tipo.

As seções subsequentes apresentarão o princípio dos trabalhos virtuais para, a seguir, se discutir sua aplicação na análise estática de mecanismos.

4.2. DESLOCAMENTOS VIRTUAIS

O princípio dos trabalhos virtuais permite a formulação das condições de equilíbrio em termos do trabalho, que é uma grandeza escalar. Assume-se que o conceito de trabalho seja familiar. O mesmo não se aplica, contudo, ao termo virtual. Assim, antes da enunciação do princípio dos trabalhos virtuais, algumas definições e informações preliminares precisam ser consideradas.

Um conjunto de <u>deslocamentos virtuais</u> (ou simplesmente <u>variações</u> de deslocamentos) é composto de deslocamentos que gozam das seguintes características:

1. São pequenos (isto é, parcelas de segunda ordem, ou superior, de uma expansão em série de Taylor são desprezáveis).
2. São arbitrários, mas compatíveis com os vínculos internos e externos do sistema mecânico. Traduzindo este fato para um corpo elástico, diz-se que as condições de contorno geométricas (vínculos externos) são respeitadas e que a configuração assumida pelo corpo é tal que sua continuidade também é respeitada, isto é, ela não apresenta fissura ou outros vazios.
3. São deslocamentos da posição verdadeira do sistema mecânico (por exemplo, deslocamentos da posição de equilíbrio estático, ou da trajetória verdadeira de cada ponto do sistema, num dado instante).
4. São diferenciais, satisfazendo, pois, as regras da diferenciação, comuns ao cálculo infinitesimal.
5. Não são deslocamentos verdadeiros, isto é, são virtuais. Esta é, geralmente, a característica que mais confunde. Dizer que não são deslocamentos verdadeiros equivale a dizer que não ocorrem efetivamente, sendo, assim, imaginários, ou virtuais. Portanto, não existe variação de tempo associada a esses deslocamentos, ou seja, o tempo transcorrido durante sua ocorrência é nulo. Para lembrar esta característica, são ordinariamente representados por δ, em vez de d.

A hipótese da compatibilidade dos deslocamentos virtuais com os vínculos significa que as equações de vínculo 4.1, quais sejam,

$$f_k\left(\alpha_1+\delta\alpha_1,\alpha_2+\delta\alpha_2,\ldots,\alpha_p+\delta\alpha_p\right)=c_k\ ,\ \ k=1,p-n. \tag{4.1}$$

devem ser satisfeitas. Acima, f_k é uma das (p-n) equações 1.2 e $\delta\alpha_i$ são variações virtuais das coordenadas α_i, devido ao deslocamento virtual (ou variação) do sistema.

Expandindo as equações 4.1 em série de Taylor e desprezando os termos de ordem segunda e superiores (deslocamentos virtuais pequenos), tem-se

$$f_k\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\right)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f_k}{\partial\alpha_i}\delta\alpha_i = c_k\ ,\ k=1,p-n\,. \tag{4.2}$$

Comparando as expressões 1.2 e 4.2, chega-se à conclusão de que

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f_k}{\partial\alpha_i}\delta\alpha_i = 0\ ,\ k=1,p-n\,. \tag{4.3}$$

A expressão 4.3 é uma condição necessária para que os deslocamentos $\delta\alpha_i, i=1,p,$ sejam compatíveis com os vínculos associados às expressões 1.2.

Nota-se que os deslocamentos (ou variações) $\delta\alpha_i$, i = 1, p, são arbitrários, mas não são independentes (vide Eq. 4.3). Isto decorre do fato de que as α_i não são coordenadas generalizadas $(p > n)$, ou seja, não são linearmente independentes.

Se as coordenadas na Eq. 1.2 fossem dependentes do tempo e, mais ainda, se o tempo figurasse como uma variável explícita, ter-se-ia

$$f_k\left(\alpha_1(t),...,\alpha_p(t),t\right) = c_k \ , \ k = 1, p-n \ , \tag{4.4}$$

como condições de vínculo.

Para um conjunto de deslocamentos virtuais, seria ainda possível escrever que

$$f_k\left(\alpha_1(t)+\delta\alpha_1(t),...,\alpha_p(t)+\delta\alpha_p(t),t\right) = c_k \ , \ k = 1, p-n, \tag{4.5}$$

devido à compatibilidade dos deslocamentos virtuais com os vínculos.

De novo, desenvolvendo as equações 4.5 em série de Taylor e desprezando os termos de ordem dois ou acima, tem-se que

$$f_k\left(\alpha_1(t),...,\alpha_p(t),t\right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_i(t)} \delta\alpha_i(t) = c_k \ , \tag{4.6}$$

donde se conclui que

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_i(t)} \delta\alpha_i(t) = 0 \ , \tag{4.7}$$

Nota-se ainda que, no desenvolvimento da Eq. 4.6, a variável tempo não foi considerada (ou seja, não aparece o termo $\left(\partial f_k / \partial t\right)\delta t$), já que não existe associação de tempo com os deslocamentos virtuais.

4.3. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – FORMULAÇÃO VETORIAL

O princípio dos trabalhos virtuais será estabelecido para um sistema de partículas. A sua generalização para sistemas com corpos rígidos e/ou elásticos será imediata, como se verá adiante.

Tome-se, pois, uma partícula m_i de um sistema de partículas, isto é, um sistema constituído de pontos materiais ligados entre si de forma arbitrária, como ilustrado na figura 4.1. Indicando as grandezas vetoriais por letras em negrito (como será feito daqui em diante), seja $\mathbf{R}_i$ a resultante de todas as forças que atuam em m_i. Se a partícula estiver em equilíbrio estático, $\mathbf{R}_i$ será nula.

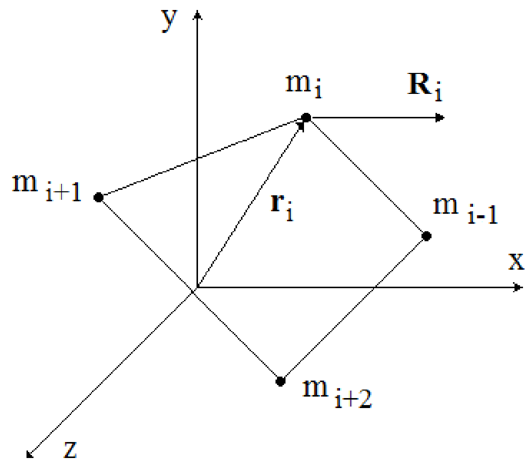

Figura 4.1 – Sistema de partículas

Uma forma equivalente de se dizer isto é afirmando que o trabalho executado por esta força (nula) ao longo de um deslocamento virtual é nulo. Ou seja,

$$\delta\tau_i = \mathbf{R}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{4.8}$$

onde o símbolo $\bullet$ significa produto escalar entre os vetores $\mathbf{R}_i$ e $\delta\mathbf{r}_i$.

De um modo geral, $\mathbf{R}_i$ resulta da soma vetorial de <u>forças externas aplicadas</u> $(\mathbf{F}_i)$ e <u>forças de interação</u> $(\mathbf{f}_i)$ entre as partes do sistema. Portanto, para as N partículas do sistema, tem-se que

$$\delta\tau = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0\,, \tag{4.9}$$

Como as forças de interação ocorrem aos pares, de forma colinear, seu trabalho virtual, para o sistema global, é nulo. Ou seja, $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0$. Assim sendo,

$$\delta\tau = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0\,, \tag{4.10}$$

A expressão 4.10 é uma representação do <u>princípio dos trabalhos virtuais</u> aplicado a um <u>sistema de partículas</u> e diz que <u>se um sistema de forças está em equilíbrio, o trabalho virtual</u> (isto é, devido a um conjunto de deslocamentos virtuais**)** <u>das forças aplicadas é nulo</u>.

4.4. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – FORMULAÇÃO EM COORDENADAS GENERALIZADAS

A expressão 4.10 pode ser escrita em função de coordenadas generalizadas, permitindo um aprofundamento de sua compreensão. Se as coordenadas generalizadas descrevem a configuração do sistema, então pode-se escrever, para o sistema, que as posições das partículas são dadas por

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_i}\left(q_1, q_2, \ldots q_n\right), \quad i = 1, N. \tag{4.11}$$

Consequentemente,

$$\delta\mathbf{r_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j \tag{4.12}$$

e a Eq. 4.10 passa a ser dada por

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Alterando a ordem dos somatórios na expressão acima, obtém-se

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0, \tag{4.13}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \delta q_j = 0 \tag{4.14}$$

onde

$$f_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, n. \tag{4.15}$$

As f_j , $j = 1, n$ são ditas forças generalizadas, associadas, respectivamente, às coordenadas generalizadas q_j , $j = 1, n$. Um sistema com n graus de liberdade tem, pois, n forças generalizadas.

As expressões 4.13, ou 4.14, representam o princípio dos trabalhos virtuais em coordenadas generalizadas. Como as variações δq_j , $j = 1, n$ são independentes e arbitrárias, essas expressões serão satisfeitas apenas se, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, n, \tag{4.16}$$

ou

$$f_j = 0, \quad j = 1, n. \tag{4.17}$$

As expressões 4.16, ou 4.17, representam um sistema de n equações em n incógnitas. Quando resolvido, ele fornece as coordenadas q_j , $j = 1, n$, em função das forças externas aplicadas. Essas equações são, pois, equações de equilíbrio estático. Vê-se, dessa forma, que o princípio dos trabalhos virtuais conduz diretamente às condições de equilíbrio em função de coordenadas generalizadas. Quando essas condições são resolvidas, obtém-se a configuração espacial de equilíbrio do sistema.

Face ao exposto, pode-se enunciar o princípio dos trabalhos virtuais da seguinte forma:

De todas as configurações espaciais possíveis de um sistema mecânico, respeitadas as condições de compatibilidade interna e externa, a configuração de equilíbrio é aquela a partir da qual um conjunto de deslocamentos virtuais corresponde a um trabalho virtual total igual a zero.

Este importante princípio será agora ilustrado com alguns exemplos simples.

Exemplo 1: Para o pêndulo duplo da figura 4.2, determinar as forças generalizadas a partir da expressão vetorial 4.15, sendo θ_1 e θ_2 as coordenadas generalizadas.

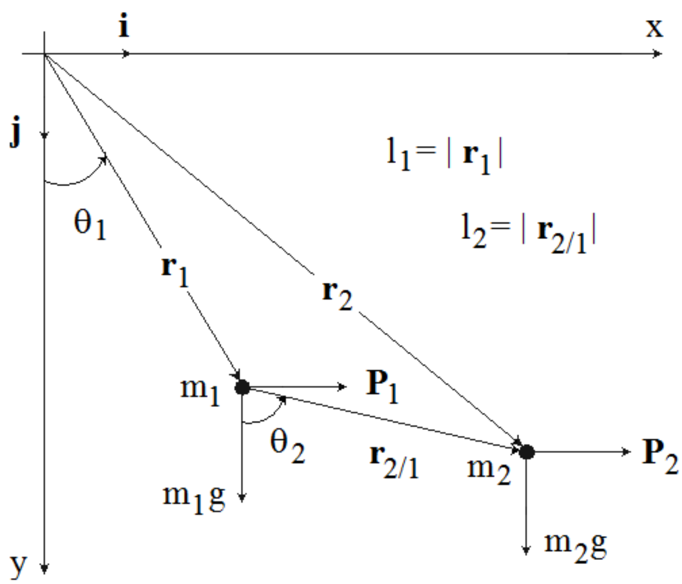

Figura 4.2 – Pêndulo duplo

Da figura 4.2, decorre que

$$\mathbf{F}_1 = P_1\mathbf{i} + m_1 g\mathbf{j} \ \ ; \ \ \mathbf{F}_2 = P_2\mathbf{i} + m_2 g\mathbf{j} \, ;$$

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \mathbf{i} + l_1 \cos\theta_1 \mathbf{j} \ \ ; \ \ \mathbf{r}_2 = \left(l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2\right)\mathbf{i} + \left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right)\mathbf{j}$$

Como $f_1 = \mathbf{F_1} \bullet \dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial\theta_1} + \mathbf{F}_2 \bullet \dfrac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial\theta_1}$, tem-se que

$$f_1 = \left(P_1\mathbf{i} + m_1 g\mathbf{j}\right) \bullet \left(l_1\cos\theta_1\mathbf{i} - l_1 \operatorname{sen}\theta_1\mathbf{j}\right) + \left(P_2\mathbf{i} + m_2 g\mathbf{j}\right) \bullet \left(l_1\cos\theta_1\mathbf{i} - l_1 \operatorname{sen}\theta_1\mathbf{j}\right)$$

$$\therefore f_1 = \left(P_1 + P_2\right) l_1 \cos\theta_1 - \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 . \qquad \text{(a)}$$

Já $f_2 = \mathbf{F}_1 \bullet \dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_2} + \mathbf{F}_2 \bullet \dfrac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2}$, de modo que

$$f_2 = \left(P_1\mathbf{i} + m_1 g\mathbf{j}\right) \bullet \mathbf{0} + \left(P_2\mathbf{i} + m_2 g\mathbf{j}\right) \bullet \left(l_2 \cos\theta_2 \mathbf{i} - l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \mathbf{j}\right),$$

$$\therefore f_2 = P_2 l_2 \cos\theta_2 - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 . \quad \text{(b)}$$

As equações de equilíbrio são obtidas anulando f_1 e f_2, conforme indicado por 4.17, de modo que

$$\left(P_1 + P_2\right)\cos\theta_1 = \left(m_1 + m_2\right) g \operatorname{sen}\theta_1 \quad \text{(c)}$$

$$P_2 \cos\theta_2 = m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 . \quad \text{(d)}$$

Supondo agora θ_1 e θ_2 pequenos (em radianos), obtêm-se as expressões acima em <u>forma linear</u>, quais sejam

$$\left(m_1 + m_2\right) g\theta_1 = P_1 + P_2 \quad \text{(e)}$$

$$m_2 g\theta_2 = P_2 . \quad \text{(f)}$$

Uma vez conhecidos m_1, m_2, P_1 e P_2, podem ser determinados, a partir das equações (c) e (d), ou (e) e (f), acima, os valores de θ_1 e θ_2, isto é, a configuração de equilíbrio elástico.

Exemplo 2: Para o exemplo anterior, determinar as equações de equilíbrio diretamente da expressão vetorial do princípio dos trabalhos virtuais, qual seja, a expressão 4.10.

A expressão 4.10 estabelece que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = 0 .$$

Substituindo as expressões do exemplo anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left(P_1\mathbf{i} + m_1 g\mathbf{j}\right) \bullet \left(l_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 \mathbf{i} - l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \delta\theta_1 \mathbf{j}\right) \\
&\qquad + \left(P_2\mathbf{i} + m_2 g\mathbf{j}\right) \bullet \left[\left(l_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2\right)\mathbf{i} - \left(l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \delta\theta_2\right)\mathbf{j}\right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_1 l_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \delta\theta_1 \\
&\qquad + P_2\left(l_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2\right) - m_2 g\left(l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \delta\theta_2\right) = 0
\end{aligned}$$

Agrupando os termos, resulta que

$$\left(P_1 l_1 \cos\theta_1 + P_2 l_1 \cos\theta_1 - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1\right)\delta\theta_1 + \left(P_2 l_2 \cos\theta_2 - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2\right)\delta\theta_2 = 0$$

Como $\delta\theta_1$ e $\delta\theta_2$ são independentes, os seus fatores são nulos. Logo,

$$\left(P_1 + P_2\right) l_1 \cos\theta_1 - \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 = 0$$

$$P_2 l_2 \cos\theta_2 - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0,$$

que são as expressões já obtidas no exemplo anterior.

Exemplo 3: A figura 4.3(a) mostra um sistema mecânico em equilíbrio antes da aplicação do carregamento externo P e, mais abaixo, uma possível (isto é, compatível) configuração deformada, após a aplicação da carga P. Já a figura 4.3(b) mostra detalhes das forças atuantes. Obter as condições do novo equilíbrio estático, em função das coordenadas generalizadas x e θ.

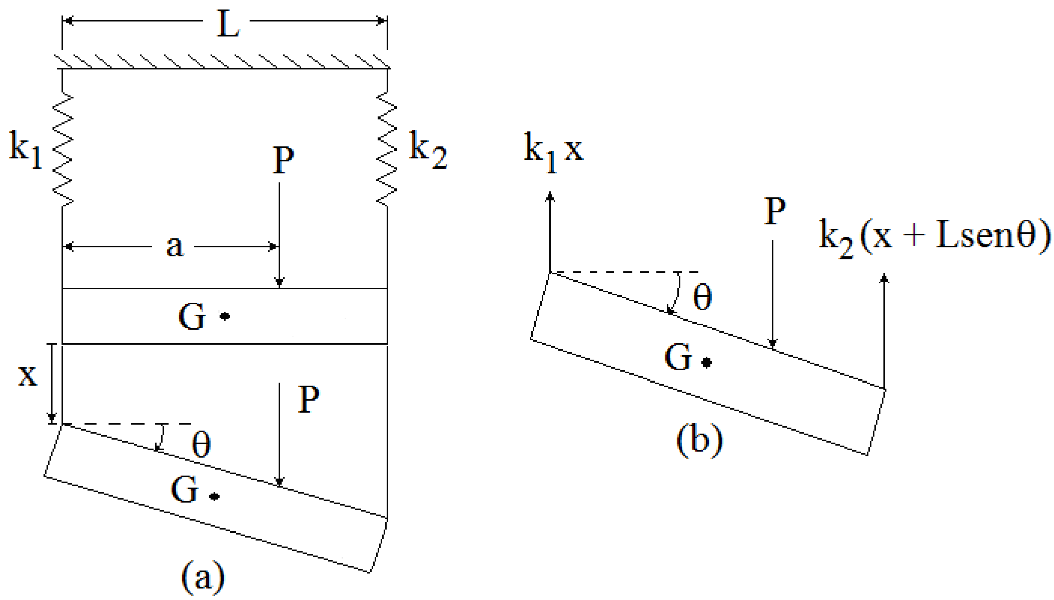

Figura 4.3 – Sistema com dois graus de liberdade

Os trabalho virtuais, a partir da configuração deformada (figura 4.3a) são

$$-\left(k_1 x\right)\delta x + P\delta\left(x + a\mathrm{sen}\theta\right) - k_2\left(x + L\mathrm{sen}\theta\right)\delta\left(x + L\mathrm{sen}\theta\right) = 0\,.$$

Como os operadores δ seguem as regras da diferenciação, tem-se que

$$-\left(k_1 x\right)\delta x + P.\left(\delta x + a\cos\theta\delta\theta\right) - k_2\left(x + L\mathrm{sen}\theta\right)\left(\delta x + L\cos\theta\delta\theta\right) = 0\,.$$

Agrupando os termos para as variações comuns, obtêm-se

$$\left[\left(k_1 + k_2\right)x + k_2 L\mathrm{sen}\theta - P\right]\delta x + \left(k_2 x L\cos\theta + k_2 L^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta - Pa\cos\theta\right)\delta\theta = 0\,.$$

A equação acima exprime o princípio dos trabalhos virtuais escrito em função das coordenadas generalizadas x e θ e corresponde à expressão 4.14.

Como δx e $\delta\theta$ são independentes (pois x e θ são coordenadas generalizadas), decorre que

$$\left(k_1 + k_2\right)x + k_2 L \operatorname{sen}\theta - P = 0 \qquad \text{(g)}$$

$$k_2 L x \cos\theta + k_2 L^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - Pa\cos\theta = 0\,. \qquad \text{(h)}$$

As expressões acima correspondem às expressões 4.17 e são equações de equilíbrio que, se resolvidas, fornecem a configuração (x, θ) em função do carregamento associado.

Partindo agora para a linearização das equações, nota-se que x e θ são nulos nas condições iniciais de equilíbrio, isto é, na origem. Esta é uma das condições necessárias para a linearização das equações diferenciais.

Supondo que x e θ sejam pequenos, as molas k_1 e k_2 não ultrapassarão o regime elástico linear, onde vale a lei de Hooke. Por outro lado, θ pequeno significa $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$, sendo o ângulo θ expresso em radianos. Nessas condições, as equações acima tornam-se

$$\left(k_1 + k_2\right)x + k_2 L\theta = P \qquad \text{(i)}$$

$$k_2 L x + k_2 L^2\theta = Pa\,. \qquad \text{(j)}$$

Em forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \left(k_1 + k_2\right) & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Pa \end{Bmatrix}.$$

4.5. O PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

Seja o caso particular em que o sistema de forças (em equilíbrio) que atua sobre uma partícula seja conservativo. Neste caso, existe uma função, denominada energia potencial, cuja variação (ou seja, algo de caráter virtual) pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\delta V = \mathbf{F} \bullet \delta\mathbf{r} = \delta\tau\,. \qquad (4.18)$$

Mas $\delta\tau = 0$ (princípio dos trabalhos virtuais). Logo, se o sistema de forças for conservativo,

$$\delta V = 0\,. \qquad (4.19)$$

Assim, se V for uma função das coordenadas x, y e z, ou seja, V(x, y, z), tem-se que

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0\,. \qquad (4.20)$$

Na expressão 4.20, δx, δy e δz são arbitrários, mas compatíveis com a vinculação do sistema. Além de arbitrários, δx, δy e δz também são independentes. Assim, a expressão 4.20 será satisfeita se e somente se valerem as seguintes relações:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \ . \tag{4.21}$$

As expressões 4.20 são exatamente as condições para que V tenha um valor dito estacionário. Caso este valor seja um mínimo, as expressões 4.20 dão as condições de equilíbrio estável à translação nas direções x, y e z.

A extensão do que foi dito acima para um sistema de partículas é imediata. Caso o sistema comporte corpos rígidos, a extensão é também imediata, bastando considerar a adição de coordenadas rotacionais e o trabalho executado por momentos externos.

As expressões 4.20 representam o princípio da mínima energia potencial, que diz:

Dentre todas as configurações espaciais de um sistema mecânico, configurações estas que satisfazem as condições de vínculo do sistema (ou seja, que satisfazem as condições de compatibilidade interna e condições geométricas de contorno), aquelas configurações que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial estacionária. Se este valor estacionário for mínimo, o equilíbrio é estável.

É altamente conveniente escrever expressões equivalentes às expressões 4.20 em coordenadas generalizadas. Ou seja, escrever o princípio em questão em coordenadas generalizadas. Lembrando que V é uma função escalar da configuração do sistema, pode-se escrever que

$$V = V\left(q_1, ..., q_n\right), \tag{4.22}$$

onde $q_1, ..., q_n$ são as coordenadas generalizadas do sistema mecânico.

Uma vez que as variações seguem as leis da diferenciação, decorre que

$$\delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \ . \tag{4.23}$$

O equilíbrio implica a estacionaridade de V, isto é, $\delta V = 0$. Esta condição só é satisfeita se todas as derivadas parciais em 4.23 forem nulas, posto que os δq_j são independentes (recorda-se que as q_j são coordenadas generalizadas). Assim sendo,

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \ ; \ \ j = 1, n \ . \tag{4.24}$$

As expressões 4.24 são as condições de equilíbrio do sistema mecânico em coordenadas generalizadas. Definem, pois, a configuração de equilíbrio do sistema. Nesse caso, as incógnitas são as n coordenadas generalizadas do sistema.

Nota-se que $\partial V / \partial q_j$, $j = 1, n$, representa a j-ésima força generalizada conservativa em equilíbrio. Esta afirmação decorre da comparação da expressão 4.16 com a 4.24. Como as equações são necessariamente equivalentes, conclui-se que $f_j = \partial V / \partial q_j = 0$, $j = 1, n$, no equilíbrio.

Exemplo 4: Determinar as condições de equilíbrio estático do sistema da figura 4.3, usando o princípio da mínima energia potencial. Considerar a força P como conservativa.

A energia potencial do sistema, face à definição apresentada acima, vale

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + L \operatorname{sen} \theta)^2 - P(x + a \operatorname{sen} \theta).$$

Pelo princípio da mínima energia potencial, tem-se que

$$\frac{\partial V(x, \theta)}{\partial x} = k_1 x + k_2 (x + L \operatorname{sen} \theta) - P = 0$$

$$\frac{\partial V(x, \theta)}{\partial \theta} = k_2 (x + L \operatorname{sen} \theta) L \cos \theta - P a \cos \theta = 0.$$

É fácil verificar que estas expressões são idênticas àquelas obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais.

Caso <u>não se tenha equilíbrio</u>, as derivadas $\partial V / \partial q_j$, $j = 1, n$, <u>não são</u>, todas, <u>iguais a zero</u>. De fato, o trabalho virtual das forças conservativas é sempre igual ao negativo da variação da energia potencial, de modo que

$$\delta \tau_c = -\delta V . \tag{4.25}$$

Mas, de acordo com a exposição feita na seção anterior,

$$\delta \tau_c = \sum_{j=1}^{n} f_{jc} \delta q_j, \tag{4.26}$$

onde o índice c significa conservativo. Assim, f_{jc} representa a j-ésima força generalizada conservativa.

Das expressões (4.23), (4.25) e (4.26), decorre que

$$\sum_{j=1}^{n} f_{jc} \delta q_j = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j$$

Como as coordenadas $q_j,\ j=1,n$ são independentes, conclui-se que

$$f_{jc} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \ ; \ \ j=1,n \tag{4.27}$$

Caso se tenha equilíbrio estático, a expressão 4.24 é válida, o que implica dizer que as forças generalizadas conservativas são nulas nas condições de equilíbrio estático.

Caso o sistema tratado no exemplo 3 não estivesse em equilíbrio estático, as forças generalizadas conservativas (que incluem as forças aplicadas externas) seriam dadas por

$$f_{xc} = -k_1 x - k_2\left(x + L\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + P \qquad (k)$$

$$f_{\theta c} = -k_2\left(x + L\,\mathrm{sen}\,\theta\right) L\cos\theta + Pa\cos\theta\,. \qquad (l)$$

Exemplo 5: Considere-se o sistema da figura 4.4(a) em equilíbrio, e tome-se, nestas condições, $V = 0$.

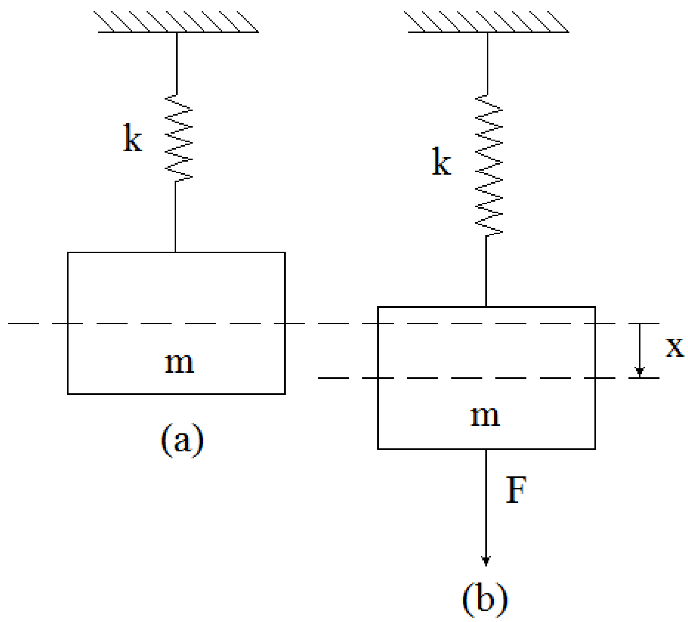

Figura 4.4 – Sistema com um grau de liberdade

Suponha agora que uma força (externa e constante) F seja aplicada, gerando a situação mostrada na figura 4.4(b). A energia potencial será

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - Fx\,.$$

A força generalizada conservativa associada à coordenada x será

$$f_{xc} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx + F\,. \qquad (m)$$

Os dois exemplos anteriores mostram que as forças generalizadas conservativas podem ser consideradas como compostas de duas parcelas, a saber: (1) uma exclusivamente devida às forças elásticas e (2) outra devida às forças aplicadas por fontes externas.

Em símbolos, tem-se que

$$f_{jc} = -\frac{\partial V_e}{\partial q_j} - \frac{\partial V_f}{\partial q_j} \tag{4.28}$$

ou

$$f_{jc} = f_{je} + f_{jf}\,, \tag{4.29}$$

onde o índice e se refere a forças elásticas e o índice f a fontes de forças externas. Esta relação será usada, no próximo capítulo, na apresentação das equações de Lagrange, visando o estudo da dinâmica de mecanismos.

4.6. Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais em Mecanismos

Nesta seção, serão discutidas aplicações do princípio dos trabalhos virtuais em mecanismos.

Exemplo 6 – Mecanismo manivela-alavanca: Seja o mecanismo manivela-alavanca ilustrado na figura 4.5. Os esforços aplicados ao sistema, e que podem realizar trabalho virtual, são a força vertical F, que age na extremidade da alavanca, e o momento M, que age na manivela. O sistema está em equilíbrio sob a ação desses esforços. Determinar a relação entre F, M e a variável primária (coordenada generalizada) q na condição de equilíbrio estático. As variáveis A e X, indicadas na figura 4.5, são variáveis secundárias.

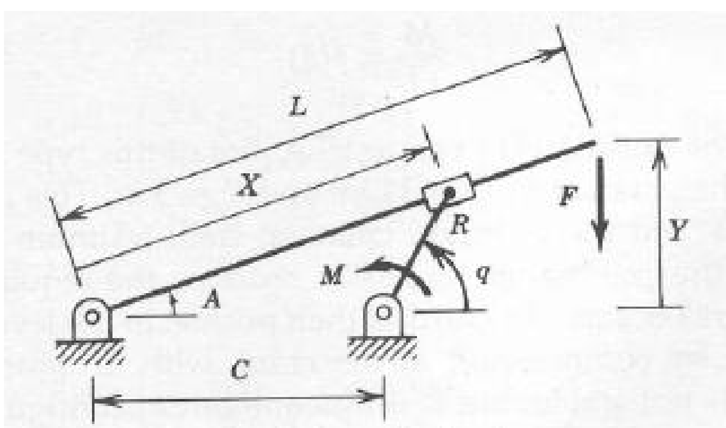

Figura 4.5 – Mecanismo manivela-alavanca

Nesse caso, os trabalho virtuais são dados por

$$\delta\tau = M\delta q - F\delta Y = 0$$

Nota-se que o trabalho realizado pelo momento M é positivo, uma vez que M e q estão no mesmo sentido. Já o trabalho da pela força F é negativo, posto que F e Y estão em sentidos opostos.

O mecanismo em tela tem um grau de liberdade, associado com a coordenada q. Deve haver, portanto, uma relação cinemática entre q e Y, que poderá ser obtida das equações de posição.

As equações de posição são

$$X\cos A - R\cos q - C = 0$$

$$X\mathrm{sen}A - R\mathrm{sen}q = 0$$

Eliminando X, obtém-se A, de modo que

$$\mathrm{tg}A = \frac{R\mathrm{sen}q}{C + R\cos q}$$

Como a coordenada Y é relacionada à coordenada A por

$$Y = L\mathrm{sen}A\,,$$

fica, então, estabelecida a relação, ainda que indireta, entre Y e q.

Um deslocamento virtual em Y é requerido na expressão dos trabalhos virtuais e isso demanda uma expressão para um deslocamento virtual em A em função do deslocamento virtual da coordenada generalizada q. Esses deslocamentos podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\delta A = \frac{dA}{dq}\delta q = K_a\delta q = \frac{CR\cos q + R^2}{C^2 + 2CR\cos q + R^2}\delta q$$

$$\delta Y = \frac{dY}{dA}\delta A = L\cos A\delta A = L\cos A\frac{CR\cos q + R^2}{C^2 + 2CR\cos q + R^2}\delta q$$

O coeficiente de δq pode ser interpretado como o coeficiente de velocidade $K_y = dY/dq$.

Com a expressão para δY, a expressão dos trabalhos virtuais pode ser escrita como

$$M\delta q - FL\cos A\frac{CR\cos q + R^2}{C^2 + 2CR\cos q + R^2}\delta q = 0$$

donde resulta que

$$M - FL\cos A\frac{CR\cos q + R^2}{C^2 + 2CR\cos q + R^2} = 0$$

Essa equação envolve M, F, A e q. Antes, já se havia relacionado A e q. Se o momento M e a força F são dados, os ângulos q e A podem ser obtidos a partir dessas duas equações. Determina-se, assim, a configuração de equilíbrio estático do mecanismo.

Exemplo 7 – Mecanismo biela-manivela: No mecanismo biela-manivela da figura 4.6, a biela se estende de uma distância H além da conexão com a manivela. O sistema está em equilíbrio sob ação das forças F_1 e F_2 e do torque C. O sistema possui um grau de liberdade, associado com a variável primária q, ao passo que X_1, X_2 e A são variáveis secundárias. Determinar a força F_2, na extremidade da biela, em termos de F_1, C, A, q e do coeficiente de velocidade K_a.

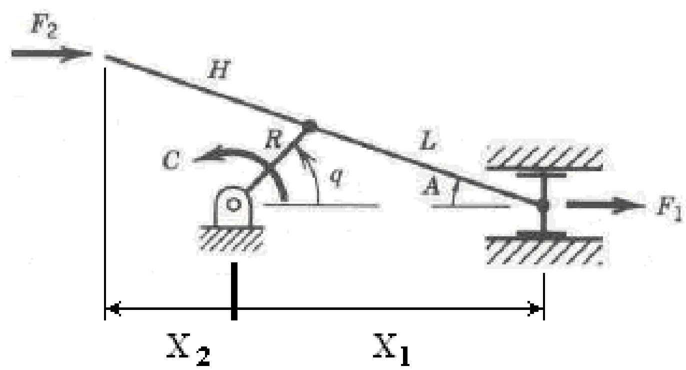

Figura 4.6 – Mecanismo biela-manivela

A expressão dos trabalhos virtuais para o mecanismo em questão é

$$\delta\tau = F_1\delta X_1 - F_2\delta X_2 + C\delta q$$

ao passo que os deslocamentos virtuais δX_1 e δX_2 podem ser expressos por

$$\delta X_1 = \delta\left(R\cos q + L\cos A\right) = -R\text{sen}q\delta q - L\text{sen}A\delta A$$

$$= -(R\text{sen}q\delta q + L\text{sen}A\frac{dA}{dq}\delta q) = -(R\text{sen}q + LK_a\text{sen}A)\delta q \;;$$

$$\delta X_2 = \delta\left(H\cos A - R\cos q\right) = -H\text{sen}A\delta A + R\text{sen}q\delta q$$

$$= R\text{sen}q\delta q - HK_a\text{sen}A\delta q = (R\text{sen}q - HK_a\text{sen}A)\delta q \;.$$

Assim sendo, decorre, da expressão dos trabalhos virtuais, que

$$\delta\tau = -F_1\left(R\text{sen}q + LK_a\text{sen}A\right)\delta q - F_2(R\text{sen}q - HK_a\text{sen}A)\delta q + C\delta q = 0$$

o que implica

$$-F_1\left(R\text{sen}q + LK_a\text{sen}A\right) - F_2(R\text{sen}q - HK_a\text{sen}A) + C = 0$$

Da expressão acima, resulta que

$$F_2 = \frac{C - F_1\left(R\text{sen}q + LK_a\text{sen}A\right)}{R\text{sen}q - HK_a\text{sen}A}$$

O coeficiente de velocidade K_a pode ser obtido a partir da observação da figura 4.6, onde se verifica que $R\mathrm{sen}q = L\mathrm{sen}A$, de sorte que

$$A = \mathrm{arcsen}\left(\frac{R\mathrm{sen}q}{L}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{dA}{dq} = K_a = \frac{R\cos q}{\sqrt{L^2 - R^2\mathrm{sen}^2 q}} = \frac{R\cos q}{L\cos A}.$$

FONTES

– Mechanics of Machines, S. Doughty, Wiley, 1988;

– Fundamentos de Vibrações, J. J. de Espíndola, UFSC, 2004.