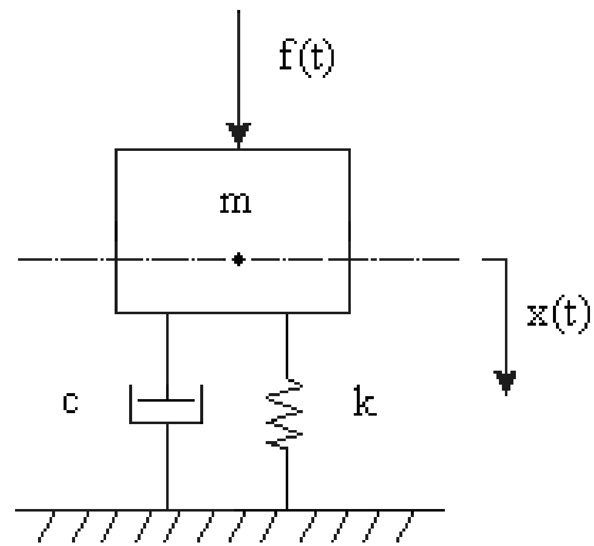
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

A equação de movimento de um sistema linear com um grau de liberdade e amortecimento viscoso é

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (1).$$



Dividindo todos os termos por m, obtém-se

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \qquad (2).$$

Para fins de resolução numérica, essa equação, de segunda ordem, deve ser convertida num sistema com duas equações de primeira ordem.

Assim, ela poderá ser resolvida, por exemplo, com o auxílio do MATLAB, que possui rotinas específicas para tal, baseadas nos métodos de Runge-Kutta.

CONVERSÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para conversão da equação de movimento, visando sua resolução pela via numérica, são definidas duas novas variáveis, quais sejam

$$u_1(t) = x(t) \quad (3) \quad \text{e} \quad u_2(t) = \dot{x}(t) \quad (4).$$

Decorre, de imediato, que

$$\dot{u}_1(t) = \dot{x}(t) = u_2(t) \quad (5) \quad \text{e} \quad \dot{u}_2(t) = \ddot{x}(t) \quad (6).$$

Levando as equações (3) a (6) em (2), tem-se

$$\dot{u}_2(t) + \frac{c}{m} u_2(t) + \frac{k}{m} u_1(t) = \frac{1}{m} f(t) \ ,$$

que, rearranjada, torna-se

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m} u_2(t) - \frac{k}{m} u_1(t) + \frac{1}{m} f(t) \quad (7).$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações (5) e (7), a saber

$$\dot{u}_1(t) = u_2(t) \qquad e$$

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m} u_2(t) - \frac{k}{m} u_1(t) + \frac{1}{m} f(t) \ ,$$

constituem um **sistema linear de duas equações** de primeira ordem, **acopladas**, que é **equivalente à equação de movimento original**, de segunda ordem.

Por essa representação, as **condições iniciais** associadas à equação de movimento original, quais sejam, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, passam a ser dadas, respectivamente, por $u_1(0)$ e $u_2(0)$.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

O sistema de equações de movimento pode ser escrito em forma matricial, como uma única equação, qual seja,

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)} \qquad (8) \, ,$$

onde

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}} \; (9) \; ; \; \boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}} \; (10) \; ; \; \boxed{\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1/m)f(t) \end{bmatrix}} \; (11).$$

As condições iniciais, em forma matricial, são dadas por

$$\boxed{\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}} \qquad (12)$$

ESPAÇO DE ESTADO

Na representação acima, são empregadas as seguintes denominações:

u_1 e u_2 : **variáveis de estado**;

$\mathbf{u}(t)$: **vetor de estado**, de ordem 2 x 1;

A : **matriz de estado**, de ordem 2 x 2.

Diz-se, dessa forma, que o sistema com um grau de liberdade está descrito no **espaço de estado**.

As variáveis u_1 e u_2 , que são, respectivamente, o **deslocamento** e a **velocidade** do sistema, descrevem o **estado do sistema**.

Assim posto, o problema de valor inicial (equação diferencial + condições iniciais) pode ser solucionado de forma numérica, via Runge-Kutta.

EXEMPLO 1 – SISTEMA COM 1 GDL SOB VÁRIAS CONDIÇÕES

Seja um sistema com um grau de liberdade, em que m = 100 kg, c = 50 kg/s e k = 2000 N/m. Determinar o estado do sistema para as seguintes condições:

(a) $x(0) = 0{,}01$ m , $\dot{x}(0) = 0{,}1$m/s , f(t) = 0 N (vibração livre);

(b) $x(0) = 0$ m , $\dot{x}(0) = 0$ m/s , f(t) = 150sen(3t) N (excitação harmônica);

(c) $x(0) = 0{,}01$ m , $\dot{x}(0) = 0{,}1$ m/s , f(t) = 150sen(6t) N (excit. harmonica);

(d) $x(0) = 0$ m , $\dot{x}(0) = 0$ m/s , f(t) = mc.g N, mc = 10 kg (excit. constante);

(e) $x(0) = 0$ m , $\dot{x}(0) = 0$ m/s , f(t) = 150δ(t) N (excitação impulsiva);

(f) $x(0) = 0$ m , $\dot{x}(0) = 0$ m/s , f(t) = $1500\text{sen}[(\omega_n / 3)t]$ N , $k_3 = 300$ N/m^3

(não linearidade cúbica, excitação harmônica);

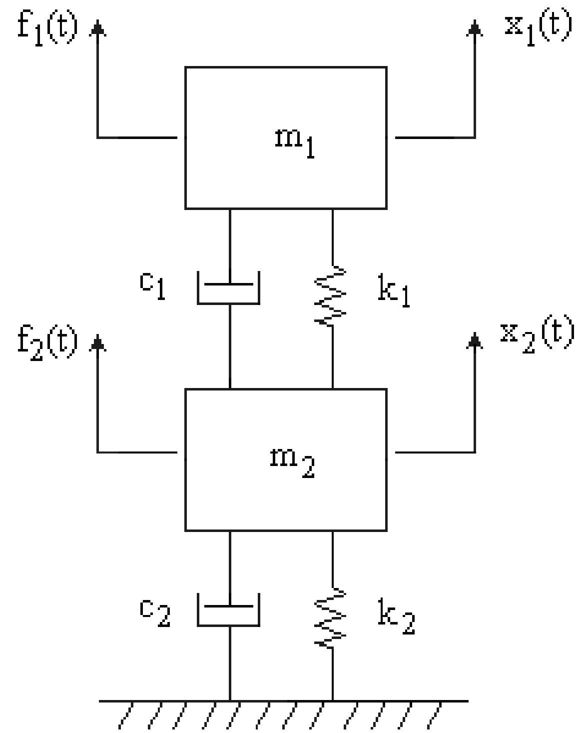
(g) $x(0) = 0{,}01$ m, $\dot{x}(0) = 1$ m/s, f(t) = $1500[u(t-t_1) - u(t-t_2)]$ N, $k_3 = 300$ N/m^3

(não linearidade cúbica, excitação do tipo pulso retangular).

SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A equação de movimento de um sistema com múltiplos graus de liberdade e amortecimento viscoso é

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (13),$$



onde M, C e K são, respectivamente, as matrizes de massa (inércia), amortecimento e rigidez, enquanto $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e força, respectivamente.

As matrizes M, C e K são matrizes quadradas, de ordem n x n, ao passo que os vetores $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são de ordem n x 1, onde n é o número de graus de liberdade do sistema.

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO NO ESPAÇO DE ESTADO

Sejam definidas, então, em analogia ao que foi feito para sistemas com um grau de liberdade, as seguintes variáveis:

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{x}(t) \qquad (14) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \qquad (15).$$

Nas equações acima, $\mathbf{u}_1(t)$ e $\mathbf{u}_2(t)$ também são vetores de ordem n x 1.

Levando as Eqs. (14) e (15) na Eq. (13) e rearranjando, decorre que as equações de movimento, no espaço de estado, são

$$\dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) \qquad (16)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2(t) = -M^{-1}C\mathbf{u}_2(t) - M^{-1}K\mathbf{u}_1(t) + M^{-1}\mathbf{f}(t) \qquad (17)$$

Em associação, as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ passam a ser dadas, respectivamente, por $\mathbf{u}_1(0)$ e $\mathbf{u}_2(0)$.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Em forma matricial, obtém-se novamente que

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)} \qquad (18)\ ,$$

Agora, contudo, tem-se que

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}}\ (19);\ \boxed{A = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}}\ (20);\ \boxed{\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} [0] \\ M^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}}\ (21).$$

onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são vetores de ordem 2n x 1, enquanto A é uma matriz de ordem 2n x 2n. Nessa matriz, $[0]$ e $[I]$ são as submatrizes nula e identidade, respectivamente, de ordem n x n. As condições iniciais são dadas por

$$\boxed{\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(0) & \mathbf{u}_2(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) & \dot{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}^T} \qquad (22)$$

EXEMPLO 2 – SISTEMA COM 2 GDLs SOB VÁRIAS CONDIÇÕES

Seja um sistema com dois graus de liberdade, em que

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } K = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar o estado do sistema para as seguintes condições:

(a) excitação harmônica, com condições iniciais não nulas

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}; \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \text{m}; \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m/s}; \ \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sen}(2t)\,\text{N}.$$

(b) excitação do tipo pulso, com condições iniciais não nulas

$$C = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,05 \\ -0,05 & 0,05 \end{bmatrix}; \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1 \end{bmatrix} \text{m}; \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m/s}; \ \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u(t-1) - u(t-1,1)]\,\text{N}.$$

Fontes:

Inman, D. J., Engineering Vibration (3rd edition), Pearson/Prentice-Hall, 2007;

Rao, S., Vibrações Mecânicas (4ª. edição), Pearson/Prentice-Hall, 2008.