

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS

1. Motivação
 2. C. Massa para sistemas
 3. 2ª Lei de Newton p/ sistemas
 4. C. Energia para sistemas
 5. Teorema do T. de Reynolds
 6. C. Massa para V.C.
 7. 2ª Lei de Newton para V.C.
 8. C. Energia para V.C.
- Exercícios

1. MOTIVAÇÃO

Com base em experimentos foram postulados os princípios de conservação, ou leis naturais, que regem o movimento dos fluidos. São eles:

- 1- princípio da conservação da massa ou Lei de Lavoisier, postulado em 1784;
- 2- princípio da conservação da quantidade de movimento linear ou 2ª Lei de Newton, postulado em 1687;
- 3- princípio da conservação da energia ou 1ª Lei da Termodinâmica, postulado em torno de 1870;
- 4- princípio da conservação da quantidade de movimento angular ou 2ª Lei de Kepler, postulado em 1609; e
- 5- princípio do aumento da entropia ou 2ª Lei da Termodinâmica, postulado em 1865.

Estes princípios se adequam bem à escala da natureza em que vivemos e se baseiam na chamada mecânica newtoniana. Na escala microscópica tem-se a mecânica quântica e no nível macroscópico, a mecânica relativística.

Todos os princípios de conservação são válidos para um sistema, ou seja, para uma quantidade fixa de massa. Exemplos de sistemas são dados na Fig. 1.

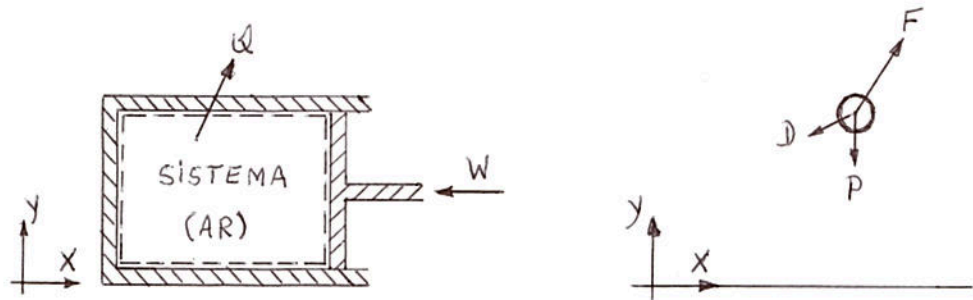


Figura 1. a) sistema estacionário: conjunto pistão-cilindro-ar;
b) sistema móvel: arremesso de uma bola ao ar.

Nesta disciplina trabalharemos com os três primeiros princípios acima dentro do escopo da mecânica newtoniana. Assim, ao longo deste capítulo veremos, por exemplo, qual o tempo necessário para se esvaziar um reservatório de líquido, como calcular a força que um fluido em movimento imprime sobre um objeto e, ainda, como calcular a energia necessária para movimentar um fluido.

2. CONSERVAÇÃO DA MASSA PARA SISTEMAS

O princípio da conservação da massa ou Lei de Lavoisier (1784), na mecânica newtoniana, é expresso matematicamente por

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \quad (1)$$

onde M é a massa do sistema (kg), t é o tempo (s) e d representa derivada total ou

ordinária.

O significado da Eq. (1) é: a massa de um sistema é constante.

A massa do sistema é calculada por $M = \rho V$, se ρ for constante, onde ρ é a massa específica (kg/m^3) e V é o volume do sistema (m^3). No caso de ρ variável, o que ocorre com fluido compressíveis, tem-se

$$M = \int_V \rho dV \quad (2)$$

3. 2ª LEI DE NEWTON PARA SISTEMAS

A 2ª Lei de Newton (1687) ou princípio da conservação da quantidade de movimento linear é dado por

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (M\vec{V})_{\text{sistema}} \quad (3)$$

onde F é força (N) e V , a velocidade do sistema (m/s). O significado deste princípio é: a soma de todas as forças que atuam sobre um sistema é igual à variação da sua quantidade de movimento linear (\vec{P}), onde

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (4)$$

A Eq. (3) pode ser assim reescrita

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{a} \quad (5)$$

que é a forma mais conhecida da 2ª Lei de Newton.

Exemplos:

- 1- calcular a aceleração e a velocidade da caixa mostrada na Fig. 2a, empurrada sobre um piso, após ter transcorrido 5 segundos de atuação da força F_1 de 130 N. Dados: $M = 5 \text{ kg}$ $F_2 = 30 \text{ N}$ $g = 9,8 \text{ m/s}^2$
Nosso sistema é a caixa e F_2 é a força de atrito do piso sobre a caixa.

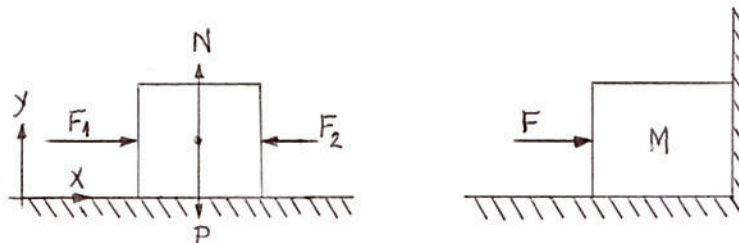


Figura 2. a) exemplo 1; b) exemplo 3.

Direção X: $F_X = M.a_X$; $F_X = F_1 - F_2 = 130 - 30 = 100 \text{ N}$

$a_X = F_X / M = 100 / 5 = 20 \text{ m/s}^2$; $a_X = 20 / g = 20 / 9,8 = 2,0 \text{ g}$

Direção Y: $F_Y = P - N = M.a_Y = 0$; $a_Y = 0$

$V = a t = 20 \times 5 = 100 \text{ m/s}$

$$\frac{dV}{dt} = a \quad dV = a dt \quad \int_0^V dV = a \int_0^t dt$$

- 2- calcular a aceleração e a força que atuam sobre uma Ferrari F-130 que atinge 100 km/h em 4 segundos. Considere a massa deste automóvel igual a 1400 kg.

$$V = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}; \quad V = a.t \quad a = V / t = 27,8 / 4 = 7,0 \text{ m/s}^2 = 0,7g$$

$$F = M.a = 1400 \times 7,0 = 9800 \text{ N}$$

Ainda neste ano um automóvel tentará quebrar o recorde de velocidade que atualmente é pouco maior que 1000 km/h. A tentativa será de ultrapassar a velocidade do som, 1230 km/h, chegando a atingir 1400 km/h. Este veículo atingirá 512 km/h nos 10 primeiros segundos de aceleração. Procedendo da mesma forma como no exemplo 2 encontramos $a = 1,5g$. Portanto, a aceleração será quase o dobro da Ferrari. Em comparação, os astronautas do space shuttle são submetidos durante a subida à aceleração de 3g. Já nos aviões a jato, de combate, pode-se atingir em certas manobras a aceleração de 9g. Em torno deste valor uma pessoa perde a consciência.

- 3- Se há uma força atuando sobre a caixa mostrada na Fig. 2b, por que ela não é acelerada?

De acordo com a 2ª Lei de Newton, Eq. (5), a caixa não é acelerada porque a resultante das forças que atuam sobre ela é nula. Sobre a caixa atua a força normal que a parede impõe e que tem o mesmo módulo de F mas sentido contrário.

4. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA PARA SISTEMAS

A 1ª Lei da Termodinâmica (1870), ou princípio da conservação da energia, pode ser escrita para um sistema como

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta W \quad \text{ou} \quad E_2 - E_1 = Q_{1-2} + W_{1-2} \quad (6)$$

onde Δ = variação ou quantidade, E = energia total (J), Q = calor (J), W = trabalho (J), 1 = estado inicial do sistema e 2 = estado final do sistema. O significado da Eq. (6) é: a variação da energia total do sistema é igual ao calor e ao trabalho adicionados ou retirados do sistema.

A Eq. (6) pode ser escrita, quanto aos sinais, de qualquer forma desde que represente o comportamento físico verificado na natureza, ou seja: "adição de calor e de trabalho a um sistema resulta no aumento de sua energia". Desta forma, para a Eq. (6) a convenção de sinais adota é mostrada na Fig. 3a. Já na Fig. 3b tem-se a representação esquemática relativa à equação da energia escrita da seguinte forma:

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (7)$$

A 1ª Lei pode ser reescrita em termos de taxas de variação, isto é,

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Tomando-se o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ tem-se

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (8)$$

onde dE/dt = taxa de variação da energia total do sistema (watt=W); \dot{Q} = taxa de transferência de calor (watt=W) e \dot{W} = potência (watt=W).

O significado da Eq. (8) pode ser assim expresso: o aumento da energia de um sistema com o tempo é igual à taxa de transferência de calor e à potência fornecidas ao sistema.

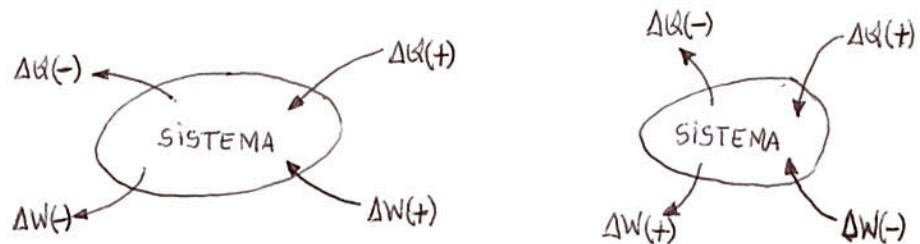


Figura 3. Convenção de sinais para a 1ª Lei da Termodinâmica:
a) para a Eq. (6); b) para a Eq. (7).

5. TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

O emprego do conceito de sistema é adequado a problemas nos quais não haja fluxo de massa através das fronteiras que delimitam a região de interesse na análise do problema.

Nos problemas que envolvem o movimento de fluidos, fluxos de massa atravessam as fronteiras da região de interesse. Nestes casos é mais conveniente empregar o conceito de volume de controle.

No volume de controle o que se fixa é uma região do espaço e não a quantidade de massa.

Para verificar a dificuldade do uso do conceito de sistema em problemas que envolvem fluxos de massa, vamos analisar o seguinte exemplo: qual a massa ao longo do tempo que está dentro do recipiente da Fig. 4, $M=M(t)$? Com a Eq. (1), $dM/dt = 0$ não é possível obter uma solução. Veremos mais adiante que usando o conceito de volume de controle (V.C.) é possível resolver este problema. Deve-se observar através da Fig. 4 que o volume de controle é igual ao espaço interno do recipiente. No tempo $t = 0$, o volume de controle coincide com o sistema. Mas para $t > 0$, uma parte do sistema sai do recipiente e não há mais coincidência entre sistema e volume de controle.



Figura 4. a) tempo $t = 0$; b) tempo $t > 0$.

Todos os princípios de conservação vistos acima são válidos para sistemas e não volumes de controle. Portanto, temos que encontrar uma relação entre sistema e volume de controle com o intuito de resolver problemas que envolvem escoamentos

de fluidos. O teorema do transporte de Reynolds é usado com este fim.

Vamos considerar o escoamento num duto como mostrado na Fig. 5. A linha tracejada indica as fronteiras do sistema que move-se com velocidade V em relação ao volume de controle (VC). A linha contínua indica as fronteiras do volume de controle que está fixo ao duto.

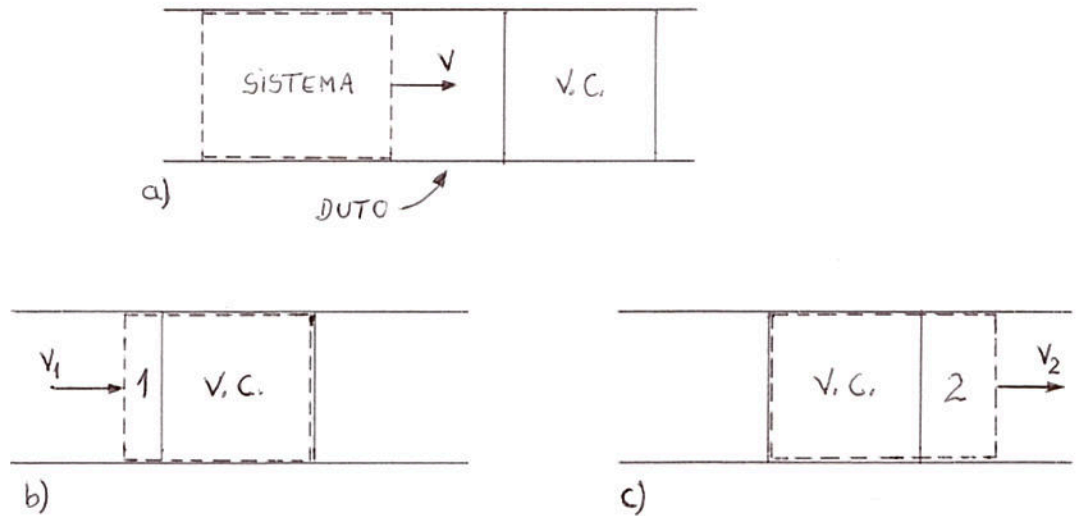


Figura 5. a) tempo $< t$; b) tempo $= t$; c) tempo $= t + \Delta t$.

massa do sistema no tempo t : $M_{sist}^t = M_{VC}^t + M_1^t$

massa do sistema no tempo $t + \Delta t$: $M_{sist}^{t+\Delta t} = M_{VC}^{t+\Delta t} + M_2^{t+\Delta t}$

Calculando a diferença entre as massas no tempo tem-se

$$(M_{sist}^{t+\Delta t} - M_{sist}^t) = (M_{VC}^{t+\Delta t} - M_{VC}^t) + M_2^{t+\Delta t} - M_1^t$$

Dividindo esta expressão por Δt obtém-se

$$\frac{(M_{sist}^{t+\Delta t} - M_{sist}^t)}{\Delta t} = \frac{(M_{VC}^{t+\Delta t} - M_{VC}^t)}{\Delta t} + \frac{M_2^{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{M_1^t}{\Delta t}$$

Tomando-se o limite quando Δt tender a zero chega-se a

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{VC} + \dot{M}_{sai} - \dot{M}_{entra} \quad (9)$$

onde \dot{M} = fluxo de massa (kg/s) = ρVA ; A = área de passagem do fluido; d = derivada total; e ∂ = derivada parcial porque a M_{VC} representa apenas parte da massa do sistema.

A Eq. (9) significa que a variação com o tempo da massa do sistema é igual à variação com o tempo da massa do volume de controle mais o fluxo de massa que sai do volume de controle menos o que entra.

Para generalizar, o fluxo de massa é dado por

$$\dot{M} = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (10)$$

onde SC é a superfície de controle. A Eq. (10) permite calcular o fluxo de massa para ρ e V variáveis ao longo da área em que se dá o escoamento e representar, ao

mesmo tempo, os fluxos de massa que entram e que saem do volume de controle. Isso pode ser entendido com o auxílio da Fig. 6. Deve-se perceber que por convenção o vetor normal \hat{n} sempre aponta para fora do volume de controle e o vetor velocidade no sentido do escoamento. Assim, para a Fig. 6:

$$\text{- face 2: } \rho \vec{V} \cdot \hat{n} A = \rho |\vec{V}| |\hat{n}| \cos 0^\circ A = \rho |\vec{V}| A = \dot{M}_{\text{saí}}$$

$$\text{- face 1: } \rho \vec{V} \cdot \hat{n} A = \rho |\vec{V}| |\hat{n}| \cos 180^\circ A = -\rho |\vec{V}| A = \dot{M}_{\text{entra}}$$

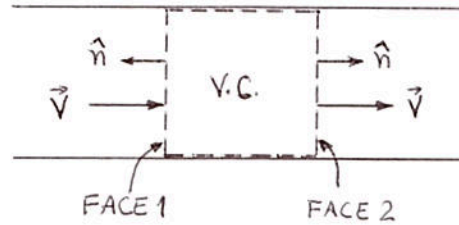


Figura 6.

Substituindo as Eqs. (2) e (10) em (9) obtemos

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (11)$$

Esta equação é uma forma mais rigorosa e geral de expressar a Eq. (9). Agora, vamos generalizar a relação entre sistema e volume de controle para uma propriedade genérica N sabendo que

$$N = \eta M \quad (12)$$

onde N = propriedade extensiva e η = propriedade intensiva ou N por unidade de massa. Exemplo: se $\eta = \vec{V}$, $N = \vec{V} M$ = quantidade de movimento linear = \vec{p} . Multiplicando a Eq. (11) por η chegamos finalmente a

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (13)$$

A Eq. (13) é a expressão matemática do Teorema do Transporte de Reynolds. Deve-se perceber que a velocidade \vec{V} é sempre medida em relação ao volume de controle. Este teorema expressa para uma propriedade geral N a relação entre sistema e volume de controle. Seu significado é: a variação com o tempo de uma propriedade N do sistema é igual à sua variação com o tempo no volume de controle mais o seu fluxo ao longo da superfície de controle, ou esquematicamente

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)_{\text{sistema}} = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)_{VC} + \dot{N}_{SC}$$

6. CONSERVAÇÃO DA MASSA PARA VOLUME DE CONTROLE

Já sabemos relacionar o princípio da conservação da massa entre sistema e volume de controle através da Eq. (11), dada por

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Mas, do princípio da conservação da massa, Eq. (1), temos

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0$$

Igualando-se as duas equações anteriores obtemos o princípio da conservação da massa para volumes de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (14)$$

O significado da Eq. (14) é: a soma da variação com o tempo da massa do volume de controle com o fluxo de massa ao longo da superfície de controle é nula.

Exemplos de aplicação da equação de conservação da massa:

1- calcular o fluxo de massa de ar que escoar num duto retangular para o perfil de velocidades da Fig. 7.

$$\begin{aligned} \text{Dados: } H &= 0,05 \text{ m} & \rho &= 1,2 \text{ kg/m}^3 & V &= V_1 + \frac{(V_2 - V_1)}{H} y \\ V_1 &= 8 \text{ m/s} & V_2 &= 5 \text{ m/s} & W &= \text{profundidade} = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

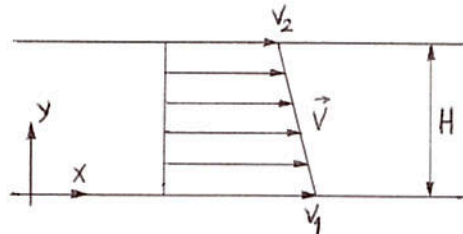


Figura 7. Exemplo 1.

O perfil de velocidades representa a magnitude e direção da velocidade ao longo de uma seção do escoamento. Quando as velocidades possuem magnitude constante ao longo da seção do escoamento, como na Fig. 8a, chamamos de perfil uniforme.

A partir de agora designaremos por escoamento tridimensional o escoamento que necessita de três coordenadas espaciais para descrever o seu campo de velocidades, ou seja, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$. No caso de ser necessário apenas uma (Fig. 8a) ou duas coordenadas (Fig. 8b) para descrever o campo de velocidades, teremos um escoamento unidimensional ou bidimensional. Portanto, se o perfil de velocidades mostrado na Fig. 7 não varia com x o escoamento é unidimensional, só é função de y .

Voltando ao exemplo 1, sabemos que o fluxo de massa é dado

por $\dot{M} = \int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ e o elemento de área por $dA = W \cdot dy$.

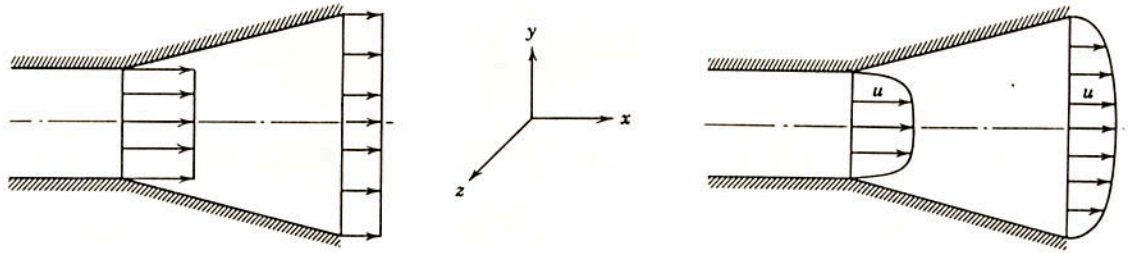


Figura 8. a) exemplo de escoamento unidimensional; b) bidimensional.

$$\text{Portanto, } \dot{M} = \rho \int_0^H \left[V_1 + \frac{(V_2 - V_1)}{H} y \right] W dy = \rho W \frac{H}{2} (V_1 + V_2)$$

Substituindo os dados chega-se a $\dot{M} = 0,39 \text{ kg/s}$.

- 2- determinar a velocidade na seção 3 da tubulação mostrada na Fig. 9 para o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível. Considerar perfis de velocidades uniformes nas seções 1, 2 e 3.

$$\text{Dados: } \begin{array}{lll} A_1 = 0,02 \text{ m}^2 & A_2 = A_3 = 0,01 \text{ m}^2 & \theta = 30^\circ \\ V_1 = 5 \text{ m/s} & V_2 = 2 \text{ m/s} & \end{array}$$

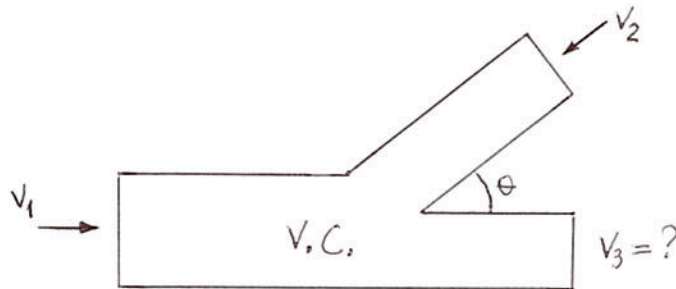


Figura 9. Exemplo 2.

$$\text{Da equação de conservação da massa temos: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Um escoamento encontra-se em regime ou estado permanente quando todas as propriedades que o definem (velocidade, massa específica, temperatura e pressão) não variam com o tempo em cada ponto do volume de controle. Quando as propriedades variam com o tempo tem-se um escoamento em regime ou estado transiente.

Então, considerando um escoamento em regime permanente, a equação da conservação da massa reduz-se a:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (15)$$

Os fluidos que possuem massa específica constante são denominados de incompressíveis e, se a massa específica for variável, de compressíveis.

Portanto, considerando que o fluido do exemplo 2 é incompressível, a Eq.

(15) resulta em

$$\int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (16)$$

A Eq. (16) é a equação de conservação da massa para escoamento em regime permanente de um fluido incompressível. O produto entre velocidade e área que aparece na Eq. (16) é chamado de vazão (Q); sua unidade no SI é m³/s.

$$Q = VA \quad (17)$$

Assim, a Eq. (16) pode ser interpretada como: a soma das vazões ao longo da superfície de controle é nula.

Voltando ao exemplo 2 e supondo que o sentido de V_3 seja de estar saindo do volume de controle, a Eq. (16) resulta em

$$-V_1A_1 - V_2A_2 + V_3A_3 = 0$$

cujo resultado é: $V_3 = 12$ m/s. Como o sinal obtido é positivo, o sentido suposto para V_3 está correto. Se tivéssemos suposto que o sentido de V_3 fosse de estar entrando no volume de controle, a Eq. (16) forneceria:

$$-V_1A_1 - V_2A_2 - V_3A_3 = 0$$

cujo resultado seria: $V_3 = -12$ m/s. Como o sinal é negativo significa que o sentido admitido para V_3 é o inverso do real.

- 3- calcular o valor da velocidade média do escoamento mostrado na Fig. 10 em termos de R e V_{\max} . O duto tem seção circular. R é o raio máximo do duto e V_{\max} é a velocidade máxima do perfil de velocidades.

O perfil de velocidades é dado por: $V = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$

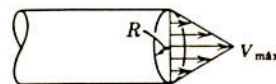


Figura 10. Exemplo 3.

O produto entre a velocidade média e a área em que se dá um escoamento representa a vazão. A velocidade média \bar{V} é igual à magnitude de um perfil

uniforme e é obtida através de $\bar{V}A = \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ ou

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (18)$$

Voltando ao exemplo 3, considerando o perfil de velocidades do enunciado e que o elemento de área é dado por $dA = 2\pi r dr$, a Eq. (18) resulta em

$$\bar{V} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2\pi r dr = \frac{V_{\max}}{3}$$

4- calcular o tempo necessário para esvaziar o tanque da Fig. 11 que contém um fluido incompressível.

A profundidade do tanque é W e a velocidade V do fluido no orifício é dada por $V = C_d \sqrt{2gh}$ onde C_d é chamado de coeficiente de descarga, seu valor é obtido experimentalmente; g é a aceleração gravitacional; e h é o nível do fluido dentro do tanque num determinado instante de tempo.

Dados: $L = H = 2 \text{ m}$ $W = 3 \text{ m}$ $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ $C_d = 0,6$
 $A = 0,01 \text{ m}^2 = \text{área do orifício.}$

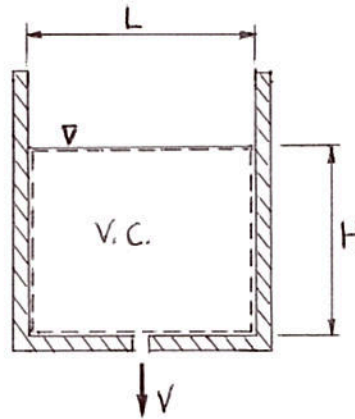


Figura 11. Exemplo 4.

Da Eq. (14) temos $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$ Como ρ é constante, esta

equação se reduz a $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} dV + \int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$ A primeira integral resulta no

volume de líquido que há no tanque num determinado instante de tempo e que é dado por: $V = LWh$. Já a segunda integral resulta em

$$\int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} dA = VA = C_d \sqrt{2gh} A$$

Portanto, fazendo-se as devidas substituições na equação da conservação da massa chegaremos a

$$\frac{d}{dt}(LWh) + C_d \sqrt{2gh} A = 0 \text{ ou } \int_0^t dt = - \frac{LW}{C_d \sqrt{2g} A} \int_H^0 h^{-1/2} dh \text{ cujo resultado}$$

$$\text{final é } t = \frac{2LW}{C_d A} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Substituindo-se os dados, verifica-se que o tempo necessário para esvaziar o tanque é de 10 minutos e 39 segundos. A velocidade do fluido para $h = H$ é de 3,8 m/s.

7. 2ª LEI DE NEWTON PARA VOLUME DE CONTROLE

No Teorema do Transporte de Reynolds, Eq. (13), se considerarmos $\eta = \vec{v}$ teremos $N = M \vec{v} = \vec{P}$, assim a Eq. (13) resulta em

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

Da 2ª Lei de Newton para sistemas, Eq. (3), sabemos que

$$\left[\frac{d}{dt} (M \vec{v}) \right]_{\text{sistema}} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \vec{F}$$

Igualando as duas equações anteriores, obtemos a 2ª Lei de Newton para volume de controle, dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} \rho dV + \int_{SC} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = \vec{F} \quad (19)$$

Em palavras, a Eq. (19) significa: a variação com o tempo da quantidade de movimento linear do volume de controle (1º termo) mais o fluxo de quantidade de movimento ao longo da superfície de controle (2º termo) é igual à soma das forças que agem sobre o volume de controle.

A Eq. (19) é uma equação vetorial, assim, ela pode ser escrita em termos de suas componentes. Para duas dimensões temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u \rho dV + \int_{SC} u \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = F_x \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v \rho dV + \int_{SC} v \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA = F_y \quad (21)$$

onde u e v são as componentes cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y , respectivamente.

Frisa-se que todas as velocidades das Eqs. (19) a (21) são medidas em relação a um sistema de coordenadas fixo ao volume de controle.

A seguir são apresentados alguns exemplos de aplicação da 2ª Lei de Newton.

- 1 Qual a força na direção X que deve ser imposta sobre o redutor da Fig. 12 para mantê-lo imóvel? O redutor se encontra num ambiente à pressão atmosférica (p_a).
 Dados: $V_1 = 1 \text{ m/s}$ $A_1 = 7,9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ $A_2 = 3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ fluido = água

Hipóteses simplificativas:

1-fluido incompressível

2-regime permanente

3-escoamento unidimensional, $V = f(x)$

4-sem forças de corpo na direção X

5-forças de superfície são devidas só à pressão

6-fluido ideal (sem atrito)

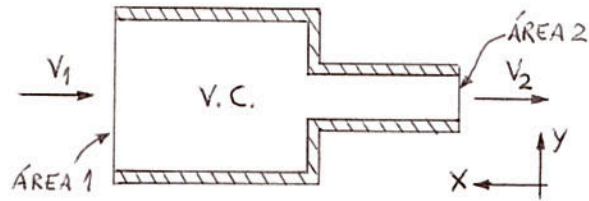


Figura 12. Exemplo 1.

Portanto, da equação de conservação da massa para as hipóteses simplificativas

acima temos $\int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$ e $-V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$

Com as hipóteses simplificativas, a 2ª Lei de Newton para a direção X se reduz

a $\int_{SC} u \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = F_x$ que aplicada ao exemplo 1 fornece:

$$-|V_1| [-|\rho V_1 A_1|] - |V_2| [|\rho V_2 A_2|] = F_R - p_a A_1 + p_a A_2 + p_a (A_1 - A_2)$$

onde F_R é a força aplicada sobre o redutor para mantê-lo imóvel; suposta no sentido positivo em relação ao sistema de coordenadas.

Deve-se notar que há dois tipos de sinal na expressão anterior:

- devido ao produto escalar $\vec{V} \cdot \hat{n}$
- devido à componente u do vetor velocidade em relação ao sistema de coordenadas.

Notem também que a pressão atmosférica não tem efeito no resultado por estar atuando em toda a superfície de controle. Substituindo o resultado para V_2 na

expressão anterior obtém-se $F_R = \rho V_1^2 A_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$ Como $A_2 < A_1$, F_R será

negativo, ou seja, no sentido oposto ao admitido. Substituindo os dados, encontra-se $F_R = -193$ N.

Fisicamente, deve-se lembrar que um bombeiro tem que fazer força sobre uma mangueira de incêndio no sentido do escoamento para que a mesma fique imóvel. Deve-se observar que F_R é proporcional à massa específica, assim, se o fluido fosse o ar, $\rho = 1,2$ kg/m³, teríamos $F_R = -0,23$ N.

2- Idem ao exemplo 1 mas com $p_1 = 117$ kPa e $p_2 = p_a = 101$ kPa (1 atm). Do

exemplo 1 temos $\rho V_1^2 A_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) = F_R - p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_a (A_1 - A_2)$ que

resulta em $F_R = \rho V_1^2 A_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) + (p_1 - p_a) A_1$

Substituindo-se os dados tem-se $F_R = -193 + 126 = -67$ N.

3- Calcular a força F_j que um jato de água exerce sobre a placa da Fig. 13a.

Dados: $V_1 = 900$ m/s $\rho = 1000$ kg/m³ $A_1 = 3,1 \times 10^{-10}$ m²

Hipóteses simplificativas:

- 1- após o jato colidir com a placa, escoar paralelamente à mesma
- 2- desprezar forças de corpo
- 3- fluido incompressível
- 4- regime permanente
- 5- velocidade V_1 é uniforme na área A_1 e se mantém assim até atingir a placa

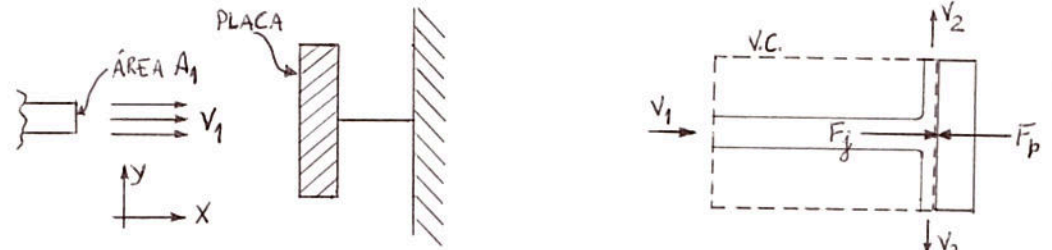


Figura 13. Definição do problema e volume de controle do exemplo 3.

O volume de controle (VC) usado é mostrado na Fig. 13b onde F_p é a força da placa sobre o volume de controle e F_j é a força do jato de água sobre a placa. Aplicando-se a 2ª Lei de Newton na direção X obtém-se

$$\rho V_1 \frac{d}{dt} [- \rho V_1 A_1 x] = -F_p \text{ resultando em } F_p = \rho V_1^2 A_1, \text{ portanto, o sentido}$$

admitido para F_p está correto. Como $\vec{F}_j = -\vec{F}_p$ obtém-se finalmente que

$$\vec{F}_j = \rho V_1^2 A_1 \hat{i} \text{ Substituindo-se os dados, chega-se a } F_j = 0,251 \text{ N que equivale}$$

a uma tensão de 810 N/mm² ou 82,7 kgf/mm². Como a tensão de cisalhamento do aço com 0,6% de carbono e temperado é de 32 kgf/mm², o jato de água incidindo sobre este material irá rompê-lo.

- 4- Calcular a força que um jato de água exerce sobre o defletor da Fig. 14a em função do ângulo θ de deflexão.

Dados: $V = 30 \text{ m/s}$ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ $A = 3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ (área do jato)

Hipóteses simplificativas:

- 1- após o jato colidir com o defletor, é todo desviado para cima mantendo constante a magnitude da velocidade V
- 2- sem forças de corpo e de superfície
- 3- fluido incompressível
- 4- regime permanente.

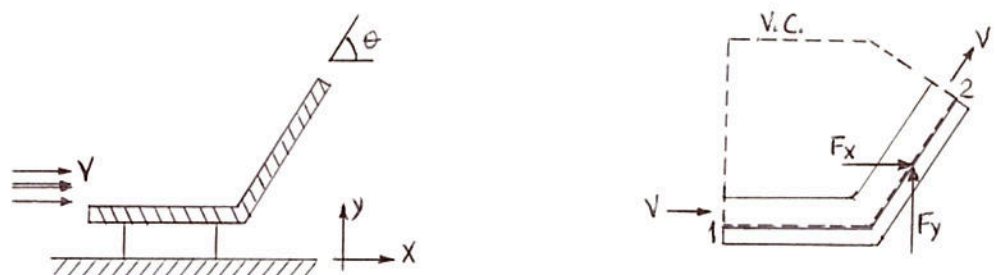


Figura 14. Exemplo 4.

O volume de controle (VC) usado é mostrado na Fig. 14b onde F_x e F_y são as forças do defletor sobre o VC. Opostas a estas forças tem-se R_x e R_y que são as

forças do jato de água sobre o defletor.

Sugere-se sempre usar um volume de controle cuja superfície de controle seja perpendicular às velocidades. Isto facilita o cálculo dos produtos escalares que aparecem nas equações de conservação.

Aplicando-se a 2ª Lei de Newton, com as hipóteses simplificativas acima, tem-se:

$$X: |V|[-|\rho VA|] + |V|\cos\theta|\rho VA| = F_X \quad \text{ou} \quad F_X = (\cos\theta - 1)\rho V^2 A$$

$$Y: 0[-|\rho VA|] + |V|\sin\theta|\rho VA| = F_Y \quad \text{ou} \quad F_Y = \sin\theta \rho V^2 A$$

Como $R_X = -F_X$ e $R_Y = -F_Y$ obtém-se finalmente:

$$\vec{R} = \rho V^2 A [(1 - \cos\theta)\hat{i} - \sin\theta \hat{j}]$$

Portanto, as forças do jato sobre o defletor são para θ entre zero e 180° sempre positivas para R_X e sempre negativas para R_Y .

Com os dados do problema tem-se $\vec{R} = 279[(1 - \cos\theta)\hat{i} - \sin\theta \hat{j}] N$

- 5- Idem ao problema 4 só que agora o defletor está sobre um carrinho que se move com velocidade $U = 5$ m/s, constante, como indicado na Fig. 15.

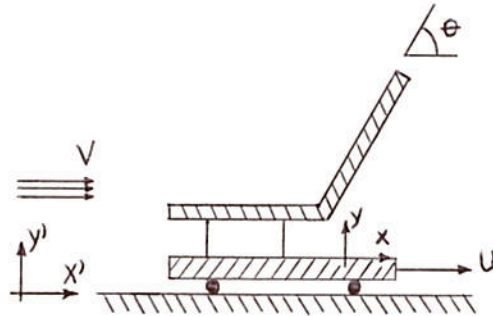


Figura 15. Exemplo 5.

As equações do problema, hipóteses simplificativas e volume de controle são idênticos ao exemplo 4. Apenas lembra-se que as velocidades nas equações de conservação são medidas em relação ao volume de controle que se move junto com o carrinho, assim como o sistema de coordenadas (x, y) . Os valores das velocidades V e U são dados em relação ao sistema inercial de coordenadas (x', y') . Aplicando-se a 2ª Lei de Newton obtém-se

$$\text{-direção X: } |V - U|[-|\rho(V - U)A|] + |V - U|\cos\theta|\rho(V - U)A| = F_X \quad \text{ou}$$

$$F_X = (\cos\theta - 1)\rho(V - U)^2 A$$

$$\text{-direção Y: } |V - U|\sin\theta|\rho(V - U)A| = F_Y \quad \text{ou}$$

$$F_Y = \sin\theta \rho(V - U)^2 A$$

Como $R_X = -F_X$ e $R_Y = -F_Y$ obtém-se

$$\vec{R} = \rho(V - U)^2 A [(1 - \cos\theta)\hat{i} - \sin\theta \hat{j}]$$

Finalmente, com os dados do problema chega-se a

$$\vec{R} = 194[(1 - \cos\theta)\hat{i} - \sin\theta \hat{j}] N$$

Deve-se notar que uma força $\vec{F} = F_X \hat{i} + F_Y \hat{j}$ tem que ser aplicada sobre o

carrinho para que a força resultante sobre o mesmo seja nula e, assim, sua velocidade U permaneça constante.

6- Qual deve ser a tração T (força) imposta sobre a correia da Fig. 16 para mantê-la com velocidade $V_c = V_{\text{correia}}$ constante?

Dados: $\rho_{\text{areia}} = 1600 \text{ kg/m}^3$ $A = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (área pela qual cai a areia em 1)
 $V_c = 5 \text{ m/s}$ (velocidade da correia)
 $V_1 = 2 \text{ m/s}$ (velocidade com que a areia cai do carregador)

Hipóteses simplificativas:

- 1 - sem forças de corpo na direção X
- 2 - "fluido" incompressível
- 3 - velocidade V_1 uniforme
- 4 - desprezar a massa de ar contida dentro do volume de controle.

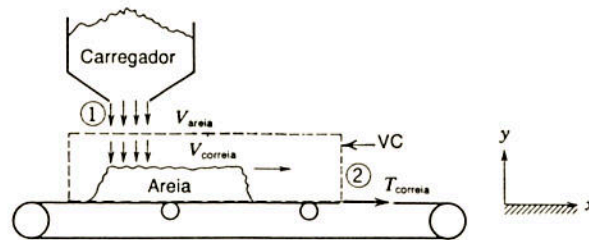


Figura 16. Exemplo 6.

O volume de controle mostrado na Fig. 16 está fixo à base da máquina, assim como o sistema de coordenadas. Portanto, a correia move-se com velocidade V_c em relação ao V.C. Deve-se observar que o volume de controle definido é grande o suficiente para que a areia que se deposita sobre a correia não chegue a atravessar a superfície de controle na região 2.

Da equação da 2ª Lei de Newton, para a direção X , obtém-se

$$|V_c| \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = T \quad \text{ou} \quad T = |V_c| \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_{VC} \quad (*)$$

Da equação da conservação da massa tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV - |\rho V_1 A| = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_{VC} = |\rho V_1 A| = \dot{M} \quad (**)$$

Com (**) em (*) chega-se finalmente a $T = |\rho V_c V_1 A| = |V_c \dot{M}|$

Substituindo os dados encontra-se $T = 126 \text{ N}$.

7- Determinar a velocidade U do carrinho da Fig. 17 em função do tempo. Um jato de água sai do reservatório que está sobre o carrinho através de um orifício com área A .

Dados: $M_0 = 1000 \text{ kg}$ (massa inicial do carrinho mais água)
 $M_A = 900 \text{ kg}$ (massa inicial de água)
 $V = 50 \text{ m/s}$ (velocidade com que a água sai do reservatório)
 $A = 3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ (área através da qual a água sai do reservatório)
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Inicialmente vamos calcular qual a força F_c que tem que ser imposta sobre o

carrinho para mantê-lo imóvel, portanto, com $U = 0$. O volume de controle será escolhido de tal forma que coincida com o volume total do reservatório. Aplicando-se a 2ª Lei de Newton à direção X,

$$-|V|\rho|VA| = -F_C \quad \text{ou} \quad F_C = \rho V^2 A \quad \text{ou ainda} \quad \vec{F}_C = -\rho V^2 A \hat{i}$$

Para que o carrinho fique imóvel, existindo F_C , tem que haver outra força de mesmo módulo mas com sentido contrário. Chamaremos esta força de F_J . Ela se origina como reação ao jato de água. A relação entre estas duas forças é $\vec{F}_J = -\vec{F}_C$, se desprezarmos perdas devido ao atrito. Portanto,

$\vec{F}_J = \rho V^2 A \hat{i}$. Se retirarmos a força F_C restará a força F_J que provocará uma aceleração sobre o carrinho, assim teremos

$$F_J = M \frac{dU}{dt} = \rho V^2 A \quad (*)$$

Mas a massa M é variável. Ela pode ser obtida da equação de conservação da massa, o que resulta em (vamos considerar a partir daqui apenas o módulo de V)

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \rho VA = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -\rho VA.$$

Integrando-se esta equação obtém-se

$$\int_{M_0}^M dM = -\rho VA \int_0^t dt \quad \text{ou} \quad M = M_0 - \rho VA t \quad (**)$$

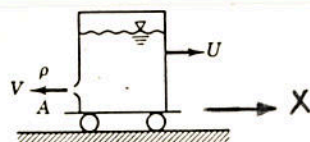


Figura 17. Exemplo 7.

Como a massa final do volume de controle será de 100 kg, de (**) obtém-se o tempo para exaurir a água que é de 58,1 s.

Com (**) em (*) tem-se $\int_0^U dU = \int_0^t \frac{\rho V^2 A dt}{(M_0 - \rho VA t)}$ cujo resultado é

$$\frac{U}{V} = \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - \rho VA t} \right)$$

Com os dados do problema na solução acima, pode-se montar a tabela mostrada abaixo.

Para se calcular a posição do carrinho no tempo, basta considerar $U = dx/dt$ na solução de U/V e integrar novamente.

tempo (s)	U/V	tempo (s)	U/V
0	0	30	0,63
1	0,016	41	1,00
10	0,17	50	1,5
20	0,37	58 (fim da água)	2,3

8. EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA VOLUME DE CONTROLE

A energia total (E) de um sistema está relacionada à energia específica (e) através de $E = Me$. Assim, substituindo-se $N = E$ e $\eta = e$ no Teorema do Transporte de Reynolds, Eq. (13), obtém-se

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{SISTEMA}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Mas, da equação de conservação da energia para sistemas, Eq. (8), sabe-se que $\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{SISTEMA}} = \dot{Q} + \dot{W}$. Igualando-se, portanto, as duas equações anteriores chega-se à equação de conservação da energia para volume de controle, dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \dot{Q} + \dot{W} \quad (22)$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gZ \quad (23)$$

u = energia interna do fluido (J/kg)

V = velocidade (m/s)

g = aceleração gravitacional (m/s²)

Z = direção coordenada (m)

\dot{Q} = taxa de transferência de calor (W)

\dot{W} = potência (W)

O significado da Eq. (22) é: a variação com o tempo da energia total do volume de controle (1º termo) mais o fluxo de energia através de suas fronteiras (2º termo) é igual à taxa de transferência de calor mais a potência.

A potência \dot{W} pode ser dividida em pelo menos dois tipos:

1- potência de eixo (\dot{W}_E): resultante de bombas hidráulicas, turbinas, motores de combustão interna, etc.

2- potência devido a pressão (\dot{W}_P):
$$\dot{W}_P = - \int_{SC} p \vec{V} \cdot \hat{n} dA \quad (24)$$

Substituindo as Eqs. (23) e (24) em (22) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \rho dV + \int_{SC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \\ = \dot{Q} + \dot{W}_E - \int_{SC} p \vec{V} \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Lembrando que o volume específico (v) é o inverso da massa específica, ou seja, $v = 1/\rho$ e que a propriedade termodinâmica entalpia é dada por $h = u + pv$, a equação da energia, na forma acima, pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \rho dV + \int_{SC} \left(h + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \dot{Q} + \dot{W}_E \quad (25)$$

A Eq. (25) é a forma da equação de conservação da energia para volume de controle que usaremos nos exemplos a seguir.

1- Determinar a potência desenvolvida pela máquina de fluxo (M.F.) mostrada na Fig. 18 admitindo escoamento em regime permanente, sem troca de calor e sem atrito.

Dados: $A_1 = 0,02 \text{ m}^2$ $V_1 = 5 \text{ m/s}$ $h_1 = h_2$ $Z_1 = Z_2$
 $A_2 = 0,01 \text{ m}^2$ $V_2 = 10 \text{ m/s}$

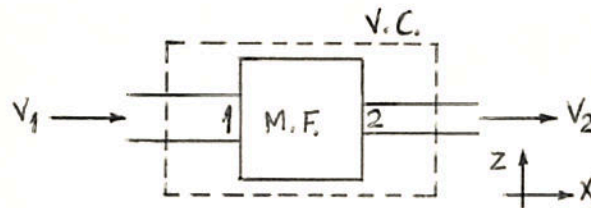


Figura 18. Exemplo 1.

Para este problema, a Eq. (25) se reduz a $\int_{SC} \left(\frac{V^2}{2} \right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \dot{W}_E$ resultando em

$$\dot{W}_E = \frac{V_1^2}{2} [-|\rho V_1 A_1|] + \frac{V_2^2}{2} |\rho V_2 A_2| \quad (*)$$

Da equação de conservação da massa, para este exemplo, chega-se a

$$|\rho V_1 A_1| = |\rho V_2 A_2| = \dot{M} \quad (**)$$

Com (**) em (*) finalmente tem-se

$$\dot{W}_E = \frac{|\dot{M}|}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2} (|V_2^3| A_2 - |V_1^3| A_1)$$

Com os dados, $\dot{M} = 100 \text{ kg/s}$ e $\dot{W}_E = 3,75 \text{ kW} = 5,10 \text{ HP}$.

Quando o resultado fornece $\dot{W} > 0 \rightarrow$ *bomba hidráulica*; está sendo entregue potência ao fluido. Já para $\dot{W} < 0 \rightarrow$ *turbina*; o fluido perde energia (potência) por estar realizando trabalho.

2- Verificar a perda de calor que ocorre no bocal convergente-divergente da Fig. 19 conhecendo-se os seguintes dados experimentais:

$$M_1 = 0,1 \quad M_2 = 3,0 \quad T_1 = 3000 \text{ K} \quad C_p = 1004 \text{ J/kg.K}$$

$$V_1 = 110 \text{ m/s} \quad V_2 = 1877 \text{ m/s} \quad T_2 = 1073 \text{ K} \quad \dot{M} = 5,02 \text{ kg/s}$$

onde M é o número de Mach. Considere escoamento de ar em regime permanente, sem potências de eixo e Z constante.

Para este problema, a equação da energia, Eq. (25), se reduz a

$$\dot{Q} = \int_{sc} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

Admitindo-se a hipótese de gás perfeito tem-se $h = C_p T$ assim

$$\dot{Q} = \dot{M} \left[C_p (T_2 - T_1) + \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2} \right] \rightarrow \dot{Q} = - 900 \text{ kW}$$

Como $\dot{Q} < 0$, o fluido está perdendo calor (energia).

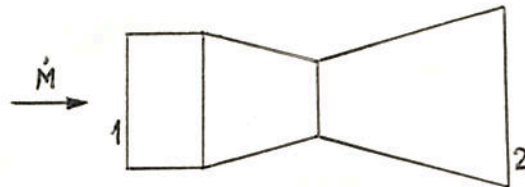


Figura 19. Exemplo 2.