

2. ESTÁTICA DOS FLUIDOS

1. Motivação
 2. Definição de meio contínuo
 3. Pressão
 4. Tipos de forças
 5. Eq. da estática dos fluidos
 6. Cálculo da pressão
 7. Empuxo de flutuação
 8. Centro de pressão
- Exercícios

1. MOTIVAÇÃO

Neste capítulo aprenderemos a:

- * calcular a força resultante que atua sobre corpos submersos estacionários como diques, represas ou submarinos;
- * calcular o peso máximo que um objeto pode ter para flutuar num fluido; e
- * determinar a pressão num reservatório ou duto através de manômetros de líquido.

2. DEFINIÇÃO DE MEIO CONTÍNUO

Como se sabe, os estados físicos da matéria dividem-se em sólido, líquido e gasoso. Chamaremos de fluido tudo aquilo que não seja sólido, isto é, fluidos são os líquidos e gases.

Também sabemos que os fluidos são constituídos por partículas (átomos e moléculas) em constante movimento e que entre elas não existe matéria.

Apesar do ar ser composto por moléculas de diversas substâncias (nitrogênio, oxigênio, argônio, ...), vamos considerar a existência de uma hipotética molécula de ar para realizarmos alguns cálculos.

$$1 \text{ mol de ar} = 6,0225 \times 10^{23} \text{ moléculas (número de Avogadro)}$$

$$1 \text{ mol de ar} = 28,98 \text{ gramas}$$

portanto,

$$1 \text{ molécula de ar} = 4,812 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Da equação de estado dos gases perfeitos, tem-se

$$p = \rho RT \quad (1)$$

onde

$$p = \text{pressão (Pa = N/m}^2\text{)}$$

$$\rho = \text{massa específica (kg/m}^3\text{)}$$

$$R = \text{constante do gás (J/kg.K)}$$

$$T = \text{temperatura absoluta (K)}$$

Para as condições normais de temperatura e pressão (CNTP), $p = 101325 \text{ Pa}$ (1 atmosfera) e $T = 15 \text{ }^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$, e $R = 287 \text{ J/kg.K}$ para o ar. Assim, $\rho = 1,185 \text{ kg/m}^3$ onde

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2)$$

e $m = \text{massa (kg)}$, $V = \text{volume (m}^3\text{)}$.

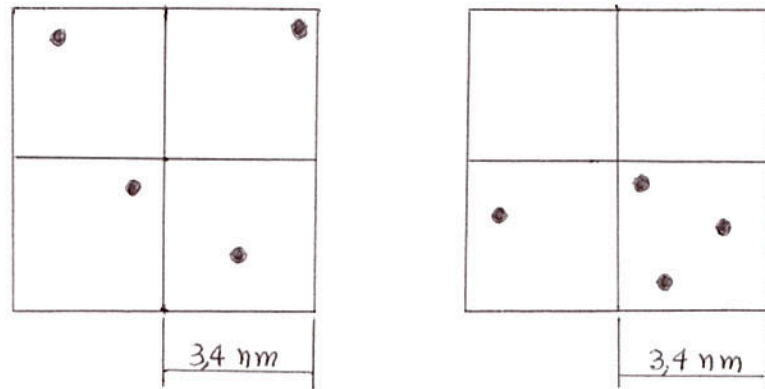
Com a Eq. (2) podemos calcular o volume médio ocupado por uma molécula

$$\text{de ar: } V = \frac{m}{\rho} = \frac{4,812 \times 10^{-26} \text{ kg}}{1,185 \text{ kg/m}^3} = 4,061 \times 10^{-26} \text{ m}^3$$

o que é equivalente a dizer que cada molécula de ar ocupa, em média, um cubo com $3,4 \times 10^{-9} \text{ m} = 3,4 \text{ nm}$ de lado. Para o ar a 80 km de altitude esta dimensão passa a ser de $14 \times 10^{-6} \text{ m} = 14 \text{ }\mu\text{m}$.

Em comparação, o raio dos átomos de oxigênio e nitrogênio é de $7,4 \times 10^{-11}$

m. Podemos estimar o raio da nossa hipotética molécula de ar em 20×10^{-11} m ou diâmetro de 4×10^{-10} m, ou seja, cerca de 10 vezes menor que o lado do cubo acima. Isto é representado graficamente na Fig. 1.



a) Na média.

b) Situação possível.

Figura 1. Distribuição do ar no espaço.

Portanto, observando o caso b da Fig. 1, deve-se perceber que a definição de massa específica (ρ) dada na Eq. (2) nem sempre tem significado prático. Por exemplo:

$$\text{caso 1: } \rho = \frac{\text{sem molécula}}{\text{volume do cubo}} = 0$$

$$\text{caso 2: } \rho = \frac{\text{massa de uma molécula}}{\text{volume do cubo}} = 1,185 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{caso 3: } \rho = \frac{\text{massa de três moléculas}}{\text{volume do cubo}} = 3 \times 1,185 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{caso 4: } \rho = \frac{\text{massa de uma molécula}}{\text{volume de uma molécula}} = \frac{4,812 \times 10^{-26} \text{ kg}}{3,35 \times 10^{-29} \text{ m}^3} = 1436 \text{ kg/m}^3$$

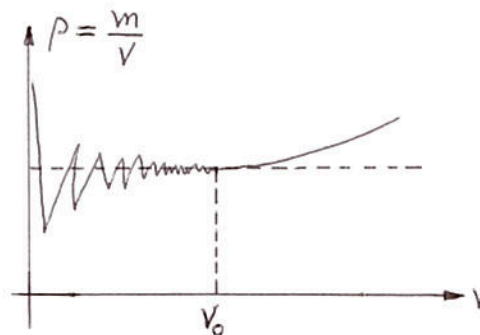


Figura 2. Definição de massa específica.

Podemos construir o gráfico mostrado na Fig. 2 e verificar que a partir de um determinado volume mínimo (V_0), o valor da massa específica não oscila mais.

A oscilação pára de ocorrer quando o volume usado é grande o suficiente para conter uma quantidade muito grande de moléculas e, assim, o efeito da massa de uma molécula a mais ou a menos sobre milhões de outras é muito pequeno ou desprezível. Na CNTP, podemos construir a Tabela 1.

Tabela 1. Número de moléculas de ar para volume V.

V	m (kg)	n° moléculas
1 m ³	1,185	2,46 x 10 ²⁵
1 cm ³	1,185 x 10 ⁻⁶	2,46 x 10 ¹⁹
1 mm ³	1,185 x 10 ⁻⁹	2,46 x 10 ¹⁶
1 μm ³	1,185 x 10 ⁻¹⁸	2,46 x 10 ⁷

Pode-se perceber que mesmo para o volume de 1 μm³, ou seja, um cubo com lado de 1 micrometro (diâmetro de um fio de cabelo fica entre 20 e 70 vezes isso), o número de moléculas é extremamente grande, aproximadamente 25 milhões!

A massa específica, portanto, será definida como

$$\rho = \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{m}{V} \quad (3)$$

onde V₀ é o volume mínimo a partir do qual a massa específica passa a ter comportamento contínuo.

Então, em nosso estudo não trabalharemos com as moléculas do fluido individualmente e sim com o efeito médio causado por um número muito grande delas. Em outras palavras, vamos desprezar o vazio que existe entre as moléculas e considerar o fluido como sendo contínuo.

3. PRESSÃO

Definiremos pressão (p) como a razão entre a componente da força na direção normal (F_n) exercida pelo fluido contra uma superfície e sua área de atuação (A). Então, lembrando que a matéria é constituída por partículas, a definição matemática da pressão pode ser dada por

$$p = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{F_n}{A} \quad (4)$$

onde A₀ é a área mínima a partir da qual a pressão passa a ter comportamento contínuo.

Pode-se demonstrar matematicamente e também verificar-se experimentalmente que a pressão independe da direção e, portanto, é uma grandeza escalar assim como a massa específica.

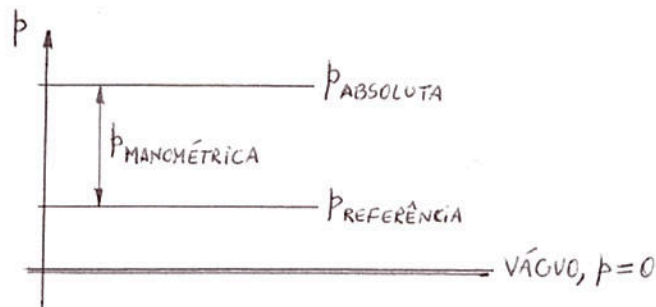
Em engenharia é comum o uso dos seguintes termos:

pressão absoluta: é a pressão efetivamente exercida por um fluido em relação ao vácuo (p = 0); seu valor é medido através de barômetros e é sempre positivo;

pressão manométrica: é a pressão medida em relação a uma referência que normalmente é a pressão atmosférica local; como a pressão manométrica se constitui numa diferença de pressão, seu valor pode ser maior ou menor que zero e é medido através de manômetros;

pressão atmosférica ou de referência: é a pressão absoluta exercida pela atmosfera ao nível do mar ou a uma altitude qualquer.

Graficamente tem-se:



ou matematicamente,

$$P_{absoluta} = P_{manométrica} + P_{referência} \quad (5)$$

4. TIPOS DE FORÇAS

As forças que podem atuar sobre um objeto sólido ou sobre uma determinada quantidade de fluido dividem-se em:

forças de corpo, de massa, de volume ou de campo: são forças proporcionais à massa ou ao volume; exemplo: aceleração gravitacional; matematicamente tem-se

$$\vec{F}_B = \int_V \vec{g} \rho dV \quad (6)$$

onde \vec{F}_B = força de corpo (N)

\vec{g} = vetor aceleração gravitacional (m/s^2)

ρ = massa específica (kg/m^3)

V = volume (m^3)

forças de superfície: são forças proporcionais à superfície; exemplos: atrito entre sólidos e força devido a pressão; no caso da pressão tem-se

$$\vec{F}_s = - \int_A p \hat{n} dA \quad (7)$$

onde \vec{F}_s = força de superfície (N)

p = pressão (Pa)

\hat{n} = vetor unitário normal à superfície (para fora)

A = área (m^2)

A pressão sempre exerce força de compressão sobre a superfície que estiver em contato.

5. EQUAÇÃO DA ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Vamos concentrar nossa atenção sobre uma porção de fluido em estado de equilíbrio e delimitada por um cubo com dimensões Δx , Δy , Δz conforme mostrado na Fig. 3. Como o fluido está em equilíbrio, sabemos da 2ª Lei de Newton que a soma das forças é nula. Isso vale para cada direção coordenada já que a força é uma grandeza vetorial. Portanto, para a direção X tem-se:

$$(F_g)_1^x + (F_g)_2^x + (F_B)^x = 0$$

$$p_1 \Delta y \Delta z - p_2 \Delta y \Delta z + g_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

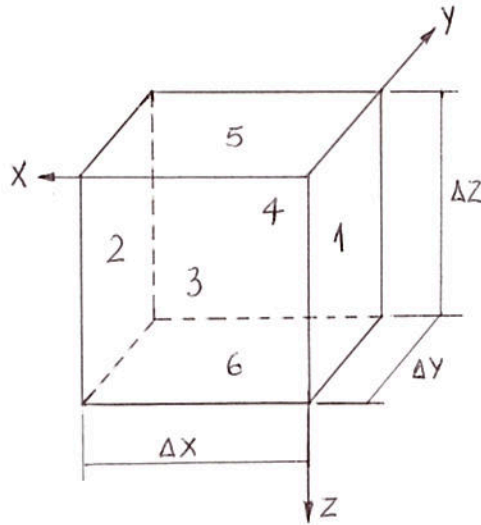


Figura 3.

Dividindo a equação anterior pelo volume da porção de fluido chega-se a

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\Delta x} + \rho g_x = 0$$

Considerando $p_1 = p_x$ e $p_2 = p_{x+\Delta x}$ obtém-se

$$\frac{(p_x - p_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \rho g_x = 0 \quad \text{ou} \quad - \frac{(p_{x+\Delta x} - p_x)}{\Delta x} + \rho g_x = 0$$

No limite quando Δx tender a um valor muito pequeno mas que a matéria ainda possa ser considerada continua tem-se

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \quad (8)$$

O significado da Eq. (8) é: a variação da pressão na direção X é igual ao peso por unidade de volume do fluido na mesma direção.

Por analogia, para as direções Y e Z pode-se obter

$$- \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \quad (9)$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \quad (10)$$

Considerando-se as direções das forças nas Eqs. (8) a (10), podemos somá-las e obter

$$\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \rho g_x \hat{i} + \rho g_y \hat{j} + \rho g_z \hat{k} \quad (11)$$

ou

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (12)$$

A Eq. (12) é a equação da estática dos fluidos. Com ela podemos calcular o valor da pressão em cada ponto de um reservatório de água, por exemplo, como mostrado na Fig. 4. Neste caso, o nosso domínio de cálculo é a água contida no reservatório. A solução da Eq. (12) nos dará a função $p = p(x,y,z)$. A partir de agora, usaremos como sinônimo de função a palavra campo. Portanto, campo é uma função que descreve o comportamento de uma grandeza escalar ou vetorial ao longo do domínio de cálculo (x,y,z) e ao longo do tempo (t) . Assim, teremos campos de pressão, de temperatura, de massa específica e de velocidade.

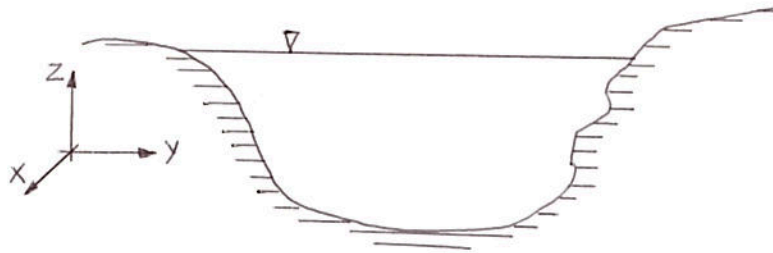


Figura 4. Reservatório de água.

6. CÁLCULO DA PRESSÃO

Vamos ver agora alguns exemplos de aplicação da equação da estática dos fluidos, Eq.(12).

Exemplo 1: qual a pressão $p = p(x,y)$ em cada ponto da piscina mostrada na Fig. 5?

Dados: $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $H = 4 \text{ m}$, $\vec{g} = g_x \hat{i} + g_y \hat{j}$ onde $g_x = 0$ e $g_y = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Direção X: da Eq. (8), $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Portanto, a pressão não varia com a direção x.

Direção Y: da Eq. (9), $\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y$ ou $\frac{dp}{dy} = \rho g_y = \rho g$ já que a

pressão é só função de y. Então, $dp = \rho g dy$. Integrando-se:

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^y \rho g dy \quad (13)$$

Para resolvermos a integral da Eq. (13), temos que dizer como ρ e g variam com y. Vamos admitir que sejam constantes, assim

$$p - p_o = \rho g (y - 0) \quad \text{ou} \quad p = p_o + \rho g y$$

Como y representa a profundidade (h) da água em relação à superfície livre, vamos trocar y por h . Desta forma tem-se

$$p = p_o + \rho g h = p_o + \gamma h \quad (14)$$

onde γ é o peso específico do fluido (N/m^3).

A Eq. (14) se constitui na relação básica entre pressão e profundidade de um fluido incompressível (ρ constante) na presença de um campo gravitacional. Deve-se notar que a pressão é uma função linear da profundidade.

Para os dados do exemplo 1, pode-se obter o valor da pressão no fundo da piscina: $p = 101,3 \times 10^3 + 10^3 \times 9,8 \times 4 = 101,3 \times 10^3 + 39,2 \times 10^3 = 140,5 \text{ kPa}$.

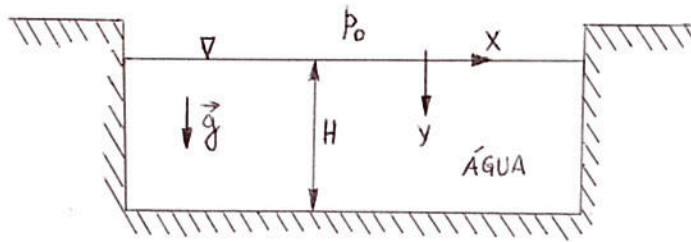


Figura 5.

Exemplo 2: qual a profundidade de água necessária para a pressão aumentar de uma atmosfera?

$$p = 101,3 \text{ kPa}, \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ e } g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$p = \rho g h \quad \rightarrow \quad h = \frac{p}{\rho g} = \frac{101,3 \times 10^3}{10^3 \times 9,8} = 10,34 \text{ m}$$

Portanto, a cada 10,34 metros de profundidade de água em que mergulhamos, a pressão aumenta de uma atmosfera.

Uma aplicação importante da Eq. (14) se dá na medida do valor da pressão em diversos pontos de tubulações onde escoam fluidos. Com este fim são usados manômetros de coluna de líquidos. A seguir veremos alguns exemplos neste sentido.

Exemplo 3: calcular a pressão nos pontos 1 e 2 da tubulação mostrada na Fig. 6. A pressão nas extremidades abertas dos tubos é a pressão atmosférica (p_o). O líquido nos manômetros é a água.

$$H_1 = 0,05 \text{ m}, \quad H_2 = 0,03 \text{ m}, \quad H_3 = 0,08 \text{ m}$$

$$\rho_o = 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ (água)} \quad \rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3 \text{ (ar)} \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

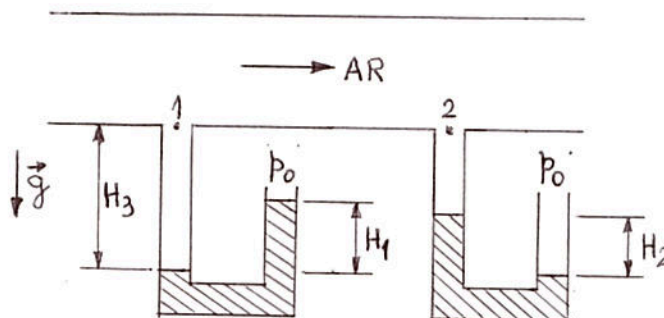


Figura 6.

$$p_1 = p_o + \rho_o g H_1 - \rho_{ar} g H_2 \quad \text{ou} \quad p_1 = 101,3 \times 10^3 + 10^3 \times 9,8 \times 0,05 - 1,2 \times 9,8 \times 0,08 \quad \text{ou} \\ \text{ainda} \quad p_1 = 101300 + 490 - 0,94 = 101,8 \text{ kPa}$$

Deve-se perceber que o efeito da coluna de ar pode ser desprezado frente ao efeito da água já que a massa específica da água é muito maior que a do ar. Para o ponto 2, já desprezando o efeito da coluna de ar, tem-se:

$$p_2 = p_o - \rho_o g H_2 = 101,3 \times 10^3 - 10^3 \times 9,8 \times 0,03 = 101300 - 294 = 101,0 \text{ kPa}$$

Exemplo 4: em unidades do SI, qual a pressão da corrente sanguínea de uma pessoa com pressão 12/8? Esses valores indicam a pressão em centímetros de mercúrio. Como $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$ e $p = \rho_{Hg} g H$ tem-se

$$\text{- para } H = 12 \text{ cm, } p_{12} = 13600 \times 9,8 \times 0,12 = 16,0 \text{ kPa}$$

$$\text{- para } H = 8 \text{ cm, } p_8 = 13600 \times 9,8 \times 0,08 = 10,7 \text{ kPa}$$

Portanto, a pressão sanguínea desta pessoa oscila entre 10,7 e 16,0 kPa. Estes valores são de pressão manométrica.

Exemplo 5: qual a pressão atmosférica (p_o) na cidade de Curitiba sabendo-se que um barômetro indica $H = 672 \text{ mm Hg}$, como mostrado na Fig. 7?

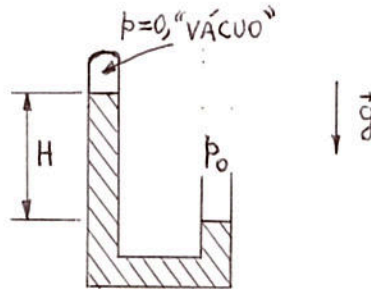


Figura 7.

$$p_o = \rho_{Hg} g H = 13600 \times 9,8 \times 0,672 = 89,6 \text{ kPa}$$

Com este valor de p_o podemos obter da tabela da atmosfera padrão a altitude local que no caso é de 1030 metros. Também com o valor de p_o verifica-se através de uma tabela termodinâmica que a temperatura de ebulição da água é de $96,5 \text{ }^\circ\text{C}$ na cidade de Curitiba.

No cume do pico Everest, a 8850 metros de altitude, a pressão atmosférica local é de 31,5 kPa. Lá a água ferve a $70 \text{ }^\circ\text{C}$. Se continuarmos a subir na atmosfera, ou diminuirmos a pressão de um determinado recinto, veremos que a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ a água ferve ou entra em ebulição quando a pressão é de 2450 Pa. Já no caso do mercúrio este valor é de apenas 0,17 Pa. A esta pressão em que um líquido entra em ebulição, para uma dada temperatura, denomina-se pressão de vapor.

Assim, na extremidade fechada do barômetro mostrado na Fig. 7, na verdade, não existe vácuo. Se este barômetro estiver à temperatura de $20 \text{ }^\circ\text{C}$, a pressão nesta extremidade será igual à pressão de vapor do mercúrio, 0,17 Pa.

Exemplo 6: vamos considerar que em vez da água tenhamos um outro líquido na piscina da Fig. 5 cuja massa específica seja dada por: $\rho = \rho_o + ay$ onde $\rho_o = 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $a = 5 \text{ kg/m}^4$. Então, a partir da Eq. (13) obtemos

$$\int_{p_o}^p dp = \int_0^y \rho g dy = \int_0^y (\rho_o + ay) g dy = g \left(\rho_o y + \frac{ay^2}{2} \right)$$

ou para $y = h$

$$p = p_o + \rho_o g h + a g \frac{h^2}{2} \quad (15)$$

Pode-se perceber, neste caso, que a pressão não é mais uma função linear da profundidade e sim uma função quadrática.

Então, para $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e $H = 4 \text{ m}$, como no exemplo 1, teremos:

$$p = 101,3 \times 10^3 + 10^3 \times 9,8 \times 4 + 5 \times 9,8 \times 4^2 / 2 = (101,3 + 39,2 + 0,39) \times 10^3 = 140,9 \text{ kPa.}$$

Portanto, em comparação com o exemplo 1, a pressão no fundo da piscina é agora um pouco maior já que a massa específica também o é.

Exemplo 7: vamos comparar a variação da coluna de líquido de um manômetro em função da densidade do líquido usado e da geometria do manômetro.

Lembramos que densidade (d) não é sinônimo de massa específica (ρ). A densidade de uma substância é definida como a razão entre seu peso e o peso de um fluido de referência para um dado volume constante. Para líquidos, o fluido de referência é a água nas condições normais. A densidade também pode ser calculada pela razão de massas, peso específico ou massa específica. Portanto,

$$d = \left(\frac{P}{P_{H_2O}} \right)_V = \left(\frac{m}{m_{H_2O}} \right)_V = \left(\frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}} \right)_V = \left(\frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \right)_V \quad (16)$$

onde P = peso e V = volume.

Para o mercúrio, $d = 13,6$. Então, da Eq. (16) tem-se $\rho_{Hg} = d_{Hg} \rho_{H_2O} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

Vamos considerar um manômetro de coluna de líquido em que o Δp seja de 500 Pa. Então, da Eq. (14) obtém-se $p - p_o = \rho g H$ ou $H = \frac{\Delta p}{\rho g}$ resultando

em: para a água, $H = 51 \text{ mm}$ e para o mercúrio, $H = 3,8 \text{ mm}$.

Portanto, o mercúrio ou líquidos de alta densidade são indicados para medir variações grandes de pressão. Enquanto isso, os líquidos de baixa densidade como a água devem ser usados com variações pequenas de pressão.

Agora vamos verificar o efeito da geometria como mostrado na Fig. 8. Se usarmos a água, para os cálculos feitos logo acima, no tubo vertical a altura H é de 51 mm, o mesmo ocorrendo no tubo inclinado. Só que neste a graduação da variação do nível de água pode ser feita ao longo do comprimento L que será função do ângulo θ e da altura H . Então, $L = H / \text{sen}(\theta)$. Para $\theta = 30^\circ$, $L = 102 \text{ mm}$. Ou seja, o manômetro de tubo inclinado é empregado para medir variações de pressão ainda menores já que possui maior sensibilidade.

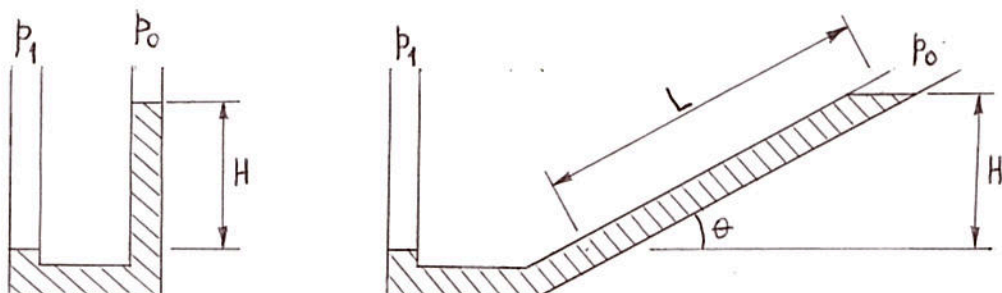


Figura 8. Manômetros de tubo vertical e tubo inclinado.

7. EMPUXO DE FLUTUAÇÃO

Vamos considerar um objeto sólido com dimensões Δx , Δy , Δz imerso num líquido de massa específica ρ conforme mostrado na Fig. 9.

Como as forças de superfície devido a pressão que o líquido exerce sobre as superfícies 1 e 2 do objeto são iguais em módulo mas de sentidos opostos, a força resultante na direção X é nula.

Na direção vertical Y, as forças de superfície devido a pressão são:

- superfície 3: $(\vec{F}_3)_y = p_3 A_3 \hat{j}$ mas $p_3 = p_o + \rho g H$ e $A_3 = \Delta x \Delta z$ então

$$(\vec{F}_3)_y = (p_o + \rho g H) \Delta x \Delta z \hat{j} = (p_o \Delta x \Delta z + \rho g H \Delta x \Delta z) \hat{j}$$

- superfície 4: $(\vec{F}_4)_y = -p_4 A_4 \hat{j}$ mas $p_4 = p_o + \rho g (H + \Delta y)$ e $A_4 = \Delta x \Delta z$ então

$$(\vec{F}_4)_y = -[p_o + \rho g (H + \Delta y)] \Delta x \Delta z \hat{j} = (-p_o \Delta x \Delta z - \rho g H \Delta x \Delta z - \rho g \Delta y \Delta x \Delta z) \hat{j}$$

Somando-se as forças de superfície na direção y teremos:

$$\vec{F}_y = (\vec{F}_3)_y + (\vec{F}_4)_y = -\rho g \Delta x \Delta y \Delta z \hat{j} = -\rho g \Delta V \hat{j} = -mg \hat{j} = -\vec{P}$$

ou seja, a força resultante na direção vertical (\vec{F}_y) atua no sentido contrário à gravidade e seu módulo é igual ao peso (\vec{P}) da quantidade de líquido que possui o mesmo volume (ΔV) do objeto sólido.

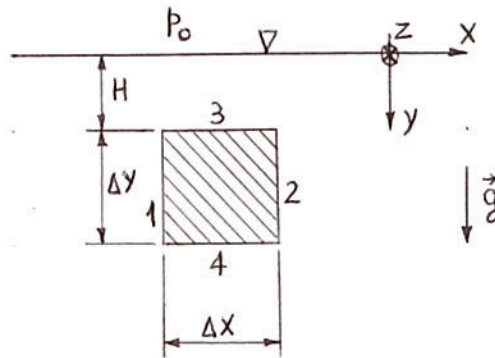


Figura 9. Objeto sólido imerso em líquido estático.

A esta força que atua sobre um objeto sólido imerso num fluido dá-se o nome de empuxo de flutuação (\vec{E}) . A equação acima pode ser generalizada para um corpo com geometria arbitrária, neste caso o seu volume é calculado através de uma integração. Além disso, ρ e g também podem variar no espaço, portanto, a equação geral para o empuxo de flutuação é

$$\vec{E} = - \int_V \rho \vec{g} dV \quad (17)$$

Deve-se perceber que existe empuxo de flutuação também no caso de líquido com líquido, gás com gás e líquido com gás, desde que tenham densidades diferentes.

Vamos ver agora alguns exemplos de aplicação da Eq. (17) que foi descoberta experimentalmente pelo grego Arquimedes em 220 a.C.

Exemplo 1: calcular qual a massa específica limite (ρ_s) que pode ter um objeto sólido para não afundar na água (ρ_f).

Da Eq. (17), o empuxo será: $E = \rho_f g V$, e o peso do objeto: $P = \rho_s V g$. Para não afundar, no máximo o peso poderá ser igual ao empuxo ou

$$P \leq E \rightarrow \rho_s V g \leq \rho_f g V \rightarrow \rho_s \leq \rho_f$$

Portanto, conclui-se que para não afundar, a massa específica do objeto sólido tem que ser menor que a do fluido.

No caso de uma barra de ferro sabemos que ela afunda na água já que sua massa específica é de 7860 kg/m^3 e a da água é de 1000 kg/m^3 . Mas, então, como explicar que um navio não afunda no oceano? Veremos a explicação através dos exemplos 2 e 3 abaixo.

Exemplo 2: tem-se um cubo de ferro com volume total (V) de 1 m^3 cujo interior é preenchido com ar; calcular qual o volume máximo de ferro para que o cubo não afunde na água.

* empuxo de flutuação: $E = \rho_{H_2O} g V$

* peso do cubo: $P = (m_{ar} + m_{Fe}) g = (\rho_{ar} V_{ar} + \rho_{Fe} V_{Fe}) g$

No máximo o peso do cubo poderá ser igual ao empuxo para que o cubo não afunde, então: $P = E \rightarrow (\rho_{ar} V_{ar} + \rho_{Fe} V_{Fe}) g = \rho_{H_2O} g V$

$$\text{Como } V = V_{ar} + V_{Fe} \text{ tem-se } V_{Fe} = \frac{(\rho_{H_2O} - \rho_{ar})}{(\rho_{Fe} - \rho_{ar})} V$$

Para $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{Fe} = 7860 \text{ kg/m}^3$ obtém-se $V_{Fe} \leq 0,13 V$ e $V_{ar} \geq 0,87 V$.

Portanto, no máximo o volume de ferro poderá ser igual a 13% do volume total.

Exemplo 3: se considerarmos que o volume de ferro no exemplo 2 seja de 5% do total, calcular qual a altura H do cubo que ficará dentro da água, como mostrado na Fig. 10.

Dados: $V_{Fe} = 0,05 \text{ m}^3$, $V_{ar} = 0,95 \text{ m}^3$, $V = 1 \text{ m}^3$ e $L = 1 \text{ m}$.

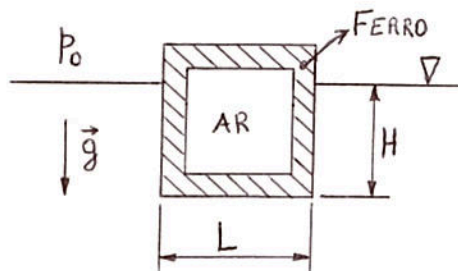


Figura 10. Caixa parcialmente submersa.

Como no exemplo anterior, igualando-se o peso do cubo ao empuxo

$$\text{obteremos: } (\rho_{ar} V_{ar} + \rho_{Fe} V_{Fe}) g = \rho_{H_2O} g L^2 H \text{ ou } H = \frac{(\rho_{ar} V_{ar} + \rho_{Fe} V_{Fe})}{\rho_{H_2O} L^2}$$

Deve-se notar que o empuxo de flutuação é proporcional, neste caso, só ao volume submerso do objeto ($V = L^2 H$) e não ao seu volume total ($V = L^3$). Substituindo-se os valores chega-se a $H = 0,39 \text{ m}$.

Para analisar problemas que envolvam o empuxo de flutuação é recomendado usar o conceito de massa específica média ($\bar{\rho}$) do objeto que está imerso no fluido e que pode ser calculada por meio de

$$\bar{\rho} = \frac{\sum (\rho_i V_i)}{V} \quad (18)$$

onde ρ_i = massa específica de cada componente do objeto
 V_i = volume de cada componente do objeto
 V = volume total do objeto

Usando-se a Eq. (18) verifica-se que para o exemplo 3 $\bar{\rho} = 394 \text{ kg/m}^3$.

Conhecendo-se $\bar{\rho}$ de um objeto podemos concluir que:

- * se $\bar{\rho} < \rho_{H_2O}$ o objeto flutua mas com parte imersa na água;
- * se $\bar{\rho} = \rho_{H_2O}$ o objeto fica totalmente imerso e em equilíbrio com a água no ponto em que for colocado;
- * se $\bar{\rho} > \rho_{H_2O}$ o objeto afunda até o fundo da água desde que vença a resistência ao seu movimento no meio da água.

Portanto, um navio flutua no oceano porque sua massa específica média é menor que a da água.

Exemplo 4: calcular qual a temperatura que o ar no interior de um balão deve ter para que o mesmo fique fixo a uma determinada altitude. A massa total da estrutura do balão mais a dos tripulantes é de $m_e = 200 \text{ kg}$. O balão tem 1000 m^3 de volume. A massa específica do ar no exterior do balão é $\rho_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ e a pressão $p = 101,3 \text{ kPa}$.

O empuxo será igual a: $E = \rho_{ar} g V$.

Já que as paredes do balão são muito finas, desconsideraremos seu volume.

Assim o peso total do balão será $P = (m_e + m_b)g = m_e g + \rho_b V g$ onde m_b é a massa de ar contida no interior do balão e ρ_b sua massa específica.

Como o balão está fixo a certa altitude significa que a resultante das forças que atuam sobre o mesmo é nula, ou seja, $P = E$ e podemos então obter ρ_b através

$$\text{de } m_e g + \rho_b V g = \rho_{ar} g V \quad \text{ou} \quad \rho_b = \rho_{ar} - \frac{m_e}{V}$$

Substituindo-se os valores, tem-se $\rho_b = 1 \text{ kg/m}^3$. Finalmente, com a equação dos gases perfeitos, Eq. (1), obtém-se a temperatura do ar no interior do balão:

$$p = \rho_b R T_b \quad \text{ou} \quad T_b = \frac{p}{\rho_b R} \quad \text{onde } R = 287 \text{ J/kg.K, resultanto em } T_b = 353$$

K ou $80 \text{ }^\circ\text{C}$.

8. CENTRO DE PRESSÃO

Agora que já sabemos calcular a pressão num fluido podemos determinar a força total (F_R) exercida pelo fluido contra um objeto sólido, bem como o seu ponto de aplicação, também chamado de centro de pressão (CP).

Vamos considerar o caso mostrado na Fig. 11 onde a água está em contato com uma comporta de largura W na direção X e altura H na direção Y . Sobre a água

atua a pressão p_{01} e do lado direito da comporta, a pressão p_{02} .

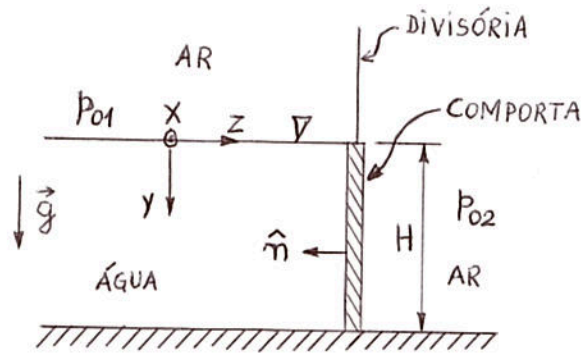


Figura 11. Força hidrostática sobre uma comporta vertical.

Da Eq. (7) sabemos que a força de superfície devido a pressão é calculada através de $\vec{F}_S = - \int_A p \hat{n} dA$ e da Eq. (14) conhecemos a função da pressão com a profundidade da água para ρ e g constantes, $p = p_0 + \rho g h$, onde $\hat{n} = -\hat{k}$, $dA = W dy$ e $h = y$.

Portanto, juntando as duas expressões anteriores podemos obter a força total (F_R) exercida pela água sobre a comporta:

$$\vec{F}_R = - \int_0^H (p_{01} + \rho g y) (-\hat{k}) W dy = W \hat{k} \int_0^H (p_{01} + \rho g y) dy$$

$$\vec{F}_R = (p_{01}WH + \rho g \frac{H^2}{2} W) \hat{k} \quad (19)$$

Podemos dividir este resultado da Eq. (19) em duas parcelas:

* $p_{01}WH$ = força devido p_{01} sobre a comporta (ar);

* $\rho g H^2 W / 2$ = força da água sobre a comporta.

Se desejarmos conhecer a resultante de todas as forças que atuam sobre a comporta, temos que considerar a força devido p_{02} do lado direito da comporta e que é dada por

$$\vec{F}_2 = -p_{02}WH \hat{k} \quad (20)$$

Assim, a resultante das forças (F_T) será igual à soma das Eqs. (19) e (20) resultante em

$$\vec{F}_T = (p_{01}WH - p_{02}WH + \rho g \frac{H^2}{2} W) \hat{k} \quad (21)$$

Para o caso em que a comporta está à pressão atmosférica, $p_{01} = p_{02}$, então

$$\vec{F}_T = \rho g \frac{H^2}{2} W \hat{k} = \vec{F}_R \quad (22)$$

Através da Eq. (22) podemos perceber que a força exercida pela água é igual ao produto entre a pressão média ($\rho g H / 2$) e a área em que a água está em contato

com o objeto (HW), ou seja: $F_R = \rho g \frac{H^2}{2} W = \left(\rho g \frac{H}{2} \right) (HW) = p_{\text{média}} \times \text{área}$

Concluindo: a pressão p_{01} que atua sobre a água deve ser desconsiderada se desejarmos calcular apenas a força da água sobre o objeto; e, a resultante de todas as forças será igual à força da água para um objeto que está num ambiente à pressão constante ($p_{01} = p_{02}$).

Para determinarmos o centro de pressão (y_R) temos que calcular o momento de cada elemento de força devido a pressão da água já que esta exerce uma força de magnitude variável com a profundidade. Então:

$$y_R \hat{j} \times F_R \hat{k} = \int y \hat{j} \times dF \hat{k} \quad \text{ou} \quad y_R F_R \hat{i} = \int y dF \hat{i}$$

finalmente

$$y_R F_R = \int_A y p dA \quad (23)$$

onde

$$p = \rho g h \quad (24)$$

Para o caso da Fig. 11 onde $dA = W dy$ e lembrando que $h = y$, tem-se

$$y_R F_R = \int_0^H W \rho g y^2 dy = \rho g \frac{H^3}{3} W \quad \text{como} \quad F_R = \rho g \frac{H^2}{2} W \quad \text{chega-se a}$$

$$y_R = \frac{2}{3} H \quad (25)$$

Este resultado pode ser visualizado na Fig. 12.

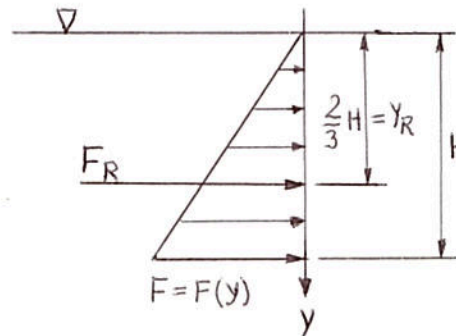


Figura 12. Centro de pressão.

Exemplo 1: calcule o centro de pressão e a força exercida pela água contra a comporta da Fig. 11 considerando-a com 10 m de largura na direção X e 5 m de lâmina d'água.

Da Eq. (22) para $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $H = 5 \text{ m}$ e $W = 10 \text{ m}$, tem-se $F_R = 1,22 \times 10^6 \text{ N} = 125 \text{ toneladas}$.

O centro de pressão é obtido da Eq. (25) resultando em $y_R = 3,33 \text{ m}$.

Vamos considerar, agora, o caso de uma comporta inclinada como mostrado na Fig. 13. Deve-se perceber que a profundidade h não é mais igual à coordenada y .

A partir das Eqs. (7) e (24) obtemos a força exercida pela água sobre a comporta: $\vec{F}_R = - \int_A p \hat{n} dA = - \int_A (\rho g h)(-\hat{k}) dA$. Como $h = y \cos \theta$ e dA

$= W dy$, tem-se: $\vec{F}_R = \int_0^L \rho g y \cos\theta W dy \hat{k} = \rho g \frac{L^2}{2} \cos\theta W \hat{k}$. Mas $H = L \cos\theta$, então

$$\vec{F}_R = \rho g \frac{H^2 W}{2 \cos\theta} \hat{k} \quad (26)$$

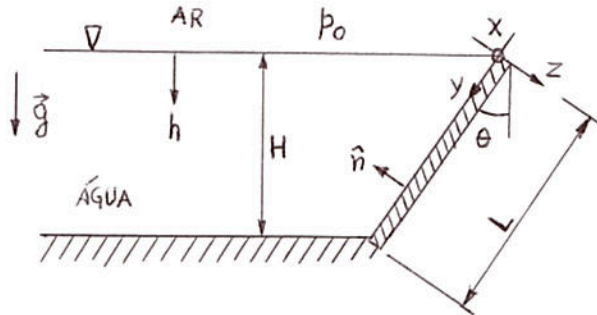


Figura 13. Força hidrostática sobre comporta inclinada.

Este resultado também pode ser interpretado como o produto entre a pressão média ($\rho g H/2$) e a área da comporta ($LW = HW/\cos\theta$), ou seja

$$F_R = \rho g \frac{H^2}{2} \frac{W}{\cos\theta} = \left(\rho g \frac{H}{2} \right) \left(\frac{HW}{\cos\theta} \right) = \left(\rho g \frac{H}{2} \right) (LW) = p_{\text{média}} \times \text{área}$$

O centro de pressão (y_R), no caso da comporta inclinada, também é obtido a partir da Eq. (23), resultando em

$$y_R F_R = \int_A y p dA = \int_0^L y (\rho g h) W dy = \int_0^L y (\rho g y \cos\theta) W dy$$

$$y_R F_R = \int_0^L \rho g W \cos\theta y^2 dy = \rho g \frac{L^3}{3} \cos\theta W = \rho g \frac{H^3 W}{3 \cos^2\theta}$$

Com F_R dado pela Eq. (26) obtém-se finalmente

$$y_R = \frac{2}{3} \frac{H}{\cos\theta} = \frac{2}{3} L \quad (27)$$

Exemplo 2: usando os mesmos dados do exemplo 1, calcular a força exercida pela água sobre uma comporta inclinada de 30° com a vertical.

Da Eq. (26), $F_R = 1,41 \times 10^6 \text{ N} = 144$ toneladas. Portanto, a força aumenta em 15% devido ao fator $(1/\cos\theta)$. Da Eq. (27), o centro de pressão resulta em $y_R = 3,85 \text{ m}$, ou à profundidade de $h = 3,33 \text{ m}$ que é o mesmo centro de pressão do exemplo 1.

Exemplo 3: vamos considerar agora o caso mostrado na Fig. 14. Qual a força exercida apenas pela água sobre a placa submersa? A largura da placa na direção X é W.

A partir das Eqs. (7) e (24) temos

$$\vec{F}_R = - \int_A p \hat{n} dA = - \int_{H_1}^{H_2} (\rho g h) (-\hat{k}) W dy = \rho g W \hat{k} \int_{H_1}^{H_2} y dy$$

$$\vec{F}_R = \rho g W \frac{(H_T^2 - H_1^2)}{2} \hat{k} = \left(\rho g W \frac{H_T^2}{2} - \rho g W \frac{H_1^2}{2} \right) \hat{k} \quad (28)$$

Deve-se perceber que este resultado é equivalente a subtrair da força total (F_R) exercida pela água sobre uma placa com comprimento H_T , a força correspondente a outra placa com comprimento H_1 .

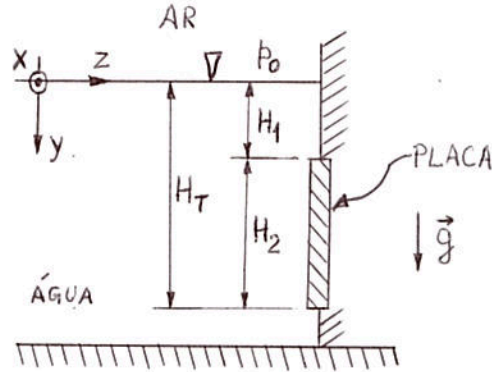


Figura 14. Força hidrostática sobre placa submersa.

Com a Eq. (23), o centro de pressão (y_R) para o problema da Fig. 14 resulta

em $y_R F_R = \int_A y p dA = \int_{H_1}^{H_T} \rho g W y^2 dy = \rho g W \frac{(H_T^3 - H_1^3)}{3}$. Com a Eq. (28),

finalmente tem-se

$$y_R = \frac{2}{3} \frac{(H_T^3 - H_1^3)}{(H_T^2 - H_1^2)} \quad (29)$$

Exemplo 4: determinar qual a massa M_1 da Fig. 15 que é necessária para manter a comporta imóvel. A massa da comporta é $M_2 = 1200$ kg, largura $W = 10$ m e comprimento $L_T = 7$ m. O nível de água é $H = 5$ m o que resulta em $L = 5,77$ m. A inclinação da comporta é de $\theta = 30^\circ$ com a vertical.

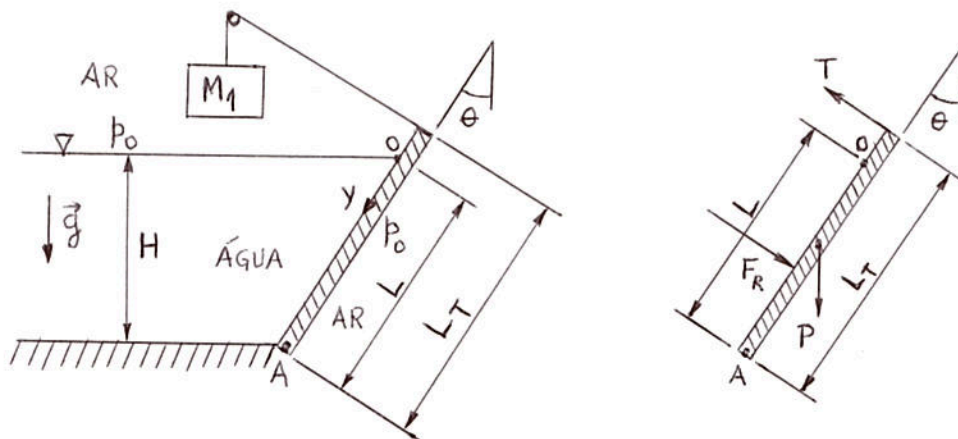


Figura 15. Comporta do exemplo 4.

As forças que atuam sobre a comporta são: a tração $T = M_1 g$ provocada pelo peso da massa M_1 ; o peso $P = M_2 g$ da comporta e a força F_R exercida pela água. O ponto de aplicação de T está mostrado na Fig. 15, assim como o de P que fica à

metade do comprimento L_T da comporta se a mesma for homogênea. Já o ponto de aplicação de F_R é dado pela Eq. (27) e o seu valor pela Eq. (26).

Se a comporta está imóvel então o momento das forças em relação ao ponto

$$A \text{ é nula, ou seja: } -L_T T + (L - y_R) F_R + \frac{L_T}{2} \text{sen}\theta P = 0 \text{ ou}$$

$$L_T M_1 g = (L - y_R) \rho g \frac{L^2}{2} \cos\theta W + \frac{L_T}{2} \text{sen}\theta M_2 g. \text{ Finalmente,}$$

$$M_1 = (L - y_R) \rho \frac{WL^2}{2L_T} \cos\theta + M_2 \frac{\text{sen}\theta}{2}$$

Para os dados do exemplo, $y_R = 3,85$ m resultante em $M_1 = 39800$ kg.