1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No presente texto, abordam-se as análises cinemática, estática e dinâmica de sistemas mecânicos comumente encontrados em máquinas, conhecidos como mecanismos.

Um mecanismo é definido como sendo uma cadeia cinemática em que pelo menos um dos corpos é ligado a um sistema de referência dado. Já uma cadeia cinemática, por sua vez, é uma montagem de corpos rígidos, interconectados por juntas (pares cinemáticos), de forma a realizar um determinado movimento de saída, em resposta a um movimento fornecido como entrada. Ou seja, um mecanismo tem por função transmitir e transformar movimentos. Nesse contexto, uma máquina pode ser definida como um agrupamento de mecanismos, arranjados de forma a transmitir forças e executar trabalhos.

Na análise cinemática, estudam-se os movimentos possíveis de um mecanismo, sem se considerar os esforços (forças e torques) associados a ele. Já na análise estática, consideram-se as ações e os efeitos dos esforços invariantes com o tempo. Por fim, na análise dinâmica, busca-se determinar, pela aplicação das leis e princípios associados, quais os movimentos que realmente irão ocorrer no caso de interesse, face à presença de forças e torques variáveis com o tempo.

Os métodos a serem expostos para as análises de mecanismos irão requerer, via de regra, computação digital. Ou seja, são métodos orientados para a busca de soluções numéricas. Esses métodos serão empregados no trato de várias classes de equações, equações que, por sua vez, decorrerão da mecânica subjacente às situações de interesse.

Quatro conceitos principais permearão todos os tópicos aqui discutidos. Na Cinemática, encontra-se o primeiro deles: o uso das equações de laço de vetores de posição (*position vector loop equations*). Os mecanismos, em geral, descrevem laços que mudam de forma à medida que seus componentes se movem, mas que permanecem sendo laços. Cada laço pode ser descrito por uma soma de vetores de posição, que é sempre zero em todos os instantes de tempo. Se a configuração do mecanismo for determinada de forma única e consistente, essas equações vetoriais, ou seus equivalentes escalares, podem ser resolvidas para as demais variáveis de posição de interesse.

Ainda na Cinemática, está o segundo conceito: o uso de coeficientes de velocidade (*velocity coeficients*) e derivadas de coeficientes de velocidade (*velocity coefficient derivatives*). Sabe-se que, para duas polias conectadas sem deslizamento por uma correia esticada, a razão entre a rotação da polia condutora e da polia conduzida é fixa, o que é uma consequência da geometria invariante do sistema. O valor dessa razão entre rotações é dado pela particular geometria do sistema, no caso, os raios das polias. Em sistemas em que a geometria varia à medida que o sistema se move, tal como em mecanismos biela-manivela, a razão entre as velocidades de entrada e saída é variável, dependendo da posição instantânea do sistema. Dessa forma, as velocidades de todos os pontos podem ser expressas através de funções dependentes da posição, conhecidas como coeficientes de velocidade, multiplicadas por uma velocidade de referência comum.

A situação relativa às acelerações é algo mais complexa. Ainda assim, vê-se que, para vários sistemas, a aceleração é a soma de dois termos, um envolvendo a aceleração do ponto de referência e o coeficiente de velocidade (dependente da posição) e outro envolvendo a derivada do coeficiente de velocidade e o quadrado de velocidade de referência. Portanto, todas as velocidades e acelerações serão, de forma bastante clara, relacionadas à velocidade e à aceleração de um ponto de referência através do uso de coeficientes de velocidade (dependentes da posição) e de derivadas de coeficientes de velocidade.

O terceiro conceito, geralmente associado com a Estática, é conhecido como princípio dos trabalhos virtuais. Trata-se de um dos princípios de energia mais antigos da mecânica e descreve as condições para o equilíbrio estático de maneira completamente equivalente às formulações mais familiares de somas de forças e momentos iguais a zero num dado corpo. Sua aplicação é particularmente adequada em problemas em que as posições do componentes carregados não são especificadas de saída, mas têm que ser determinadas como parte da solução. Ou seja, a situação típica de componentes de máquinas.

Como se verá, a aplicação desse princípio depende de forma marcante da cinemática do sistema considerado e das idéias de dependência e independência. Essas necessidades serão bem supridas através do uso de coeficientes de velocidade.

A comportamento dinâmico de um sistema mecânico pode descrito a partir da aplicação da segunda lei de Newton ou a partir de equações de movimento obtidas a partir de considerações de energia relativas ao sistema em questão. O uso dessas equações da Dinâmica, conhecidas como equações de Lagrange, constitui o quarto conceito principal. Essas equações se aplicam igualmente bem tanto a sistemas conservativos quanto a não conservativos, com qualquer número de coordenadas independentes.

No uso das equações de Lagrange, as expressões das energias cinética e potencial, bem como aquelas do trabalho virtual das forças externas, são essenciais. A expressão da energia cinética é extremamente simplificada através do uso de coeficientes de velocidade. Os coeficientes de velocidade e a energia potencial são, por sua vez, dependentes da posição do sistema, que é determinada a partir das equações de posição.

1.2. Solução Numérica de Problemas

Embora os conceitos mencionados no item anterior possam ser, em algumas situações, aplicados de forma conjunta em cálculos manuais, é na implementação computacional que reside o seu maior benefício. O uso das equações de laço de vetores de posição frequentemente conduz a sistemas de equações não lineares transcendentais intrincadas. Nesses casos, soluções analíticas são virtualmente impossíveis de serem obtidas. Soluções numéricas, por outro lado, estão, via de regra, à disposição, em especial aquelas associadas ao método de Newton-Raphson.

O cálculo dos coeficientes de velocidade envolve a solução simultânea de um sistema de equações lineares. Embora conceitualmente isso seja simples e direto, torna-se por demais trabalhoso para sistemas com mais de duas equações.

Na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, é frequentemente necessário resolver um sistema de equações não lineares. Novamente aqui, a solução numérica por uma determinada técnica iterativa é o único meio fácil de se encontrar uma solução.

É também importante observar que as equações de movimento para a maioria dos mecanismos, obtidas pelo uso das equações de Lagrange, são equações diferenciais acopladas fortemente não lineares, com coeficientes variáveis, o que independe da forma pela qual elas são obtidas. Consequentemente, solucioná-las por métodos analíticos não é, via de regra, possível. A integração numérica é, então, requerida e isso só é prático quando realizado via computacionalmente, em particular com o auxílio do método de Runge-Kutta.

Contudo, não se deve, do exposto nos parágrafos acima, alimentar a idéia de que o computador fará todo o trabalho. Na solução típica de problemas de Dinâmica de Máquinas, os seguintes passos devem ser considerados:

1) definição do problema: essa é a tarefa de se determinar qual é realmente o problema a ser resolvido e que informação é necessária para se começar a solucioná-lo;

2) solução conceitual: com base na informação reunida no passo anterior, um plano global e flexível de enfrentamento deve ser estabelecido, contemplando, se for o caso de solução computacional, um fluxograma básico;

3) análise detalhada: a solução conceitual parte do pressuposto de que as equações cinemáticas associadas possam ser escritas e é nesse ponto que elas são realmente escritas e preparadas para o passo seguinte, da implementação computacional;

4) implementação computacional: nesse estágio, os programas computacionais serão escritos e executados, com todos os cuidados pertinentes;

5) interpretação dos resultados: em Engenharia, como em tantas outras áreas, é compulsório se extrair conclusões dos resultados obtidos, de modo a responder, de forma aceitável e consistente, à questão posta pelo problema enfrentado.

Nota-se, do relacionado acima, que o computador só realmente é utilizado no passo 4. A disponibilidade de computador é assumida nos passos 2 e 3 e essa disponibilidade afeta o planejamento (passo 2) e a forma final buscada na análise (passo 3).

1.3. Graus de Liberdade

Um sistema mecânico geral pode ser entendido como um conjunto interdependente de partículas, corpos materiais, rígidos e/ou elásticos, e elementos fluidos, unidos entre si através de engastes, rótulas, elementos elásticos e outros. Este sistema pode ainda estar ligado ao exterior por uma ou várias das maneiras citadas anteriormente.

As ligações, internas ou externas, já descritas, recebem o nome genérico de vínculos. Os vínculos de um sistema mecânico estão intimamente relacionados com os conceitos de graus de liberdade e coordenadas generalizadas. Para expor esses conceitos, alguns exemplos são dados.

A figura 1.1 mostra um sistema mecânico constituído por um disco que pode girar sobre seu eixo. Esse eixo é fixo a uma haste articulada no ponto 0, haste essa que pode distender-se longitudinalmente, mas que é rígida em relação à flexão.

A configuração do sistema no espaço, num instante qualquer, poderá ser descrita por três coordenadas independentes: θ, r e ϕ. Essa configuração também poderá ser descrita pelas coordenadas x_C, y_C e ϕ, onde x_C e y_C são coordenadas cartesianas ortogonais do centro do disco.

Vê-se, portanto, que não existe apenas um conjunto de coordenadas independentes capaz de descrever a configuração espacial do sistema em qualquer instante. De fato, outros conjuntos de três coordenadas independentes poderiam ser escolhidos, que determinariam tão bem a configuração do sistema como os dois anteriores.

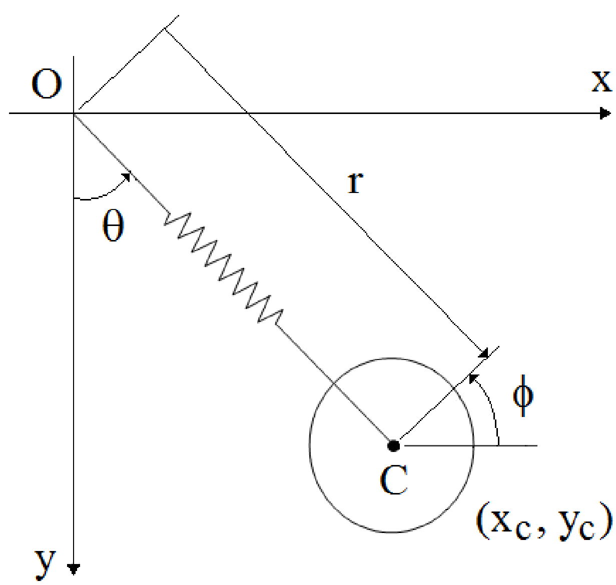

Figura 1.1 – Graus de liberdade de um sistema mecânico

Surge, então, a pergunta: por que três coordenadas? Uma simples observação visual mostra que uma ou duas coordenadas não são suficientes para descrever todos os deslocamentos que constituem a configuração espacial do sistema num dado instante.

Entretanto, pode-se perfeitamente descrever a configuração do sistema com mais de três coordenadas como, por exemplo, o conjunto de θ, ϕ, x_C e y_C. Nota-se, contudo, que se menos de três coordenadas são insuficientes, mais de três são superabundantes. Com efeito, as quatro coordenadas do conjunto acima não são independentes. De fato, tem-se a seguinte relação:

$$x_C = y_C \operatorname{tg}\theta \tag{1.1}$$

Assim, escolhendo-se, por exemplo, θ, y_C e ϕ para descrever a configuração do sistema, a coordenada x_C será automaticamente determinada pela relação anterior.

Generalizando o que se expôs anteriormente, pode-se dizer que, para todo sistema mecânico, existe um número de coordenadas independentes capazes de descrever a sua configuração espacial. Se for tomado um conjunto de coordenadas de número menor do que este, a descrição não é possível. Se for tomado um conjunto de coordenadas de número maior do que este, haverá uma ou mais relações de dependência entre essas coordenadas.

Em outras palavras, se for igual a n o número de coordenadas independentes, capazes de descrever a configuração espacial do sistema em cada instante, e se forem escolhidas p coordenadas, com $p > n$, tem-se então $(p - n)$ relações entre as p coordenadas, de sorte que:

$$\begin{aligned} & f_1\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p\right) = b_1 \\ & \vdots \\ & f_{p-n}\left(\alpha_{1,} \alpha_2, \ldots \alpha_p\right) = b_{p-n} \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde α_i, $i = 1, p$ são as coordenadas escolhidas.

Dessas relações, existentes para os sistemas mecânicos de interesse (ditos sistemas holonômicos), podem-se eliminar $(p - n)$ coordenadas, que serão escritas em função das n restantes, estas independentes entre si. A escolha dessas n coordenadas independentes é arbitrária e, em geral, ditada pela conveniência.

Relações tais como as apresentadas anteriormente são chamadas <u>equações de vínculos</u> e correspondem, efetivamente, a vínculos físicos internos ou externos do sistema.

O <u>número n de coordenadas independentes capazes de descrever por completo a configuração espacial do sistema</u> recebe o nome (apropriado) de <u>número de graus de liberdade</u>.

Qualquer conjunto de n <u>coordenadas independentes, capazes de descrever por completo a configuração do sistema</u>, recebe o nome de conjunto de <u>coordenadas generalizadas</u>. Um sistema com n graus de liberdade pode, pois, ser descrito por n coordenadas generalizadas. O sistema mecânico da figura 1.1 possui, assim, três graus de liberdade e conjuntos como (x_C, y_C, ϕ), $(r, \phi\ , \theta)$ e (θ, y_C, ϕ) são conjuntos de coordenadas generalizadas. Como se observa, coordenadas generalizadas podem contemplar coordenadas cartesianas retangulares, ângulos e quaisquer outras variáveis que contribuam para a descrição da configuração do sistema, contanto que formem um conjunto completo e independente.

Foi dito antes que as equações de vínculo correspondem, de fato, a vínculos físicos. Suponha-se que, no sistema da figura 1.1, a haste tenha se tornado toda ela rígida. Ou seja, fez-se

$$r = L = \text{constante} \tag{1.3}$$

Neste caso, duas únicas coordenadas serão suficientes, por exemplo, θ e ϕ. A equação de vínculo (1.3) representa a eliminação de um grau de liberdade.

Se, adicionalmente, o disco for impedido de girar sobre seu eixo, um outro grau de liberdade será suprimido, correspondendo a uma outra equação de vínculo, qual seja

$$\phi = \theta \tag{1.4}$$

O sistema, então, terá um único grau de liberdade e será, de fato, em um pêndulo. Uma única coordenada será suficiente para descrever os deslocamentos do sistema, por exemplo, θ.

Um exemplo frequentemente citado é o de uma <u>partícula no espaço</u>. Esta partícula tem três graus de liberdade, que podem ser descritos por três coordenadas cartesianas ortogonais. Um sistema de N partículas terá, pois, $3N$ graus de liberdade. Se algumas dessas partículas forem obrigadas a se mover ao longo de certas linhas ou sobre certas superfícies, determinados graus de liberdade serão suprimidos e cada grau suprimido será apresentado por uma equação de vínculo. Assim sendo, caso c equações de vínculo forem introduzidas, o número de graus de liberdade restante será $n = 3N - c$.

Um <u>corpo rígido</u>, <u>livre no espaço</u>, tem seis graus de liberdade: três deslocamentos e três rotações em torno de três eixos coordenados. Ou seja, são necessárias seis coordenadas generalizadas para descrição completa do seu movimento.

Na <u>cinemática de mecanismos</u>, há, via de regra, <u>mais variáveis cinemáticas do que graus de liberdade</u>. Após se escolher as <u>coordenadas generalizadas</u> a serem associadas com os graus de liberdade e considerá-las como <u>variáveis primárias</u>, as <u>variáveis cinemáticas restantes</u> serão nomeadas <u>variáveis secundárias</u>.

Para problemas puramente cinemáticos, as variáveis primárias serão valores de entrada, enquanto que as secundárias estarão entre as incógnitas do problema. As equações de laço de vetores de posição permitem que se determinem as variáveis secundárias, com base nos valores das variáveis primárias. Em um problema dinâmico, as equações de movimento descrevem como as coordenadas generalizadas (variáveis primárias) variam com o tempo e, de novo, as equações de posição determinam as coordenadas secundárias.

1.4. Conclusão

O exposto acima já antecipa, portanto, o que virá a seguir. Os tópicos a serem apresentados nos capítulos posteriores estarão num grau moderado de sofisticação matemática, com clara orientação para a implementação computacional do que for formulado. As implementações e simulações computacionais serão baseadas no ambiente de programação Matlab®.

Os quatro conceitos principais serão introduzidos gradativamente, até o ponto em que todos serão empregados em conjunto. Como será observado, o conceito de graus de liberdade será central em todas as abordagens.

Fontes

– Mechanics of Machines, S. Doughty, Wiley, 1988;

– Fundamentos de Vibrações, J. J. de Espíndola, UFSC, 2004.