

2. MECANISMOS COM UM GRAU DE LIBERDADE

2.1. VISÃO GERAL DO PROCESSO

Esse capítulo aborda a análise cinemática de mecanismos com um grau de liberdade. Nesse caso, como visto no capítulo 1, apenas uma variável primária precisa ser escolhida para se definir, por completo, a configuração espacial de todo o mecanismo. Nesta análise, o grau de liberdade é associado com alguma coordenada conveniente e considerado como uma entrada do problema.

A análise cinemática de um mecanismo é entendida, via de regra, como o processo de se obter as equações que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração em todos os pontos de interesse no mecanismo, face tanto a valores escolhidos da variável primária quanto a valores correspondentes de velocidade e aceleração.

Essa seção apresenta esse processo por meio de um exemplo simples, qual seja, o mecanismo de retorno rápido. Seções posteriores apresentarão dois casos comuns e importantes dentro da dinâmica de máquinas, que são os casos do mecanismo biela-manivela e do mecanismo de quatro barras. Ao final, um desenvolvimento generalizado da análise cinemática de mecanismos de um grau de liberdade será exposto.

Considere-se, então, o caso do mecanismo de retorno rápido mostrado na figura 2.1, com sua correspondente representação cinemática, mostrada na figura 2.2. Esse mecanismo pode ser encontrado em vários dispositivos alimentadores, além de máquinas de usinagem.

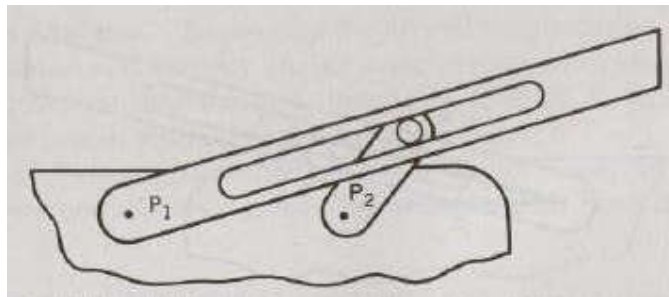


Figura 2.1 – Representação esquemática do mecanismo de retorno rápido

A manivela, com um pivô em P_2 , gira livremente no plano, fazendo com que o braço, com um pivô em P_1 , tenha um movimento alternativo de rotação. A figura 2.1 mostra a extremidade da manivela deslizando dentro de um rasgo no braço, enquanto que a figura 2.2 mostra o braço como uma haste passando através de um bloco na extremidade da manivela. O dispositivo pode ser construído de ambas as formas e as duas construções são cinematicamente equivalentes.

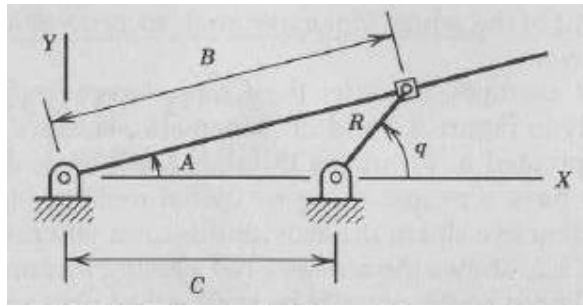


Figura 2.2 – Representação cinemática do mecanismo de retorno rápido

A distância C entre os centros P_1 e P_2 e o raio R da manivela, indicados na figura 2.2, são dimensões conhecidas. Com C e R conhecidos, se um valor é dado para o ângulo q, que descreve a posição da manivela, a configuração do mecanismo é especificada por completo. Ou seja, esse é evidentemente um mecanismo com um grau de liberdade.

As variáveis de posição que devem ser determinadas, em função das dimensões C e R e do ângulo q, são o ângulo A do braço e a localização do ponto de contato entre braço e manivela, indicada pelo comprimento B. O primeiro passo será estabelecer as equações de posição.

Equações de posição: Considerem-se os três vetores \vec{B} , \vec{C} e \vec{R} , indicados na figura 2.3.

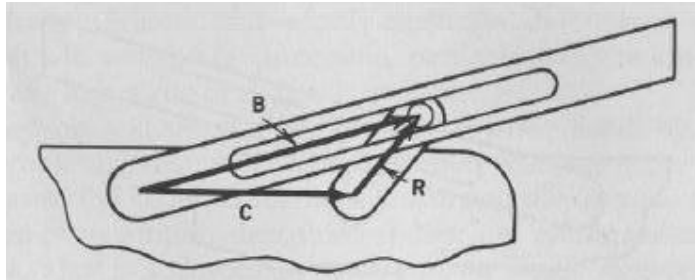


Figura 2.3 – Laço de posição para o mecanismo de retorno rápido

É evidente, durante o movimento do mecanismo, que

$$\vec{B} - \vec{R} - \vec{C} = \vec{0}$$

Em forma escalar, a equação vetorial acima pode ser desdobrada em duas, quais sejam,

$$f_h(q, A, B) = B \cos A - R \cos q - C = 0 \quad (\text{componente horizontal})$$

$$f_v(q, A, B) = B \sin A - R \sin q - 0 = 0 \quad (\text{componente vertical})$$

Essas são as equações de laço de vetores de posição, ou simplesmente, equações de posição, para o mecanismo em questão. A variável primária (entrada) q e as dimensões C e R são conhecidas, ao passo que as variáveis secundárias A e B são ainda incógnitas. Para que se tornem conhecidas, as equações acima, de natureza não linear, devem ser resolvidas.

Comumente, a solução das equações de posição tem que ser obtida pela via numérica, face à impossibilidade de solução analítica. Aqui, contudo, a solução analítica é possível e será buscada, tendo em vista o caráter introdutório dessa seção.

Eliminando B nas duas equações, obtém-se

$$\operatorname{tg}A = \frac{R \operatorname{sen}q}{C + R \operatorname{cos}q}$$

donde A pode ser determinado, usando o valor principal da função arco tangente. Com A conhecido, a distância B pode ser facilmente computada solucionando qualquer uma das seguintes equações:

$$B = \frac{C + R \operatorname{cos}q}{\operatorname{cos}A} \quad \text{ou} \quad B = \frac{R \operatorname{sen}q}{\operatorname{sen}A}$$

Observe-se que haverá ocasiões em que o $\operatorname{sen}A$ será zero e, para algumas proporções do mecanismo, o $\operatorname{cos}A$ também poderá ser zero. Mesmo que ambos os casos possam ocorrer, eles não ocorrerão simultaneamente, de forma que B sempre poderá ser obtido ou de uma ou de outra forma. No caso de implementação computacional, testes deverão ser incluídos para se encaminhar a solução por uma ou por outra fórmula.

Equações de velocidade: Ao se realizar a análise de velocidade, assume-se que os resultados da análise de posição já estão disponíveis, junto com os dados originais conhecidos. No presente exemplo, isso significa que os valores conhecidos agora também incluem A e B, além de C, R e q, ao passo que se deseja conhecer as incógnitas \dot{A} e \dot{B} .

As equações de velocidade são obtidas pela derivação das equações de posição, de sorte que

$$\dot{B} \operatorname{cos}A - B \dot{A} \operatorname{sen}A + R \dot{q} \operatorname{sen}q = 0$$

$$\dot{B} \operatorname{sen}A + B \dot{A} \operatorname{cos}A - R \dot{q} \operatorname{cos}q = 0$$

Em vista das grandezas já conhecidas, essas equações são, na realidade, um par de equações lineares algébricas simultâneas em duas variáveis, \dot{A} e \dot{B} . Isso se torna mais claro se as equações são escritas em forma matricial, qual seja,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{cos}A & -B \operatorname{sen}A \\ \operatorname{sen}A & B \operatorname{cos}A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{B} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = R \dot{q} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}q \\ \operatorname{cos}q \end{Bmatrix}$$

Para a solução analítica dessas equações, é necessário pré-multiplicar a matriz de coeficientes do lado esquerdo por sua inversa. Note-se, de passagem, que o determinante da matriz de coeficientes é simplesmente B. Fazendo a pré-multiplicação pela inversa, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \dot{B} \\ \dot{A} \end{Bmatrix} = \frac{R\dot{q}}{B} \begin{bmatrix} B \cos A & B \sin A \\ -\sin A & \cos A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{Bmatrix} R \sin(A - q) \\ (R/B) \cos(A - q) \end{Bmatrix}$$

O resultado acima mostra que cada uma das velocidades desconhecidas, \dot{A} ou \dot{B} , é dada pelo produto de \dot{q} , que é a velocidade (derivada temporal) da variável primária q , com um fator dependente da posição. Esses fatores são conhecidos como coeficientes de velocidade e, no presente exemplo, expressos da seguinte forma:

$$\dot{B}/\dot{q} = K_b(q) = R \sin(A - q)$$

$$\dot{A}/\dot{q} = K_a(q) = (R/B) \cos(A - q)$$

Para um valor específico de \dot{q} , os valores correspondentes de \dot{A} e \dot{B} são expeditamente calculados pelas expressões acima. Sem se especificar o valor de \dot{q} , a análise de velocidade pode ser feita de forma generalizada, em função dos coeficientes de velocidade $K_b(q)$ e $K_a(q)$, que são dependentes da posição do mecanismo.

Retornando às equações de posição, nota-se que, na forma escalar, elas foram dadas como

$$f_h(q, A, B) = 0 \quad \text{componente horizontal}$$

$$f_v(q, A, B) = 0 \quad \text{componente vertical}$$

Verifica-se que a matriz de coeficientes das incógnitas \dot{A} e \dot{B} tem a seguinte correspondência:

$$\begin{bmatrix} \cos A & -B \sin A \\ \sin A & B \cos A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_h / \partial B & \partial f_h / \partial A \\ \partial f_v / \partial B & \partial f_v / \partial A \end{bmatrix}$$

Essa matriz é conhecida como matriz Jacobiana do sistema de equações associado. Essa mesma matriz aparecerá na análise de aceleração, como matriz de coeficientes das acelerações desconhecidas.

Equações de aceleração: Para o desenvolvimento da análise de aceleração, presume-se que tanto os resultados da análise de posição quanto da análise de velocidade sejam conhecidos. Assim, a lista de informações conhecidas agora inclui $q, C, R, A, B, \dot{q}, \dot{A}$ e \dot{B} . As incógnitas a serem determinadas nesse estágio são \ddot{A} e \ddot{B} .

Há duas abordagens para a análise de aceleração. Ambas serão descritas, posto que cada uma delas fornece uma visão diferente. Primeiro, pode-se derivar as equações de velocidade e rearranjar os termos resultantes, de forma que as equações de aceleração sejam as seguintes:

$$\ddot{B} \cos A - 2\dot{B}\dot{A} \sin A - B\ddot{A} \sin A - B\dot{A}^2 \cos A + R\dot{q} \sin q + R\dot{q}^2 \cos q = 0$$

$$\ddot{B} \sin A + 2\dot{B}\dot{A} \cos A + B\ddot{A} \cos A - B\dot{A}^2 \sin A - R\dot{q} \cos q + R\dot{q}^2 \sin q = 0$$

Novamente, o resultado é um conjunto de equações lineares simultâneas nas variáveis desconhecidas, devido ao fato de que todos os termos não lineares envolvem apenas grandezas já conhecidas. A relação linear é mais aparente quando as equações são escritas em forma matricial, como se segue:

$$\begin{bmatrix} \cos A & -B \sin A \\ \sin A & B \cos A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{B} \\ \ddot{A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\dot{B}\dot{A} \sin A + B\dot{A}^2 \cos A - R\dot{q} \sin q - R\dot{q}^2 \cos q \\ -2\dot{B}\dot{A} \cos A + B\dot{A}^2 \sin A + R\dot{q} \cos q - R\dot{q}^2 \sin q \end{Bmatrix}$$

Quando esse sistema de equações lineares é solucionado e as variáveis \dot{A} e \dot{B} são substituídas pelos coeficientes de velocidade correspondentes, multiplicados por \dot{q} , as expressões de aceleração tornam-se as seguintes:

$$\ddot{B} = \ddot{q} R \sin(A - q) + \dot{q}^2 \left[K_a^2 B - R \cos(A - q) \right]$$

$$\ddot{A} = \frac{\ddot{q} R}{B} \cos(A - q) + \dot{q}^2 \left[-\frac{2K_a K_b}{B} - \frac{R}{B} \sin(A - q) \right]$$

Este resultado mostra que as acelerações \ddot{A} e \ddot{B} consistem, cada uma, de dois termos, um proporcional a \ddot{q} e outro proporcional a \dot{q}^2 .

O significado desses dois termos é realçado quando a segunda abordagem para a análise de aceleração é empregada. Para tal propósito, considere-se as relações de velocidade expressas na seguinte forma:

$$\dot{B} = \dot{q} K_b(q)$$

$$\dot{A} = \dot{q} K_a(q)$$

Se essas equações são derivadas em relação ao tempo (empregando a regra da cadeia, posto que K_b e K_a são funções de q e q é uma função do tempo), as acelerações são dadas por

$$\ddot{B} = \frac{d(\dot{q})}{dt} K_b + \dot{q} \frac{d(K_b)}{dq} \frac{dq}{dt} = \ddot{q} K_b + \dot{q}^2 \frac{d(K_b)}{dq}$$

$$\ddot{A} = \frac{d(\dot{q})}{dt} K_a + \dot{q} \frac{d(K_a)}{dq} \frac{dq}{dt} = \ddot{q} K_a + \dot{q}^2 \frac{d(K_a)}{dq}$$

Por essa abordagem, o resultado em dois termos para cada uma das variáveis é claramente esperado. Verifica-se que esses termos são: (1) o coeficiente de velocidade correspondente

multiplicado por \dot{q} e (2) a derivada, em relação a q , do coeficiente de velocidade correspondente, multiplicado por \dot{q}^2 . Essas derivadas recebem a denominação de derivadas de coeficientes de velocidade. O obtido acima pode ser comprovado pelos resultados oriundos da primeira abordagem.

Como antecipado, a matriz de coeficientes das acelerações \ddot{A} e \ddot{B} é a matriz Jacobiana. Essa recorrência é esperada; sua ausência seria uma indicação de erro na análise. Na solução numérica das equações de posição, velocidade e aceleração, requer-se que o determinante da matriz Jacobiana não seja nulo para que os sistemas de equações associados possam ser solucionados.

Valores numéricos: Para avaliação numérica, considere-se um particular mecanismo de retorno rápido, definido por $C = 63,50$ mm e $R = 19,05$ mm. Para esse sistema, os resultados das análises anteriores podem ser programados e visualizados para uma revolução completa da manivela, sob velocidade de rotação constante. Essa visualização é feita através da figura 2.4, que apresenta curvas normalizadas para A , \dot{A} e \ddot{A} (quais sejam, $A/|A|_{\max}$, $\dot{A}/|\dot{A}|_{\max}$ e $\ddot{A}/|\ddot{A}|_{\max}$) e, similarmente, para B , \dot{B} e \ddot{B} . O ângulo da manivela q é expresso em radianos nessa figura.

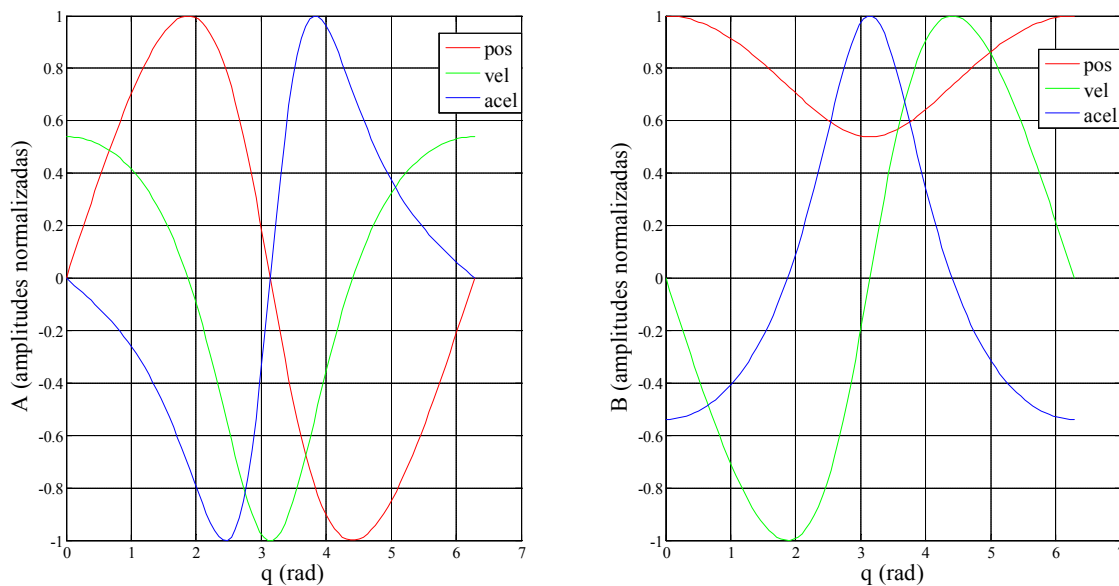


Figura 2.4 – Resposta cinemática normalizada de um mecanismo de retorno rápido

Posição, Velocidade e Aceleração de Pontos de Interesse: Os resultados determinados até agora dão uma descrição completa do ângulo A , do comprimento B e de suas derivadas. Contudo, nada foi dito com relação à posição, à velocidade e à aceleração de quaisquer outros pontos dos componentes do mecanismo. Como há apenas dois componentes e cada qual gira em torno de um ponto fixo, a análise que se segue diz respeito à rotação em torno de um ponto fixo.

Faça-se, então, a descrição de um particular ponto de interesse P num corpo girante, conforme a figura 2.5. Inicialmente, define-se um sistema móvel de coordenadas (U,V) , solidário ao

corpo girante, ou seja, que se move junto com o corpo. Embora qualquer escolha possa ser feita para os eixos U e V, é conveniente se escolher o eixo U de modo que sua orientação esteja associada com uma das coordenadas angulares primárias ou secundárias. O eixo V é então tomado a 90° do eixo U, no sentido positivo da coordenada angular associada.

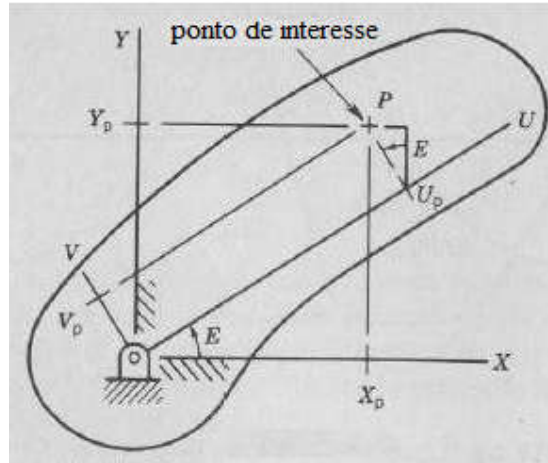


Figura 2.5 – Coordenadas em sistema móvel e estacionário de coordenadas para um ponto de interesse num corpo em rotação em torno de um ponto fixo

O ponto de interesse é especificado pelas coordenadas (U_p, V_p) . Desde que esse ponto permaneça o mesmo, os valores de suas coordenadas, nesse sistema de referência, não se alteram.

Para o presente caso, a origem do sistema móvel de coordenadas é escolhida como estando num dos pivôs. Para descrever um ponto na manivela, o eixo U é tomado em associação com a variável q . Caso o ponto esteja no braço, então a associação se dá com a variável A . Para generalizar a análise, o ângulo será designado genericamente por E . Note-se que E pode representar tanto q quanto A , dependendo do componente de interesse.

Defina-se, agora, um sistema fixo de coordenadas, denotado por (X, Y) . Também é conveniente se escolher a origem para este sistema como estando num dos pivôs, conforme indicado na figura 2.5. A localização do ponto de interesse, com relação ao sistema fixo de coordenadas, é expressa pelas coordenadas (X_p, Y_p) .

O que se necessita é expressar as coordenadas (X_p, Y_p) em função das coordenadas (U_p, V_p) . As relações que fazem essa associação são as seguintes (verificar!):

$$X_p = U_p \cos E - V_p \sin E$$

$$Y_p = U_p \sin E + V_p \cos E$$

As relações acima expressam as coordenadas do ponto em tela num sistema estacionário, em função das coordenadas num sistema móvel, solidário com o corpo em que se está o ponto, e também do ângulo E .

Os componentes de velocidade para o ponto de interesse, \dot{X}_p e \dot{Y}_p , são determinados pela derivação das expressões para X_p e Y_p . Como as coordenadas U_p e V_p não se alteram com o tempo, mas o ângulo E sim, os componentes de velocidade são os seguintes (verificar!):

$$V_{px} = \dot{X}_p = \dot{E}(-U_p \text{sen} E - V_p \text{cos} E)$$

$$V_{py} = \dot{Y}_p = \dot{E}(U_p \text{cos} E - V_p \text{sen} E)$$

Essas relações dão os dois componentes de velocidade para o ponto, um em cada direção de movimento. Os coeficientes de velocidade para o ponto são:

$$K_{px} = -U_p \text{sen} E - V_p \text{cos} E$$

$$K_{py} = U_p \text{cos} E - V_p \text{sen} E$$

Assim, em termos dos coeficientes de velocidade, os componentes de velocidade são:

$$V_{px} = \dot{X}_p = \dot{E}K_{px}$$

$$V_{py} = \dot{Y}_p = \dot{E}K_{py}$$

Analogamente, para obter os componentes de aceleração, os componentes de velocidade são derivados com relação ao tempo, de modo que (verificar!):

$$A_{px} = \ddot{X}_p = \ddot{E}(-U_p \text{sen} E - V_p \text{cos} E) + \dot{E}^2(-U_p \text{cos} E + V_p \text{sen} E)$$

$$A_{py} = \ddot{Y}_p = \ddot{E}(U_p \text{cos} E - V_p \text{sen} E) + \dot{E}^2(-U_p \text{sen} E - V_p \text{cos} E)$$

Por inspeção das expressões acima, constata-se que elas podem ser reescritas como (verificar!):

$$A_{px} = \ddot{X}_p = \ddot{E}K_{px} + \dot{E}^2 L_{px}$$

$$A_{py} = \ddot{Y}_p = \ddot{E}K_{py} + \dot{E}^2 L_{py}$$

onde L_{px} e L_{py} são as derivadas dos coeficientes de velocidade K_{px} e K_{py} em relação a E . Essa última observação pode ser verificada por cálculo direto. Note-se novamente que, para um particular ponto num corpo, há dois coeficientes de velocidade K_{px} e K_{py} e, conseqüentemente, duas derivadas de coeficientes de velocidade L_{px} e L_{py} .

Essa análise se aplica a qualquer ponto num corpo que gira em torno de um ponto fixo. Embora ambos os corpos do mecanismo em questão sejam desse tipo, muitos componentes de máquinas não se movem em torno de pontos fixos. Um método aplicável a essas situações será visto nas seções seguintes.

Sumário do exemplo analisado: A análise anteriormente feita consistiu dos seguintes passos:

1. Desenvolvimento e solução das equações de posição para as variáveis secundárias, em função da variável primária;
2. Derivação das equações de posição para se obter as equações de velocidade, que são resolvidas ou para as velocidades secundárias ou para os coeficientes de velocidade;
3. Determinação das acelerações secundárias pela solução das equações resultante da derivação das equações de velocidade. Isso pode ser feito diretamente, pela derivação indicada, ou pelo uso dos coeficientes de velocidade e das derivadas dos coeficientes de velocidade, obtidos por derivação daqueles;
4. Definição de um sistema móvel de coordenadas para se especificar a localização de um particular ponto de interesse;
5. Determinação de coordenadas num sistema estacionário para o ponto de interesse, em função das coordenadas no sistema móvel e das variáveis primária e/ou secundárias;
6. Determinação dos componentes de velocidade e aceleração, bem como dos respectivos coeficientes de velocidade e derivadas de coeficientes de velocidade, com base nas coordenadas do sistema estacionário.

2.2. CINEMÁTICA DO MECANISMO BIELA-MANIVELA

Um dos mecanismos mais comuns e importantes é o mecanismo biela-manivela. Ele pode ser encontrado em vários equipamentos e máquinas, tais como bombas, compressores e, em especial, motores de combustão interna. Na maioria dos casos, a manivela roda continuamente num mesmo sentido, embora o movimento também possa ser oscilatório. A análise a ser apresentada aqui pretende ser geral, de modo a ser aplicada em qualquer mecanismo biela-manivela.

A representação cinemática para um mecanismo biela-manivela típico é mostrada na figura 2.6. A manivela, de raio R , gira em torno de um pivô fixo na origem do sistema de coordenadas, enquanto o pistão tem um movimento alternativo ao longo de uma reta paralela ao eixo X . Como indicado, o caminho percorrido pelo pivô do pistão encontra-se deslocado de um valor C acima do eixo X . Para muitas aplicações, esse deslocamento será zero. Contudo, ele pode existir e até ser negativo. A biela é o elemento que liga a manivela ao pistão e seu comprimento é denotado por L .

Para o mecanismo em tela, se um valor é especificado para o ângulo q da manivela, toda a configuração espacial do conjunto estará determinada. Ou seja, o mecanismo tem um grau de liberdade, o que pode ser visualizado pelo processo de construção gráfica apresentado na figura 2.7. Assume-se, nesse processo, que todos os dados dimensionais são conhecidos de antemão.

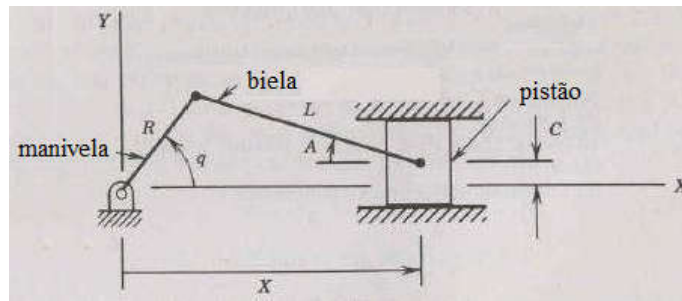


Figura 2.6 – Representação cinemática do mecanismo biela-manivela

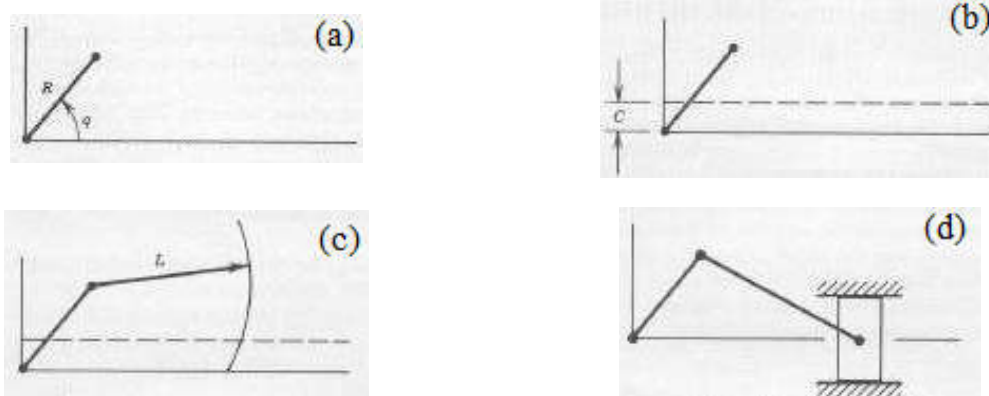


Figura 2.7 – Mecanismo biela-manivela com um grau de liberdade: construção gráfica

- (a) localização do topo da manivela; (b) definição do caminho do pivô do pistão;
 (c) localização da posição do pivô do pistão; (d) configuração completa

Equações de posição: O ângulo q (coordenada generalizada) é escolhido como variável cinemática primária, ao passo que o ângulo A , associado à manivela, e a posição X , do pistão, são escolhidos como variáveis cinemáticas secundárias de interesse (vide figura 2.6). As equações de posição associadas, em forma escalar, são as seguintes:

$$f_h(q, A, X) = R \cos q + L \cos A - X = 0 \quad (\text{componente horizontal})$$

$$f_v(q, A, X) = R \sin q - L \sin A - C = 0 \quad (\text{componente vertical})$$

Essas equações podem ser resolvidas para A e X , com os seguintes resultados:

$$A = \arcsen\left[\frac{R \sin q - C}{L}\right] \quad \text{e} \quad X = R \cos q + L \cos A$$

Como A sempre cairá ou no primeiro ou no quarto quadrantes, o valor principal da função arco seno será correto. As soluções podem ser conferidas pela substituição nas equações de posição.

Equações de velocidade: Derivando as equações de posição anteriores, para a obtenção dos coeficientes de velocidade K_a e K_x , chega-se a

$$\begin{aligned} -R\dot{q}\text{sen}q - L\dot{A}\text{sen}A - \dot{X} &= 0 \\ R\dot{q}\text{cos}q - L\dot{A}\text{cos}A &= 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo as equações acima em forma matricial, tem-se que

$$\begin{bmatrix} -L\text{sen}A & -1 \\ -L\text{cos}A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{X} \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{Bmatrix} R\text{sen}q \\ -R\text{cos}q \end{Bmatrix}$$

A matriz de coeficientes no lado esquerdo da equação matricial anterior é a matriz Jacobiana para o mecanismo biela-manivela. O sistema em questão é um sistema de equações algébricas lineares simultâneas que, quando resolvido, resulta em

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{X} \end{Bmatrix} = \frac{-\dot{q}}{L\text{cos}A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L\text{cos}A & -L\text{sen}A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R\text{sen}q \\ -R\text{cos}q \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{Bmatrix} R\text{cos}q / L\text{cos}A \\ -R\text{sen}q - R\text{cos}q \text{tg}A \end{Bmatrix}$$

A expressão para \dot{X} pode ainda ser simplificada pelo uso da componente vertical das equações de posição, donde se tira que $R\text{sen}q = L\text{sen}A + C$. Isso permite que se escreva

$$\dot{X} = -\dot{q}(C + X\text{tg}A)$$

Do deduzido anteriormente, verifica-se que os coeficientes de velocidade são dados por

$$\begin{aligned} \dot{A} / \dot{q} &= K_a = R\text{cos}q / L\text{cos}A \\ \dot{X} / \dot{q} &= K_x = -(C + X\text{tg}A) \end{aligned}$$

Equações de aceleração: Como mencionado na seção 2.1, há duas abordagens para se obter as equações de aceleração. Ambas são apresentadas a seguir, iniciando pela derivação direta das equações de velocidade com relação ao tempo, o que resulta em

$$\begin{aligned} -R\ddot{q}\text{sen}q - R\dot{q}^2\text{cos}q - L\ddot{A}\text{sen}A - L\dot{A}^2\text{cos}A - \ddot{X} &= 0 \\ R\ddot{q}\text{cos}q - R\dot{q}^2\text{sen}q - L\ddot{A}\text{cos}A + L\dot{A}^2\text{sen}A &= 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo o obtido acima em forma matricial, observa-se que, novamente, a matriz Jacobiana aparece no lado esquerdo, de modo que

$$\begin{bmatrix} -L\text{sen}A & -1 \\ -L\text{cos}A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{X} \end{Bmatrix} = \ddot{q} \begin{Bmatrix} R\text{sen}q \\ -R\text{cos}q \end{Bmatrix} + \dot{q}^2 \begin{Bmatrix} R\text{cos}q \\ R\text{sen}q \end{Bmatrix} + \dot{A}^2 \begin{Bmatrix} L\text{cos}A \\ -L\text{sen}A \end{Bmatrix}$$

Como já se sabe, esse é um sistema de equações algébricas lineares simultâneas, a ser resolvido para a determinação das acelerações \ddot{A} e \ddot{X} .

Na segunda abordagem, parte-se do fato de que \ddot{A} e \ddot{X} tem a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{X} \end{Bmatrix} = \ddot{q} \begin{Bmatrix} K_a \\ K_x \end{Bmatrix} + \dot{q}^2 \begin{Bmatrix} L_a \\ L_x \end{Bmatrix}$$

onde K_a e K_x são os coeficientes de velocidade e L_a e L_x são as derivadas dos coeficientes de velocidade K_a e K_x em relação a q . Através dessa derivação, obtém-se

$$L_a = (-R \operatorname{sen} q / L \cos A) + K_a^2 \operatorname{tg} A$$

$$L_x = - \left[K_x \operatorname{tg} A + \frac{X K_a}{(\cos A)^2} \right]$$

Esse resultado pode ser confirmado pela resolução do sistema de equações resultante da primeira abordagem. Como afirmado anteriormente, as acelerações desejadas são dadas por uma soma que envolve as derivadas dos coeficientes de velocidade e os próprios coeficientes de velocidade, multiplicados por \dot{q}^2 e \ddot{q} , respectivamente.

Valores numéricos: Considere-se um mecanismo biela-manivela, definido pelas seguintes dimensões: $R = 88,90$ mm, $L = 261,62$ mm e $C = 8,89$ mm. As variáveis A e X , com os respectivos coeficientes de velocidade K_a e K_x e as derivadas dos coeficientes de velocidade L_a e L_x , devem ser calculadas para um ângulo de manivela $q = \pi / 3$ radianos.

Fazendo os cálculos indicados nas análises de posição, velocidade e aceleração, feitas acima, chega-se aos seguintes resultados:

$$A = 0,2633 \text{ rad}; X = 297,1 \text{ mm}; K_a = 0,1760 \text{ rad/rad}; K_x = -88,97 \text{ mm/rad};$$

$$L_a = -0,2964 \text{ rad/rad}^2; L_x = -32,08 \text{ mm/rad}^2.$$

Isso significa que, no instante em que o ângulo q é igual a $\pi / 3$ (1,047) radianos, tem-se que

- o ângulo A é igual a 0,2633 radianos e a distância do pivô da manivela ao pivô do pistão é igual a 297,1 mm;
- já o ângulo A está crescendo a uma taxa de 0,1760 radianos por radiano de giro da manivela, enquanto que o pistão está se movendo a uma taxa de 88,97 mm por radiano de giro da manivela, movimento esse que se dá para a esquerda, daí o sinal negativo;
- por fim, a taxa de variação do ângulo A está decrescendo em 0,2964 radianos por radiano, por radiano de giro da manivela, ao passo que a taxa de variação da posição do pistão está decaindo em 32,08 mm por radiano, por radiano de giro da manivela.

Nota-se que L_a e L_x não são zero, o que evidencia a natureza variável de K_a e K_x .

Posição, Velocidade e Aceleração de Pontos de Interesse: Até esse ponto, as análises realizadas estabeleceram valores para as variáveis cinemáticas secundárias e suas derivadas. Contudo, o movimento de pontos particulares nos vários componentes permanece indeterminado.

Todos os pontos na manivela estão num corpo rígido que gira em torno de um ponto fixo, o que já foi tratado na seção 2.1. Já os pontos no pistão diferem em posição apenas por um valor constante, de modo que a velocidade e a aceleração desses pontos também serão \dot{X} e \ddot{X} , respectivamente (translação de corpo rígido). Contudo, os pontos na biela, que realiza movimento plano geral, requerem maior consideração.

Seja o mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 2.8, em que o contorno da biela e um sistema de coordenadas móvel (U,V), solidário à biela, foram incluídos. Um particular ponto de interesse é especificado pelas coordenadas (U_p, V_p). Essas coordenadas não se alteram com o tempo à medida que a biela se move; elas só se alteram quando um ponto diferente é considerado.

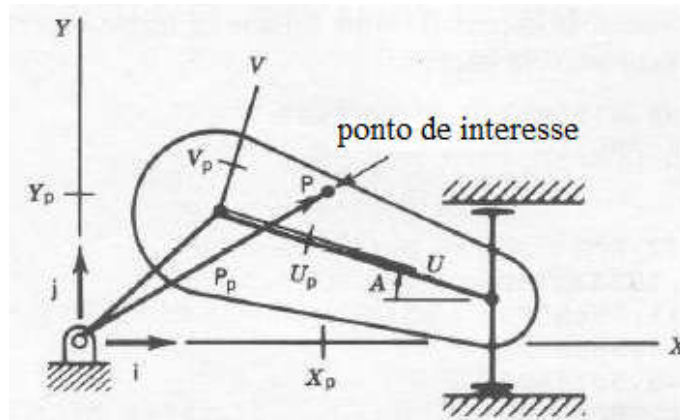


Figura 2.8 – Coordenadas em sistemas móvel e estacionário de coordenadas para um ponto de interesse na biela

O vetor posição do ponto de interesse é \vec{P}_p , onde o subscrito P indica o ponto que esse vetor descreve, de sorte que

$$\vec{P}_p = \vec{i}X_p + \vec{j}Y_p = \vec{i}(R \cos q + U_p \cos A + V_p \sin A) + \vec{j}(R \sin q - U_p \sin A + V_p \cos A)$$

As variáveis X_p e Y_p são as coordenadas do ponto no sistema estacionário. Uma vez que as variáveis cinemáticas secundárias A e X tenham sido calculadas, esse vetor de posição pode ser facilmente determinado para quaisquer coordenadas (U_p, V_p).

O vetor velocidade para o ponto de interesse, no sistema estacionário, é obtido pela derivação do vetor de posição, de modo que

$$\begin{aligned}
\vec{V}_p &= d\vec{P}_p/dt \\
&= \vec{i}(-R\dot{q}\text{sen}q - U_p\dot{A}\text{sen}A + V_p\dot{A}\cos A) + \vec{j}(R\dot{q}\cos q - U_p\dot{A}\cos A - V_p\dot{A}\text{sen}A) \\
&= \vec{i}\dot{q}[-R\text{sen}q - K_a(U_p\text{sen}A - V_p\cos A)] + \vec{j}\dot{q}[R\cos q - K_a(U_p\cos A + V_p\text{sen}A)] \\
&= \vec{i}\dot{q}K_{px} + \vec{j}\dot{q}K_{py} \\
&= \dot{q}(\vec{i}K_{px} + \vec{j}K_{py})
\end{aligned}$$

Os coeficientes de velocidade K_{px} e K_{py} dependem da posição do ponto de interesse através das coordenadas (U_p, V_p) , da variável secundária A e de seu coeficiente de velocidade K_a .

O vetor aceleração do ponto de interesse é determinado pela derivação da última expressão para o vetor velocidade com relação ao tempo. Como K_{px} e K_{py} são funções de K_a , que é, por sua vez, função de q , a regra da cadeia deve ser empregada. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= d\vec{V}/dt = d^2\vec{P}_p/dt^2 \\
&= \ddot{q}(\vec{i}K_{px} + \vec{j}K_{py}) + \dot{q}^2(\vec{i}L_{px} + \vec{j}L_{py}) \\
&= \vec{i}(\ddot{q}K_{px} + \dot{q}^2L_{px}) + \vec{j}(\ddot{q}K_{py} + \dot{q}^2L_{py})
\end{aligned}$$

onde

$$L_{px} = dK_{px}/dq = -R\cos q - L_a(U_p\text{sen}A - V_p\cos A) - K_a^2(U_p\cos A + V_p\text{sen}A)$$

$$L_{py} = dK_{py}/dq = -R\text{sen}q - L_a(U_p\cos A + V_p\text{sen}A) - K_a^2(-U_p\text{sen}A + V_p\cos A)$$

As derivadas dos coeficientes de velocidade são dependentes das coordenadas do ponto de interesse (U_p, V_p) , da variável secundária A , de seu coeficiente de velocidade K_a e da derivada deste em relação a q , L_a .

A notação vetorial foi utilizada nos desenvolvimentos anteriores de modo a enfatizar as relações entre os vetores posição, velocidade e aceleração de um lado e as grandezas escalares variáveis de posição, coeficientes de velocidade e derivadas de coeficientes de velocidade de outro.

No projeto de mecanismos biela-manivela, pode ser de interesse estudar o caminho percorrido (rota) por vários pontos na biela, bem como as velocidades e acelerações correspondentes, à medida que a manivela realiza uma rotação completa. Para cada posição da manivela, as variáveis cinemáticas secundárias, os coeficientes de velocidade e as derivadas dos coeficientes de velocidade devem, primeiro, ser calculadas. Depois, as posições, as velocidades e as acelerações de quaisquer pontos de interesse na biela podem ser computadas, para cada ponto, pela

implementação dos desenvolvimentos apresentados acima. Esse processo poderá ser, então, repetido para uma sequência de posições da manivela, espaçadas num giro completo.

2.3. CINEMÁTICA DO MECANISMO DE QUATRO BARRAS

O mecanismo de quatro barras é um dos mecanismos mais comuns e mais versáteis. É encontrado numa ampla gama de máquinas, incluindo unidades de bombeamento de petróleo, barbeadores elétricos e máquinas de corte de chapas. A variedade de movimentos que podem ser gerados por esse mecanismo inclui linhas aproximadamente retas, curvas fechadas e até mesmo círculos. Essa flexibilidade tem atraído o interesse de projetistas ao longo dos anos até o presente.

O mecanismo de quatro barras típico consiste, como o próprio nome já antecipa, de quatro barras de comprimento constante, tal como ilustrado na figura 2.9. Uma das quatro barras mostradas permanece imóvel e mantém a separação entre os dois pivôs, nos quais o restante do mecanismo se suporta. As duas barras conectadas à barra estacionária são referidas como manivelas, posto que seu movimento é puramente circular, em torno dos pivôs. A última barra é conhecida com acoplador.

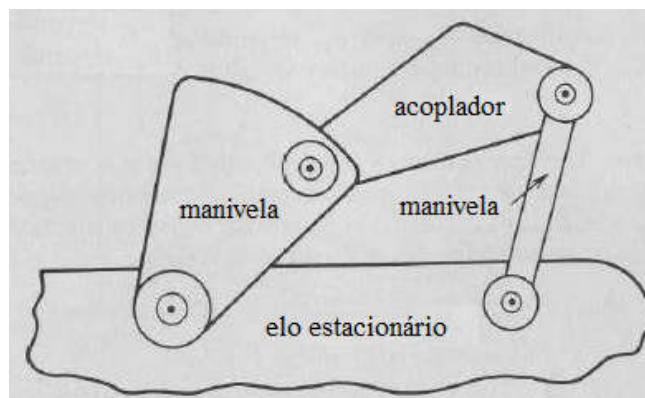


Figura 2.9 – Mecanismo de quatro barras típico

Para a maioria dos propósitos, o mecanismo de quatro barras é usado de uma das seguintes formas: (1) o mecanismo transfere potência da manivela de acionamento (ou simplesmente manivela) para a outra manivela (que recebe, então, a designação de contra-manivela), realizando um movimento particular; (2) um ponto no acoplador é conduzido a um movimento desejado pela manivela de acionamento.

O mecanismo de quatro barras é um mecanismo com um grau de liberdade, o que pode ser visualizado por um processo semelhante ao utilizado para o mecanismo biela-manivela. Será conveniente associar o grau de liberdade com a coordenada angular que descrever a rotação da manivela de acionamento.

No que se segue, serão obtidas as equações de posição, velocidade e aceleração para variáveis cinemáticas secundárias de interesse, em termos do movimento da manivela. Soluções

analíticas são novamente possíveis. Contudo, nesse caso, elas são extremamente difíceis de se manipular. Assim, essa oportunidade será usada para se empregar uma técnica numérica geral para a solução das equações de posição, conhecida como o método de Newton-Raphson.

Equações de posição: Os comprimentos das quatro barras, C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , são dados, como indicado na figura 2.10. A configuração espacial do mecanismo é, então, completamente determinada quando a coordenada angular q , relativa à manivela, é especificada. As variáveis cinemáticas secundárias de interesse são as coordenadas angulares A_2 e A_3 , associadas com o acoplador e a contra-manivela, respectivamente.

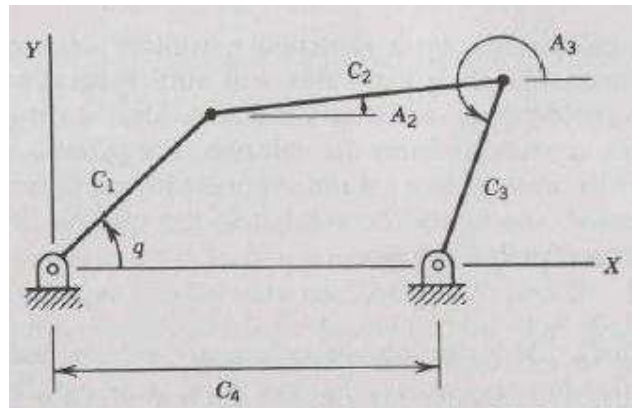


Figura 2.10 – Representação cinemática de um mecanismo de quatro barras típico

As variáveis A_2 e A_3 são determinadas a partir das seguintes equações de posição:

$$f_h(q, A_2, A_3) = C_1 \cos q + C_2 \cos A_2 + C_3 \cos A_3 - C_4 = 0$$

$$f_v(q, A_2, A_3) = C_1 \sin q + C_2 \sin A_2 + C_3 \sin A_3 = 0$$

Como mencionado acima, essas equações podem ser resolvidas através do método de Newton-Raphson. Para tal, destaca-se que o vetor de incógnitas, denotado por $\{A\}$, é igual a

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

ao passo que o vetor de valores das equações de posição, ou vetor de resíduos, $\{F\}$ será dado por

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_h(q, A_2, A_3) \\ f_v(q, A_2, A_3) \end{Bmatrix}$$

A matriz Jacobiana $[J]$ para o sistema em questão é determinada pela derivação parcial das funções f_h e f_v com relação a A_2 e A_3 , com o seguinte resultado:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_h}{\partial A_2} & \frac{\partial f_h}{\partial A_3} \\ \frac{\partial f_v}{\partial A_2} & \frac{\partial f_v}{\partial A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_2 \text{sen} A_2 & -C_3 \text{sen} A_3 \\ C_2 \cos A_2 & C_3 \cos A_3 \end{bmatrix}$$

Usando o vetor de resíduos $\{F\}$ e a matriz Jacobiana $[J]$ como definidos acima, a solução das equações de posição pode ser computada iterativamente, para qualquer grau de precisão desejado, o que será ilustrado por um exemplo, após as análises de velocidade e aceleração.

Um dos requisitos para o uso do método de Newton-Raphson é que estimativas iniciais para as incógnitas sejam fornecidas. Essas estimativas podem ser obtidas por um cálculo aproximado (ainda que grosseiro) ou por construção gráfica. Quaisquer estimativas razoavelmente próximas serão suficientes, posto que o método converge para uma ampla faixa de estimativas iniciais.

Por outro lado, se as estimativas estiverem distantes demais da solução, o processo não será convergente, ou convergirá para uma solução indesejada. Em qualquer caso, quanto melhor forem as estimativas, mais rápido o processo irá convergir para uma solução aceitável.

Equações de velocidade: As equações de velocidade são obtidas pela derivação temporal das equações de posição, resultando, em forma matricial, no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -C_2 \text{sen} A_2 & -C_3 \text{sen} A_3 \\ C_2 \cos A_2 & C_3 \cos A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{Bmatrix} C_1 \text{sen} q \\ -C_1 \cos q \end{Bmatrix}$$

Observa-se que a matriz de coeficientes no lado esquerdo é, como esperado, a matriz Jacobiana. Para valores dados de q e \dot{q} , esse sistema é facilmente resolvido pela via numérica.

Alternativamente, os coeficientes de velocidade K_2 e K_3 podem ser determinados dividindo os dois lados da equação matricial por \dot{q} , de sorte que

$$\begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{A}_2 / \dot{q} \\ \dot{A}_3 / \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_2 \text{sen} A_2 & -C_3 \text{sen} A_3 \\ C_2 \cos A_2 & C_3 \cos A_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} C_1 \text{sen} q \\ -C_1 \cos q \end{Bmatrix}$$

Essa última solução será a implementada no exemplo a ser discutido adiante.

Equações de aceleração: A derivação temporal das equações de velocidade conduz às equações de aceleração. Em forma matricial, e após alguns rearranjos, chega-se ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -C_2 \text{sen} A_2 & -C_3 \text{sen} A_3 \\ C_2 \cos A_2 & C_3 \cos A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_2 \\ \ddot{A}_3 \end{Bmatrix} = \ddot{q} \begin{Bmatrix} C_1 \text{sen} q \\ -C_1 \cos q \end{Bmatrix} + \dot{q}^2 \begin{Bmatrix} C_1 \cos q \\ C_1 \text{sen} q \end{Bmatrix} + \dot{A}_2^2 \begin{Bmatrix} C_2 \cos A_2 \\ C_2 \text{sen} A_2 \end{Bmatrix} + \dot{A}_3^2 \begin{Bmatrix} C_3 \cos A_3 \\ C_3 \text{sen} A_3 \end{Bmatrix}$$

Observa-se que, novamente, a matriz de coeficientes à esquerda é a matriz Jacobiana. O lado direito envolve os quadrados das velocidades secundárias bem como \ddot{q} e \dot{q}^2 . Os quadrados das velocidades secundárias podem ser expressos em termos de \dot{q}^2 , através do uso dos coeficientes de velocidade determinados anteriormente. Com essas substituições, tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_2 \\ \ddot{A}_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C_2 \text{sen} A_2 & -C_3 \text{sen} A_3 \\ C_2 \text{cos} A_2 & C_3 \text{cos} A_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\ddot{q} \begin{Bmatrix} C_1 \text{sen} q \\ -C_1 \text{cos} q \end{Bmatrix} + \dot{q}^2 \begin{Bmatrix} C_1 \text{cos} q + K_2^2 C_2 \text{cos} A_2 + K_3^2 C_3 \text{cos} A_3 \\ C_1 \text{sen} q + K_2^2 C_2 \text{sen} A_2 + K_3^2 C_3 \text{sen} A_3 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \ddot{q} \begin{Bmatrix} K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} + \dot{q}^2 \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Na expressão acima, deve ser verificado que a inversa da matriz Jacobiana, multiplicada pelos coeficientes de \ddot{q} , realmente resulta nos coeficientes de velocidade K_2 e K_3 . Já a inversa da matriz Jacobiana, multiplicada pelos coeficientes de \dot{q}^2 , resulta nas derivadas dos coeficientes de velocidade, L_2 e L_3 . Esse último passo pode ser verificado assim: (1) completa-se a solução para os coeficientes de velocidade K_2 e K_3 ; (2) deriva-se as expressões de K_2 e K_3 com relação a q , para se obter L_2 e L_3 ; (3) completa-se a solução para o coeficiente de \dot{q}^2 acima. Quando L_2 e L_3 são comparados aos coeficientes de \dot{q}^2 , verifica-se que eles são iguais.

Valores numéricos: Seja um mecanismo de quatro barras com as seguintes dimensões: $C_1 = 127\text{mm}$, $C_2 = 228,6\text{mm}$, $C_3 = 177,8\text{mm}$ e $C_4 = 254\text{mm}$. Devem ser calculadas as coordenadas secundárias A_2 e A_3 , os coeficientes de velocidade K_2 e K_3 e as derivadas dos coeficientes de velocidade L_2 e L_3 , quando o ângulo da manivela for igual a $q = \pi / 3$ radianos.

Como exposto anteriormente, o vetor de resíduos é montado a partir das expressões das funções f_h e f_v , enquanto que a matriz Jacobiana é montada a partir das derivadas parciais dessas mesmas funções em relação a A_2 e A_3 . Para $q = \pi / 3$ radianos, verifica-se, por um rápido desenho, que o acoplador se encontra aproximadamente na horizontal, ao passo que a contra-manivela está próxima da vertical. Assim, as estimativas iniciais para A_2 e A_3 são 0,0 e 4,0, respectivamente.

É empregada uma tolerância igual a 0,00005.

Dessa forma, quando o programa associado é executado, são obtidos os seguintes resultados:

$$A_2 = 0,291 \text{ rad}; A_3 = 4,55 \text{ rad}; K_2 = -0,219; K_3 = 0,545; L_2 = 0,344; L_3 = 0,502$$

Pelos resultados acima, verifica-se que as estimativas iniciais foram razoavelmente boas. O coeficiente de velocidade K_2 é negativo, indicando que A_2 decresce à medida que q cresce, o que

é evidente pela intuição. Já o coeficiente K_3 é positivo, indicando que manivela e contra-manivela estão girando no mesmo sentido.

Posição, Velocidade e Aceleração de Pontos de Interesse no Acoplador: A grande variedade de movimentos possíveis com o mecanismo de quatro barras tem sido uma das razões pelo interesse nele. Sabe-se que os pontos na barra estacionária não se movem e aqueles nas manivelas descrevem movimentos puramente circulares. Assim, essa variedade está associada com pontos no acoplador.

A análise a ser desenvolvida aqui fornecerá a posição, a velocidade e a aceleração para qualquer ponto no acoplador, uma vez que as variáveis cinemáticas secundárias tenham sido calculadas, como exposto anteriormente. O desenvolvimento que se segue será similar ao da seção 2.2, para a biela do mecanismo biela-manivela.

Um mecanismo de quatro barras típico, com o contorno do acoplador em destaque, é mostrado na figura 2.11. Um sistema de coordenadas móvel, solidário ao acoplador e denotado por (U,V) , também é mostrado nessa figura. Um ponto P qualquer no acoplador é facilmente localizado pelas coordenadas (U_P, V_P) . À medida que o movimento se desenrola, as coordenadas X_P e Y_P , no sistema estacionário, se alteram, mas as coordenadas U_P e V_P não.

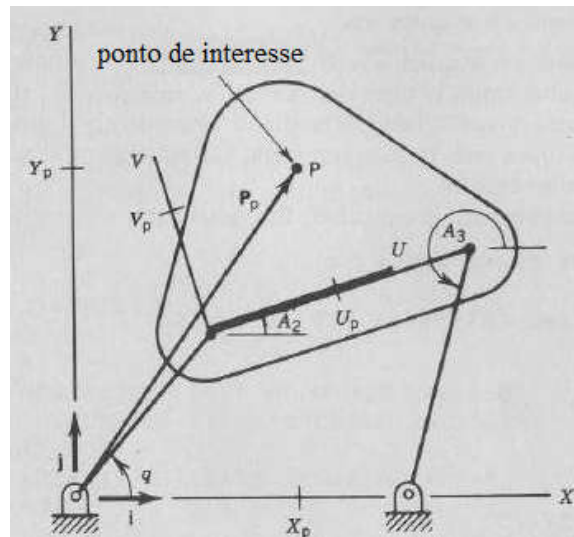


Figura 2.11 – Coordenadas em sistemas móvel e estacionário de coordenadas para um ponto de interesse no acoplador

O vetor posição para o ponto de interesse no acoplador é denotado por \vec{P}_P , onde o subscrito P indica, como antes, o ponto que esse vetor descreve, de sorte que

$$\vec{P}_P = \vec{i}X_P + \vec{j}Y_P = \vec{i}(C_1 \cos q + U_P \cos A_2 - V_P \sin A_2) + \vec{j}(C_1 \sin q + U_P \sin A_2 + V_P \cos A_2)$$

Especificado um valor para o ângulo da manivela q , e obtida a solução para as variáveis cinemáticas secundárias, esse vetor de posição pode ser facilmente determinado.

O vetor velocidade é obtido pela derivação do vetor posição com relação ao tempo. Essa derivação envolve a derivada temporal \dot{A}_2 , que pode ser expressa como $\dot{q}K_2$, de forma que

$$\begin{aligned}\vec{V}_p &= d\vec{P}_p/dt \\ &= \vec{i}(-\dot{q}C_1\text{sen}q - \dot{A}_2U_p\text{sen}A_2 - \dot{A}_2V_p \cos A_2) + \vec{j}(\dot{q}C_1 \cos q + \dot{A}_2U_p \cos A_2 - \dot{A}_2V_p\text{sen}A_2) \\ &= \vec{i}\dot{q}[-C_1\text{sen}q - K_2(U_p\text{sen}A_2 + V_p \cos A_2)] + \vec{j}\dot{q}[C_1 \cos q + K_2(U_p \cos A_2 - V_p\text{sen}A_2)] \\ &= \vec{i}\dot{q}K_{px} + \vec{j}\dot{q}K_{py} \\ &= \dot{q}(\vec{i}K_{px} + \vec{j}K_{py})\end{aligned}$$

Os coeficientes de velocidade K_{px} e K_{py} são os coeficientes de velocidade do ponto P nas direções horizontal e vertical. Nota-se que eles dependem das grandezas cinemáticas secundárias A_2 e K_2 e também da posição do ponto de interesse, através das coordenadas (U_p, V_p) .

Para se obter o vetor aceleração, uma nova derivação temporal é requerida. Da expressão para a velocidade apresentada anteriormente, tem-se que a aceleração é dada por

$$\begin{aligned}\vec{A}_p &= d\vec{V}_p/dt = d^2\vec{P}_p/dt^2 \\ &= \ddot{q}(\vec{i}K_{px} + \vec{j}K_{py}) + \dot{q}^2(\vec{i}L_{px} + \vec{j}L_{py}) \\ &= \vec{i}(\ddot{q}K_{px} + \dot{q}^2L_{px}) + \vec{j}(\ddot{q}K_{py} + \dot{q}^2L_{py})\end{aligned}$$

onde as derivadas dos coeficientes de velocidade L_{px} e L_{py} são iguais a

$$L_{px} = dK_{px}/dq = -C_1 \cos q - L_2(U_p\text{sen}A_2 + V_p \cos A_2) - K_2^2(U_p \cos A_2 - V_p\text{sen}A_2)$$

$$L_{py} = dK_{py}/dq = -C_1\text{sen}q + L_2(U_p \cos A_2 - V_p\text{sen}A_2) - K_2^2(U_p\text{sen}A_2 + V_p \cos A_2)$$

As grandezas L_{px} e L_{py} são as derivadas dos coeficientes de velocidade do ponto P nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Como na seção 2.2, a notação vetorial foi utilizada acima de modo a enfatizar as relações entre os vetores posição, velocidade e aceleração de um lado e as grandezas escalares variáveis de posição, coeficientes de velocidade e derivadas de coeficientes de velocidade de outro.

No projeto de mecanismos de quatro barras, pode ser importante estudar o caminho percorrido (rota) por um dado ponto no acoplador, bem como sua velocidade e sua aceleração, à medida que a manivela realiza uma rotação completa. A análise feita acima fornece um meio de se levar a cabo esse estudo.

2.4. CONCLUSÃO

A abordagem básica para a análise cinemática de mecanismos com um grau de liberdade foi exposta nesse capítulo. O processo começa com a seleção de uma coordenada (variável) primária, associada, então, com o grau de liberdade. A posição do mecanismo é descrita por equações de posição, que correspondem aos componentes escalares do laço de posição e são escritas em função da coordenada primária e das coordenadas (variáveis) secundárias necessárias ao caso em tela.

Essas equações podem ser resolvidas para fornecer valores para as variáveis secundárias, após um valor ser atribuído à variável primária. As velocidades e acelerações relativas às variáveis secundárias são determinadas a partir da derivação das equações de posição.

A velocidade de qualquer variável secundária é diretamente proporcional à velocidade da variável primária. Isso torna possível o uso de coeficientes de velocidade, dependentes da posição do mecanismo, para expressar as velocidades secundárias em termos da velocidade primária.

A aceleração de qualquer variável secundária pode ser expressa como a soma de dois termos: o primeiro, o produto do coeficiente de velocidade correspondente pela aceleração da variável primária, e o segundo, o produto da derivada do coeficiente de velocidade correspondente pelo quadrado da velocidade primária. A derivada do coeficiente de velocidade em questão é a derivada do coeficiente de velocidade em relação à variável primária.

Para qualquer ponto num corpo em movimento, coordenadas num sistema estacionário são imediatamente expressas em termos da variável primária, das variáveis secundárias e das coordenadas do ponto num sistema móvel de coordenadas, solidário com o corpo analisado. Quando essas relações são derivadas em relação ao tempo, os componentes da velocidade e da aceleração do ponto de interesse no sistema estacionário são obtidos. A esses componentes, no caso de movimento no plano, estão associados dois coeficientes de velocidade e duas derivadas de coeficiente de velocidade, um em cada direção.

A escrita das equações de posição é um processo único para cada mecanismo. Isso feito, as soluções para essas equações, para as equações envolvendo os coeficientes de velocidade e para as equações envolvendo as derivadas de coeficientes de velocidade podem ou não ser expressões analíticas. Soluções numéricas, contudo, estão geralmente disponíveis.

Se as ideias resumidas aqui tiverem sido bem compreendidas, haverá pouca dificuldade em se abordar a análise cinemática de qualquer mecanismo com um grau de liberdade. Essas ideias são fundamentais nas análises estática e dinâmica desses mecanismos, como se verá mais adiante.

FONTE

– Mechanics of Machines, S. Doughty, Wiley, 1988.