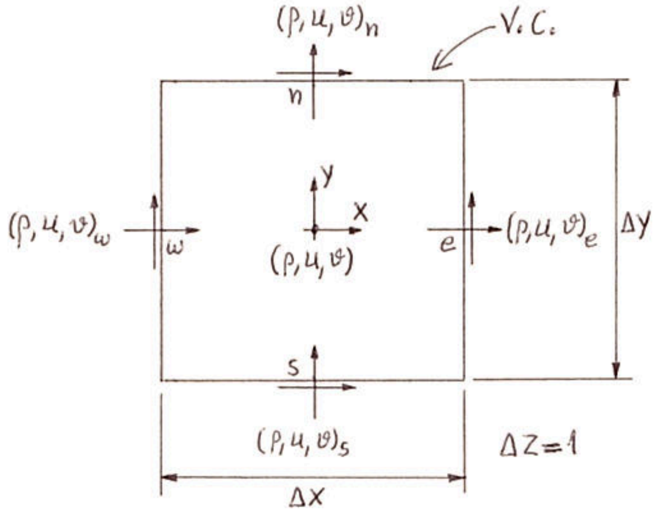
4. EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

NO CAPÍTULO 3 VIMOS QUE A 2ª LEI DE NEWTON PARA UM VOLUME DE CONTROLE É DADA POR

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, dV + \int_{SC} \vec{V}\rho\,\vec{V}\cdot\hat{n}\, dA}_{1^{\circ}\ \text{MEMBRO}} = \underbrace{\vec{F}}_{2^{\circ}\ \text{MEMBRO}}$$

VAMOS CONSIDERAR O VOLUME DE CONTROLE DA FIGURA 3 QUE ESTÁ IMERSO NUM CAMPO DE ESCOAMENTO.



w, e, s, n = FACES OU SUPERFÍCIES DO VOLUME DE CONTROLE

ρ = MASSA ESPECÍFICA

u E v = COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ NAS DIREÇÕES x E y

FIGURA 3.

APLICANDO-SE À DIREÇÃO X O 1º MEMBRO DA EQUAÇÃO ACIMA AO VOLUME DE CONTROLE DA FIGURA 3 CHEGA-SE A

$$1^{\circ}\text{MEMBRO} = \frac{\Delta}{\Delta t}(u\rho\,\Delta x\,\Delta y\,1) + (u\rho u\,\Delta y\,1)_e - (u\rho u\,\Delta y\,1)_w + (u\rho v\,\Delta x\,1)_n - (u\rho v\,\Delta x\,1)_s$$

DIVIDINDO-SE ESTA EXPRESSÃO PELO VOLUME DO VOLUME DE CONTROLE, OU SEJA, POR $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,1$, OBTÉM-SE

$$1^{\circ}\text{MEMBRO} = \frac{\Delta}{\Delta t}(\rho u) + \frac{(u\rho u)_e - (u\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(u\rho v)_n - (u\rho v)_s}{\Delta y}$$

TOMANDO-SE O LIMITE QUANDO Δt, Δx E Δy TENDEREM A ZERO TEM-SE

$$1^{\underline{o}}\ \text{MEMBRO}\ X = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) \tag{9}$$

DE FORMA SEMELHANTE, PODE-SE DEDUZIR PARA A DIREÇÃO Y QUE

$$1^{\underline{o}}\ \text{MEMBRO}\ Y = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) \tag{10}$$

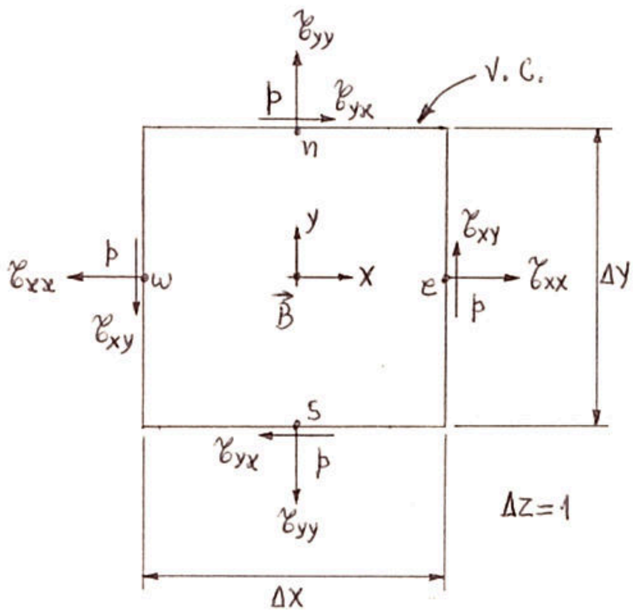
→ FRICÇÃO

NA FIGURA 4 SÃO INDICADAS AS PRESSÕES (p), AS TENSÕES (τ) E A FORÇA DE CORPO ($\vec{B}$) QUE ATUAM SOBRE O VOLUME DE CONTROLE DA FIGURA 3. A NOMENCLATURA USADA NOS ÍNDICES DE τ VEM DE

$$\tau_{ij} = \frac{F_j}{A_i} \tag{11}$$

ONDE F_j = FORÇA NA DIREÇÃO j E A_i = ÁREA CUJA NORMAL APONTA NA DIREÇÃO i, DESTE MODO

$$\tau_{xx} = \frac{F_x}{A_x} \qquad \tau_{yy} = \frac{F_y}{A_y} \qquad \tau_{xy} = \frac{F_y}{A_x} \qquad \tau_{yx} = \frac{F_x}{A_y} \tag{12}$$



w, e, n, s = FACES OU SUPERFÍCIES DO VOLUME DE CONTROLE (V.C.)

$\vec{B}$ = FORÇA DE CORPO POR UNIDADE DE MASSA

FIGURA 4.

A SOMA DAS FORÇAS NA DIREÇÃO X RESULTA EM

$$2^{\underline{o}}\text{MEMBRO } X = \underbrace{B_x \rho \Delta x \Delta y 1}_{\text{FORÇAS DE CORPO}} + \underbrace{(\tau_{xx})_e \Delta y 1 - (\tau_{xx})_w \Delta y 1 + (\tau_{yx})_n \Delta x 1 - (\tau_{yx})_s \Delta x 1 + (p)_w \Delta y 1 - (p)_e \Delta y 1}_{\text{FORÇAS DE SUPERFÍCIE}}$$

DIVIDINDO ESTA EXPRESSÃO PELO VOLUME $\Delta V = \Delta x \Delta y 1$ OBTÉM-SE

$$2^{\underline{o}}\text{MEMBRO } X = \rho B_x + \frac{(\tau_{xx})_e - (\tau_{xx})_w}{\Delta x} + \frac{(\tau_{yx})_n - (\tau_{yx})_s}{\Delta y} - \frac{(p_e - p_w)}{\Delta x}$$

FINALMENTE, PARA $\Delta x, \Delta y \to 0$ CHEGA-SE A

$$2^{\underline{o}}\text{ MEMBRO } X = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (13)$$

E DE FORMA SEMELHANTE

$$2^{\underline{o}}\text{ MEMBRO } Y = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \qquad (14)$$

AGORA PODEMOS IGUALAR O 1º AO 2º MEMBRO PARA CADA DIREÇÃO. NA DIREÇÃO X: EQ. (9) = EQ. (13). DIREÇÃO Y: EQ. (10) = EQ. (14). FAZENDO-SE ISTO TEMOS

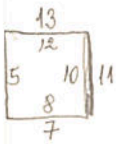
$$X: \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (15)$$

$$Y: \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \qquad (16)$$

As equações (15) e (16) foram obtidas em 1827 e são denominadas de equações do movimento de Cauchy. Elas são válidas para qualquer meio contínuo como os fluidos, sólidos plásticos e elásticos.

No caso dos fluidos normalmente usados em aplicações da engenharia mecânica como a água, o ar e óleos, as tensões (τ) são dadas por

...licar τ
...icamente



$\rightarrow +5\tau$

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad (17)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

onde μ é a viscosidade absoluta ou dinâmica do fluido [kg/m.s].

Os fluidos cuja relação entre tensão e gradiente de velocidade seja linear como nas equações (17) são denominados de fluidos newtonianos.

Nos fluidos como o sangue onde a relação entre tensão e gradiente de velocidade não é linear são denominados de fluidos não-newtonianos.

Substituindo as equações (17) nas equações (15) e (16) chega-se finalmente às equações de Navier-Stokes que foram obtidas inicialmente por Navier em 1827 e depois, independentemente, por Poisson (1831), St. Venant (1843) e Stokes (1845).

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

(ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL LAMINAR DE FLUIDO NEWTONIANO, COMPRESSÍVEL E VISCOSO)

DIREÇÃO X: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (18)$$

DIREÇÃO Y: $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v)}_{\text{FORÇAS DE INÉRCIA}} = \underbrace{\rho B_y}_{\text{FORÇAS DE CORPO}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{FORÇAS DE PRESSÃO}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)}_{\text{FORÇAS VISCOSAS}} \quad (19)$$

SE CONSIDERARMOS UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL ($\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$) E μ CONSTANTE, AS EQUAÇÕES (18) E (19) REDUZEM-SE A

DIREÇÃO X: $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (20)$$

DIREÇÃO Y: $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (21)$$

TODOS OS FLUIDOS REAIS SÃO VISCOSOS, ISTO É, $\mu \neq 0$. MAS PODEMOS CONSIDERAR A EXISTÊNCIA DE UM FLUIDO IDEAL NO QUAL NÃO HAJA ATRITO ENTRE SUAS PARTÍCULAS ($\mu=0$). ESTE FLUIDO TAMBÉM É DENOMINADO DE FLUIDO INVÍSCIDO OU NÃO-VISCOSO. PARA ESTE FLUIDO AS EQUAÇÕES (18) E (19) REDUZEM-SE ÀS EQUAÇÕES DE EULER, OBTIDAS PELA PRIMEIRA VEZ EM 1748, E DADAS POR

DIREÇÃO X: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x}$ (22)

DIREÇÃO Y: $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v)}_{\text{FORÇAS DE INÉRCIA}} = \underbrace{\rho B_y}_{\text{FORÇAS DE CORPO}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{FORÇAS DE PRESSÃO}}$ (23)

É IMPORTANTE NOTAR QUE OS PRIMEIROS MEMBROS DAS EQS. (18) E (22) SÃO EQUIVALENTES AO PRIMEIRO MEMBRO DA EQ. (20), OU SEJA

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

O MESMO OCORRE ENTRE AS EQS. (19), (21) E (23).

PARA A DIREÇÃO X A PROVA É A SEGUINTE:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)$$

$$= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right]}_{\text{EQ. MASSA} = 0;\ \text{EQ.}(2)}$$

$$= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{c.q.d.}$$

DEVE-SE PERCEBER QUE ESTA IDENTIDADE É VÁLIDA PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS OU INCOMPRESSÍVEIS.