3. MECANISMOS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade, quais sejam, n graus, requerem igual número de coordenadas generalizadas para a determinação completa de sua configuração espacial. Na análise cinemática, isso significa que n variáveis primárias terão que ser escolhidas. Esse fato tem pouca influência na análise de posição, mas complica as análises de velocidade e de aceleração.

Tudo o que foi visto no capítulo anterior será, com pequenas modificações, novamente considerado aqui, agora aplicado ao caso de mecanismos com múltiplos graus de liberdade. Assim, boa parte da apresentação se dará pela via de exemplos.

3.1. ANÁLISE CINEMÁTICA COM SOLUÇÃO ANALÍTICA

Como visto nas seções 2.1 e 2.2, a análise cinemática de alguns mecanismos pode resultar em soluções analíticas. Embora isso seja verdadeiro apenas para uma classe limitada de mecanismos, é útil considerar esse caso pela visão que ele fornece do processo de análise (que pode ficar parcialmente obscurecido quando se toma a via numérica).

No exemplo abaixo, de um mecanismo com dois graus de liberdade, as posições, velocidades e acelerações relativas às variáveis secundárias serão obtidas em forma analítica. As modificações requeridas em sistemas com múltiplos graus de liberdade ficarão evidentes nas análises de velocidade e aceleração. O movimento de um particular ponto de interesse também será abordado.

Seja o mecanismo de quatro barras deslizante, mostrado na figura 3.1. Ele difere do mecanismo de quatro barras clássico pelo fato do pivô que liga a contra-manivela ao acoplador se encontrar num elemento deslizante, de forma que o comprimento efetivo do acoplador é variável.

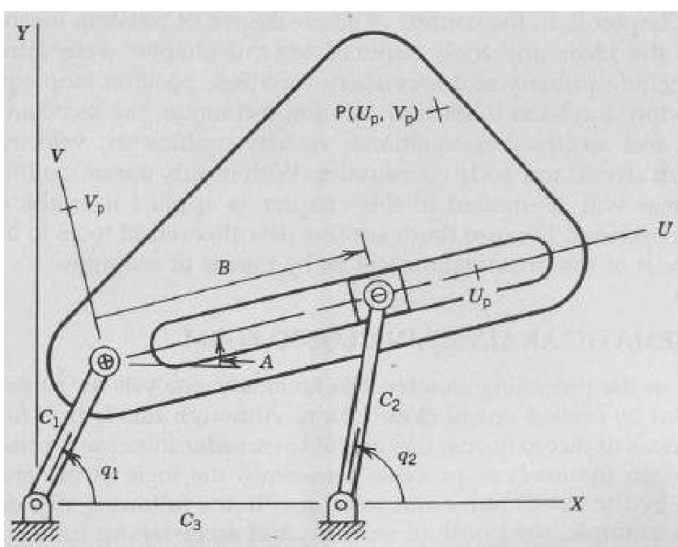

Figura 3.1 – Mecanismo de quatro barras deslizante

O sistema tem dois graus de liberdade, associados com os ângulos q_1 e q_2 das duas manivelas. As variáveis secundárias são o ângulo de inclinação A e o comprimento efetivo B do acoplador. O ponto P é um ponto de interesse qualquer no acoplador, localizado pelas coordenadas (U_P ,V_P), relativas a um sistema móvel de coordenadas. Serão obtidas as posições, as velocidades e as acelerações relativas às variáveis secundárias, bem como descrito o movimento do ponto P.

Equações de posição: O mecanismo possui um laço de posição que é descrito pelas seguintes equações escalares:

$$f_h\left(q_1, q_2, A, B\right) = C_1 \cos q_1 + B \cos A - C_2 \cos q_2 - C_3 = 0$$

$$f_v\left(q_1, q_2, A, B\right) = C_1 \operatorname{sen} q_1 + B \operatorname{sen} A - C_2 \operatorname{sen} q_2 = 0$$

Essas equações devem ser resolvidas para as duas coordenadas secundárias A e B. Embora métodos numéricos certamente sejam aplicáveis, uma solução analítica também se encontra disponível nesse caso. Quando B é eliminado, o resultado é

$$\operatorname{tg} A = \frac{C_2 \operatorname{sen} q_2 - C_1 \operatorname{sen} q_1}{C_3 + C_2 \cos q_2 - C_1 \cos q_1}$$

Para o mecanismo indicado na figura 3.1, $-\pi/2 < A < \pi/2$. Consequentemente, essa equação pode ser solucionada para A pelo valor principal da função arco tangente. Esse valor é, então, utilizado para a solução de B, tal que

$$B = \frac{C_3 + C_2 \cos q_2 - C_1 \cos q_1}{\cos A}$$

Equações de velocidade: As equações de velocidade são obtidas pela derivação temporal das equações de posição. Elas são

$$-C_1 \dot{q}_1 \operatorname{sen} q_1 + \dot{B} \cos A - B \dot{A} \operatorname{sen} A + C_2 \dot{q}_2 \operatorname{sen} q_2 = 0$$

$$C_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{B} \operatorname{sen} A + B \dot{A} \cos A - C_2 \dot{q}_2 \cos q_2 = 0$$

Recorde-se que $q_1, q_2, \dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$ terão valores atribuídos a si e que A e B, a essa altura, já foram determinadas. Assim, as equações acima constituem um sistema de equações lineares simultâneas em duas incógnitas, $\dot{A}$ e $\dot{B}$. Quando essas equações são escritas em forma matricial, surge, à esquerda, a matriz Jacobiana, posto que, na forma indicada, tem-se

$$\begin{bmatrix} -B \operatorname{sen} A & \cos A \\ B \cos A & \operatorname{sen} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \operatorname{sen} q_1 & -C_2 \operatorname{sen} q_2 \\ -C_1 \cos q_1 & C_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Para uma solução analítica, essa equação é pré-multiplicada pela inversa da matriz Jacobiana, o que resulta, após simplificações, em

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_1/B)\cos(q_1 - A) & (C_2/B)\cos(A - q_2) \\ C_1 \mathrm{sen}(q_1 - A) & C_2 \mathrm{sen}(A - q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Isso mostra que as velocidades secundárias $\dot{A}$ e $\dot{B}$ podem ser expressas como combinações lineares das velocidades primárias $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$. Os coeficientes de velocidade para esse caso formam uma matriz 2 x 2, ao invés de apenas um vetor coluna (como no capítulo anterior), tal que

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_1/B)\cos(q_1 - A) & (C_2/B)\cos(A - q_2) \\ C_1 \mathrm{sen}(q_1 - A) & C_2 \mathrm{sen}(A - q_2) \end{bmatrix}$$

Então, a relação entre as velocidades secundárias, os coeficientes de velocidade e as velocidades primárias é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial q_1} & \dfrac{\partial A}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial B}{\partial q_1} & \dfrac{\partial B}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Em geral, para mecanismos com múltiplos graus de liberdade, os coeficientes de velocidade formarão uma matriz retangular. O fato da matriz de coeficientes de velocidade acima ser quadrada é apenas uma coincidência, decorrente do tipo de exemplo escolhido.

Equações de aceleração: As acelerações serão obtidas pela derivação da expressão relativa às velocidades secundárias, dada em termos da matriz de coeficientes de velocidade e das velocidades primárias. A alternativa a esse procedimento seria derivar as equações de velocidade em forma não matricial para se obter as equações de aceleração associadas e, então, solucioná-las para as acelerações desejadas.

Seguindo o primeiro caminho, tem-se, com o auxílio da regra da cadeia, que

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [K] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \dot{q}_1 [L_1] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \dot{q}_2 [L_2] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

onde as matrizes de derivadas parciais de coeficientes de velocidade são dadas por

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} [(C_1/B)(1-K_{a1})\mathrm{sen}(q_1 - A) \\ +(C_1/B^2)K_{b1}\cos(q_1 - A)] \end{array} & \begin{array}{l} -[(C_2/B)K_{a1}\mathrm{sen}(A - q_2) \\ +(C_2/B^2)K_{b1}\cos(A - q_2)] \end{array} \\ \\ C_1(1-K_{a1})\cos(q_1 - A) & C_2 K_{a1}\cos(A - q_2) \end{bmatrix}$$

$$\left[L_2\right]=\begin{bmatrix} [-(C_1/B)K_{a2}\text{sen}(q_1-A) & -[(C_2/B)(K_{a2}-1)\text{sen}(A-q_2) \\ +(C_1/B^2)K_{b2}\cos(q_1-A)] & +(C_2/B^2)K_{b2}\cos(A-q_2)] \\ -C_1K_{a2}\cos(q_1-A) & C_2(K_{a2}-1)\cos(A-q_2) \end{bmatrix}$$

Note-se o papel dos coeficientes de velocidade individuais no processo de se expressar, de forma compacta, as matrizes das derivadas parciais dos coeficientes de velocidade. No caso de múltiplos graus de liberdade, uma família de matrizes de derivadas parciais de coeficientes de velocidade aparece, em número igual ao de graus de liberdade. Por isso, o termo 'parciais' acima.

Posição, Velocidade e Aceleração do Ponto P: As coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas estacionário são imediatamente determinadas, uma vez que as variáveis secundárias já o tenham sido, posto que

$$X_P = C_1\cos q_1 + U_P\cos A - V_P\text{sen}A$$

$$Y_P = C_1\text{sen}q_1 + U_P\text{sen}A + V_P\cos A$$

Com uma derivação em relação ao tempo, são obtidos os componentes de velocidade do ponto P, dados por

$$\begin{Bmatrix}\dot{X}_P\\ \dot{Y}_P\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_1\text{sen}q_1 & 0\\ C_1\cos q_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-U_P\text{sen}A-V_P\cos A & 0\\ U_P\cos A-V_P\text{sen}A & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{A}\\ \dot{B}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-C_1\text{sen}q_1 & 0\\ C_1\cos q_1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}-U_P\text{sen}A-V_P\cos A & 0\\ U_P\cos A-V_P\text{sen}A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{a1} & K_{a2}\\ K_{b1} & K_{b2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-C_1\text{sen}q_1-K_{a1}(U_P\text{sen}A+V_P\cos A) & -K_{a2}(U_P\text{sen}A+V_P\cos A)\\ C_1\cos q_1+K_{a1}(U_P\cos A-V_P\text{sen}A) & K_{a2}(U_P\cos A-V_P\text{sen}A)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}K_{px1} & K_{px2}\\ K_{py1} & K_{py2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix}$$

Na última expressão acima, a matriz de coeficientes é a matriz de coeficientes de velocidade para o ponto P. Note-se que é obtida uma matriz, e não um vetor.

Com $\ddot{A}$ e $\ddot{B}$ já determinados, o modo mais expedito de se obter a aceleração do ponto P é derivar as equações de velocidade com respeito ao tempo. Partindo da primeira expressão para as velocidades $\dot{X}_P$ e $\dot{Y}_P$, e derivando, chega-se a

$$\ddot{X}_P = -C_1\ddot{q}_1\text{sen}q_1 - C_1\dot{q}_1^2\cos q_1 - \ddot{A}(U_P\text{sen}A + V_P\cos A) - \dot{A}^2(U_P\cos A - V_P\text{sen}A)$$

$$\ddot{Y}_P = C_1\ddot{q}_1\cos q_1 - C_1\dot{q}_1^2\text{sen}q_1 + \ddot{A}(U_P\cos A - V_P\text{sen}A) - \dot{A}^2(U_P\text{sen}A + V_P\cos A)$$

Valores numéricos: As posições, velocidades e acelerações equacionadas acima foram determinadas para um mecanismo de quatro barras deslizante com as seguintes dimensões: $C_1 = 38{,}1 \text{ mm}$, $C_2 = 55{,}9 \text{ mm}$ e $C_3 = 88{,}9 \text{ mm}$. Sendo os ângulos das manivelas dados por $q_1 = 0{,}85$ radianos e $q_2 = 0{,}25$ radianos e as coordenadas do ponto P dadas por $U_P = 229 \text{ mm}$ e $V_P = 0{,}0 \text{ mm}$, a solução de posição resulta em

$$A = -0{,}125 \text{ rad},\ B = 119 \text{ mm},\ X_P = 252 \text{ mm} \text{ e } Y_P = 0{,}117 \text{ mm}.$$

Nesse caso, por pura coincidência, o ponto P está muito próximo do eixo X. Isso é consistente com os ângulos das manivelas e com o fato de que o ângulo A tem um valor negativo.

Sendo as velocidades $\dot{q}_1 = -2{,}6 \text{rad/s}$ e $\dot{q}_2 = 3{,}5 \text{rad/s}$, as velocidades desejadas são

$$\dot{A} = 2{,}00 \text{ rad/s},\ \dot{B} = -154 \text{ mm/s},\ \dot{X}_P = 131 \text{ mm/s} \text{ e } \dot{Y}_P = 389 \text{mm/s}.$$

As manivelas estão girando em sentidos contrários, o que implica uma magnitude de velocidade relativamente alta para o ponto P, qual seja $\left|\vec{V}_P\right| = 411 \text{ mm/s}$.

Para essas posições e velocidades, com as acelerações $\ddot{q}_1 = 0{,}42 \text{ rad/s}^2$ e $\ddot{q}_2 = 0{,}68 \text{ rad/s}^2$, as acelerações procuradas são

$$\ddot{A} = 5{,}08 \text{ rad/s}^2,\ \ddot{B} = -18{,}0 \text{ mm/s}^2,\ \ddot{X}_P = -946 \text{ mm/s}^2 \text{ e } \ddot{Y}_P = -1{,}22\text{x}10^3 \text{ mm/s}^2.$$

A magnitude da aceleração do ponto P é $\left|\vec{A}_P\right| = 1{,}55\text{x}10^3 \text{ mm/s}^2$.

3.2. ANÁLISE CINEMÁTICA COM SOLUÇÃO NUMÉRICA

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade em que soluções analíticas podem ser obtidas são relativamente raros. Os casos mais comuns são de mecanismos que requerem soluções numéricas para as equações cinemáticas correspondentes.

Equações de posição: O processo de solução numérica das equações de posição é exatamente o mesmo descrito no capítulo 2, ou seja, através do método de Newton-Raphson. Sua implementação requer a matriz Jacobiana, que pode ser obtida diretamente ou como parte da análise de velocidade.

Equações de velocidade: As equações de posição são derivadas com relação ao tempo para fornecer as equações de velocidade. Na preparação para determinar as incógnitas de velocidade, as equações de velocidade são escritas em forma matricial, de modo que

$$[J]_{(N2xN2)}\{\dot{S}\}_{(N2x1)} = [B]_{(N2xN1)}\{\dot{q}\}_{(N1x1)}$$

onde N1 é o número de variáveis primárias e N2 é o número de variáveis secundárias. As matrizes na equação acima são as seguintes: $[J]$, que é a matriz Jacobiana, $\{\dot{S}\}$, que é o vetor coluna de incógnitas (velocidades secundárias), $[B]$, uma matriz retangular de coeficientes e $\{\dot{q}\}$, o vetor coluna de velocidades primárias.

A matriz de coeficientes de velocidade $[K]$ é definida por

$$\{\dot{S}\}_{(N2x1)} = [K]_{(N2xN1)} \{\dot{q}\}_{(N1x1)}$$

donde se obtém

$$[K]_{(N2xN1)} = [J]^{-1}_{(N2xN2)} [B]_{(N2xN1)}$$

Para se alcançar eficiência computacional e erro de arredondamento reduzido, a matriz de coeficientes de velocidade deve ser obtida como a solução de um sistema de equações lineares simultâneas, qual seja

$$[J]_{(N2xN2)} [K]_{(N2xN1)} = [B]_{(N2xN1)}$$

Equações de aceleração: As acelerações secundárias serão obtidas pela derivação da expressão relativa às velocidades secundárias, dada em termos da matriz de coeficientes de velocidade e do vetor coluna das velocidades primárias. Em geral, os elementos da matriz de coeficientes de velocidade são funções de todas as variáveis primárias, o que demanda o uso da regra da cadeia na derivação supra mencionada.

A expressão resultante para as acelerações secundárias é a seguinte:

$$\{\ddot{S}\} = [K]\{\ddot{q}\} + \dot{q}_1 \frac{\partial [K]}{\partial q_1}\{\dot{q}\} + \dot{q}_2 \frac{\partial [K]}{\partial q_2}\{\dot{q}\} + \ldots + \dot{q}_{N1} \frac{\partial [K]}{\partial q_{N1}}\{\dot{q}\}$$

$$= [K]\{\ddot{q}\} + \dot{q}_1 [L_1]\{\dot{q}\} + \dot{q}_2 [L_2]\{\dot{q}\} + \ldots + \dot{q}_{N1} [L_{N1}]\{\dot{q}\}$$

onde a notação $[L_i]$ representa $\partial[K]/\partial q_i$.

Como exposto na seção precedente, as matrizes $[L_i]$ são as matrizes de derivadas parciais de coeficientes de velocidade, análogas aos vetores de derivadas de coeficientes de velocidade, estudados em mecanismos com um grau de liberdade. Observa-se que a derivação, aqui, é com relação a uma dada variável primária, indicada pelo subscrito i. O próximo passo é como obter as matrizes $[L_i]$ numericamente, evitando, assim, o tedioso esforço de realizar as derivações parciais requeridas.

Como visto antes, a matriz de coeficientes de velocidade pode ser obtida da seguinte expressão:

$$[\mathrm{J}][\mathrm{K}]=[\mathrm{B}]$$

onde os elementos da matriz Jacobiana $[\mathrm{J}]$ e da matriz de coeficientes $[\mathrm{B}]$ são conhecidos explicitamente. Essa expressão é derivada com relação a uma variável primária qualquer $\mathrm{q_i}$, resultando em

$$\frac{\partial[\mathrm{J}]}{\partial \mathrm{q_i}}[\mathrm{K}]+[\mathrm{J}]\frac{\partial[\mathrm{K}]}{\partial \mathrm{q_i}}=\frac{\partial[\mathrm{B}]}{\partial \mathrm{q_i}}$$

Resolvendo para o termo contendo a matriz desejada, tem-se que

$$[\mathrm{J}]\frac{\partial[\mathrm{K}]}{\partial \mathrm{q_i}}=\frac{\partial[\mathrm{B}]}{\partial \mathrm{q_i}}-\frac{\partial[\mathrm{J}]}{\partial \mathrm{q_i}}[\mathrm{K}]$$

A expressão acima representa simplesmente um sistema de equações lineares nos elementos da matriz desejada. Assim, a solução formal para a matriz $[\mathrm{L_i}]$ é a seguinte:

$$[\mathrm{L_i}]=\frac{\partial[\mathrm{K}]}{\partial \mathrm{q_i}}=[\mathrm{J}]^{-1}\left(\frac{\partial[\mathrm{B}]}{\partial \mathrm{q_i}}-\frac{\partial[\mathrm{J}]}{\partial \mathrm{q_i}}[\mathrm{K}]\right)$$

Contudo, o cálculo numérico é melhor realizado através da solução do sistema de equações lineares simultâneas, tal como indicado para a obtenção da matriz de coeficientes de velocidade.

Uma vez determinadas as matrizes de derivadas parciais de coeficientes de velocidade, as acelerações secundárias podem ser calculadas de forma expedita. No exemplo seguinte, posições, velocidades e acelerações secundárias serão determinadas bem como as posições e as velocidades dos centros de massa existentes.

Exemplo: O mecanismo mostrado na figura 3.2 é conhecido como <u>mecanismo de quatro barras com pivô da manivela em translação</u>. Na realidade, esse não é, em senso estrito, um mecanismo de quatro barras, posto que não há quarta barra de comprimento fixo. A terminologia apenas sugere a associação. As duas variáveis primárias são a localização do pivô da manivela e a rotação da manivela, denotadas por $\mathrm{q_o}$ e $\mathrm{q_1}$, respectivamente. As variáveis secundárias são os ângulos $\mathrm{A_2}$ e $\mathrm{A_3}$. O pivô da contra-manivela fica estacionário no ponto (X_4, Y_4). Posição, velocidade e aceleração devem ser determinadas para as variáveis secundárias, bem como a posição e a velocidade de cada centro de massa.

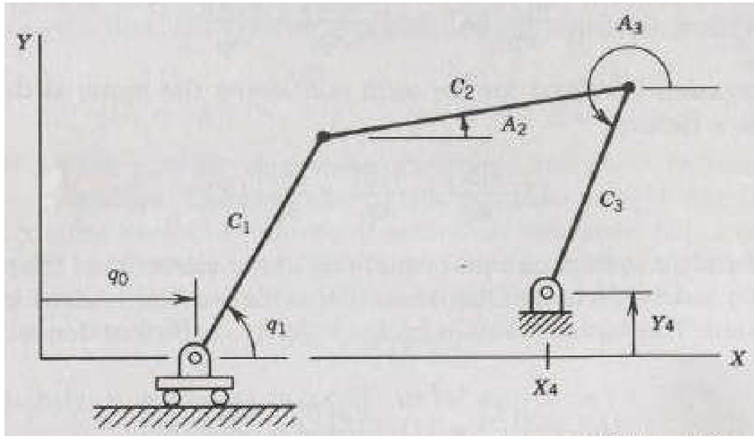

Figura 3.2 – Representação cinemática de um mecanismo de quatro barras com pivô da manivela em translação

Equações de posição: As equações de posição dependem das variáveis primárias, a saber

$$f_h(q_0, q_1, A_2, A_3) = q_0 + C_1 \cos q_1 + C_2 \cos A_2 + C_3 \cos A_3 - X_4 = 0$$

$$f_v(q_0, q_1, A_2, A_3) = C_1 \mathrm{sen} q_1 + C_2 \mathrm{sen} A_2 + C_3 \mathrm{sen} A_3 - Y_4 = 0$$

Para valores dados de q_o e q_1, essas equações devem ser resolvidas para A_2 e A_3. Uma solução analítica pode ser possível, mas uma solução numérica será mais simples de se obter.

Equações de velocidade: As equações de posição são derivadas em relação ao tempo para se obter as seguintes equações de velocidade:

$$\begin{bmatrix} -C_2 \mathrm{sen} A_2 & -C_3 \mathrm{sen} A_3 \\ C_2 \cos A_2 & C_3 \cos A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & C_1 \mathrm{sen} q_1 \\ 0 & -C_1 \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix}$$

O lado esquerdo dessa equação consiste da matriz Jacobiana pré-multiplicando o vetor coluna de velocidades secundárias. Já o lado direito é formado pela matriz de coeficientes $[B]$ pré-multiplicando o vetor coluna de velocidades primárias.

Ao solucionar numericamente esse sistema de equações lineares, obtêm-se as velocidades secundárias $\dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$ como combinações lineares de $\dot{q}_o$ e $\dot{q}_1$, de modo que

$$\begin{Bmatrix} \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a20} & K_{a21} \\ K_{a30} & K_{a31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix}$$

Equações de aceleração: Derivando a equação de velocidade acima, chega-se às acelerações secundárias, dadas por

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A}_2 \\ \ddot{A}_3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \end{Bmatrix} + \dot{q}_0 [L_0] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} + \dot{q}_1 [L_1] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix}$$

As matrizes de derivadas parciais de coeficientes de velocidade são determinadas como soluções das seguintes duas equações:

$$[J][L_0]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_2K_{a20}\cos A_2 & C_3K_{a30}\cos A_3\\ C_2K_{a20}\mathrm{sen}A_2 & C_3K_{a30}\mathrm{sen}A_3\end{bmatrix}[K]$$

$$[J][L_1]=\begin{bmatrix}0 & C_1\cos q_1\\ 0 & C_1\mathrm{sen}q_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_2K_{a21}\cos A_2 & C_3K_{a31}\cos A_3\\ C_2K_{a21}\mathrm{sen}A_2 & C_3K_{a31}\mathrm{sen}A_3\end{bmatrix}[K]$$

As acelerações secundárias estão, assim, prontas para serem calculadas em termos das velocidades e acelerações primárias e das matrizes $[K]$, $[L_0]$ e $[L_1]$.

Posições e velocidades dos centros de massa: Seja agora a determinação das posições e velocidades, em um sistema estacionário de coordenadas, dos centros de massa das três barras da figura 3.3. Esses pontos são localizados pelas coordenadas (U_{c1},V_{c1}), (U_{c2},V_{c2}) e (U_{c3},V_{c3}), relativas a sistemas móveis de coordenadas, solidários a cada barra.

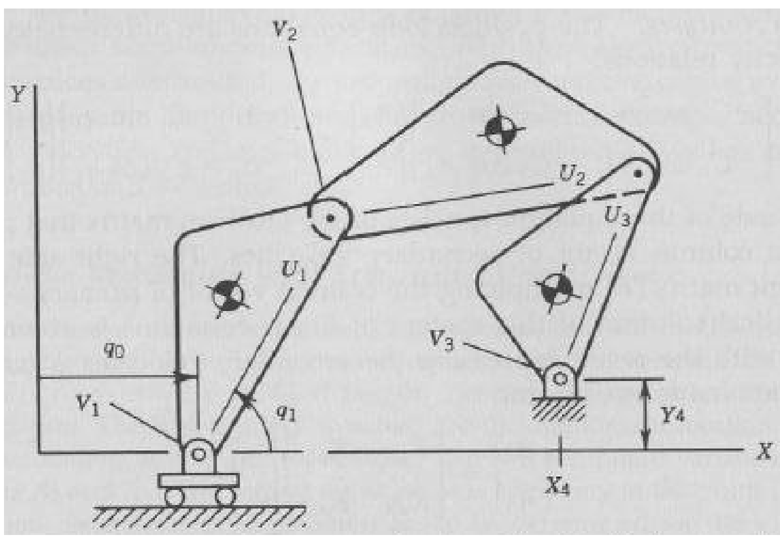

Figura 3.3 – Representação esquemática de um mecanismo de quatro barras com pivô da manivela em translação ilustrando os centros de massa

Os vetores de posição dos centros de massa são determinados por inspeção, de modo que

$$\begin{Bmatrix}X_{c1}\\ Y_{c1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_0+U_{c1}\cos q_1-V_{c1}\mathrm{sen}q_1\\ U_{c1}\mathrm{sen}q_1+V_{c1}\cos q_1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}X_{c2}\\ Y_{c2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_0+C_1\cos q_1+U_{c2}\cos A_2-V_{c2}\mathrm{sen}A_2\\ C_1\mathrm{sen}q_1+U_{c2}\mathrm{sen}A_2-V_{c2}\cos A_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}X_{c3}\\ Y_{c3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_4-U_{c3}\cos A_3+V_{c3}\mathrm{sen}A_3\\ Y_4-U_{c3}\mathrm{sen}A_3-V_{c3}\cos A_3\end{Bmatrix}$$

Quando as expressões acima são derivadas com relação ao tempo, junto com os termos envolvendo $\dot{q}_o$ e $\dot{q}_1$, haverá também termos envolvendo $\dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$. Assim, os elementos da matriz retangular de coeficientes de velocidade são requeridos para se expressar $\dot{A}_2$ e $\dot{A}_3$ em função de $\dot{q}_o$ e $\dot{q}_1$.

Feitas essas substituições, verifica-se que os componentes de velocidade dos centros de massa são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{c1} \\ \dot{Y}_{c1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -U_{c1}\mathrm{sen}q_1 - V_{c1}\cos q_1 \\ 0 & U_{c1}\cos q_1 - V_{c1}\mathrm{sen}q_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} \quad (\underline{\text{barra 1}})\ ;$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{c2} \\ \dot{Y}_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x20} & K_{x21} \\ K_{y20} & K_{y21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} = [K_2] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} \quad (\underline{\text{barra 2}})\ ,$$

onde

$$K_{x20} = 1 - K_{a20}(U_{c2}\mathrm{sen}A_2 + V_{c2}\cos A_2)\ ,$$
$$K_{x21} = -C_1\mathrm{sen}q_1 - K_{a21}(U_{c2}\mathrm{sen}A_2 + V_{c2}\cos A_2)\ ,$$
$$K_{y20} = K_{a20}(U_{c2}\mathrm{sen}A_2 - V_{c2}\mathrm{sen}A_2)\ ,$$
$$\text{e}\ K_{y21} = C_1\cos q_1 + K_{a21}(U_{c2}\cos A_2 - V_{c2}\mathrm{sen}A_2)\ ;$$

$$\text{e} \quad \begin{Bmatrix} \dot{X}_{c3} \\ \dot{Y}_{c3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x30} & K_{x31} \\ K_{y30} & K_{y31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} = [K_3] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{barra 3})\ ,$$

onde

$$K_{x30} = K_{a30}(U_{c3}\mathrm{sen}A_3 + V_{c3}\cos A_3)\ ,$$
$$K_{x31} = K_{a31}(U_{c3}\mathrm{sen}A_3 + V_{c3}\cos A_3)\ ,$$
$$K_{y30} = K_{a30}(-U_{c3}\cos A_3 + V_{c3}\mathrm{sen}A_3)\ ,$$
$$\text{e}\ K_{y31} = K_{a31}(-U_{c3}\cos A_3 + V_{c3}\mathrm{sen}A_3)\ .$$

Para alguns propósitos de análise dinâmica, será útil combinar as expressões anteriores numa só matriz de coeficientes de velocidade, que fornece todos os componentes de velocidade dos centros de massa de todos os elementos de um mecanismo, bem como as taxas de rotação. Essa matriz de coeficientes de velocidade, com dimensão de (9x2), será calculada numericamente sem dificuldades, a partir da seguinte definição:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{c1} \\ \dot{Y}_{c1} \\ \dot{X}_{c2} \\ \dot{Y}_{c2} \\ \dot{X}_{c3} \\ \dot{Y}_{c3} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_1] & \\ & \\ [K_2] & \\ & \\ [K_3] & \\ & \\ 0 & 1 \\ K_{a20} & K_{a21} \\ K_{a30} & K_{a31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix}$$

3.3. CONCLUSÃO

Para mecanismos com múltiplos graus de liberdade, a análise cinemática é uma extensão das idéias introduzidas previamente na análise de mecanismos de um grau de liberdade. Embora o número de coordenadas primárias aumente no caso com múltiplos graus de liberdade, o processo de solução das equações de posição pouco se altera.

Já a solução para as velocidades secundárias, ou para os coeficientes de velocidade, é mais complicada, uma vez que se passa a ter uma matriz retangular de coeficientes de velocidade, ao invés de um vetor coluna. A complicação se estende ainda mais na análise de aceleração, onde derivadas parciais da matriz retangular de coeficientes de velocidade são requeridas.

O uso de coordenadas em sistemas móveis e estacionários para pontos de interesse permanece da mesma forma estabelecida previamente para mecanismos com um grau de liberdade. Os coeficientes de velocidade e as derivadas parciais de coeficientes de velocidade constituem, novamente, matrizes retangulares.

De modo geral, as soluções desejadas são obtidas pela via numérica, embora se observe que, em alguns poucos casos, soluções analíticas podem ser alcançadas. Os conceitos expostos nos capítulos de análise cinemática serão cruciais nas análises estática e dinâmica, a serem consideradas nos próximos capítulos.

FONTE

– Mechanics of Machines, S. Doughty, Wiley, 1988.